FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

STAN NAPIĘCIA W KRĄŻKU WIRUJĄCYM MIMOŚRODOWO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CV

Wyznaczymy stan napięcia w krążku wirującym dookoła osi położonej mimośrodowo ze stałą prędkością kątową ω. Zagadnienie to sprowadza się w zasadzie do określenia wartości naprężeń R_Θ, R_r i Θ_Θ panujących w dowolnym punkcie tego krążka.

Punktem wyjścia będzie praca [1], z której wynika, że wartości naprężeń X_y, X_x, Y_y w dowolnym punkcie tarczy nieograniczonej, wirującej ze stałą prędkością kątową ω, określają następujące wzory:

$$X_x + Y_y = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\varrho\omega^2 z z_1,$$

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varrho\omega^2 z_1^2,$$

gdzie $z = x+iy$, $z_1 = x - iy$ oraz gdzie ϱ oznacza gęstość tarczy.

Dla układu prostokątnych osi współrzędnych, których początek został przesunięty w lewo na odległość a, wartości wyżej wymienionych naprężeń X_y, X_x, Y_y wyrażają się wzorami:

$$X_x + Y_y = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\varrho\omega^2(z-a)(z_1-a).$$

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varrho\omega^2(z_1-a)^2.$$

Z kolei przechodząc do układu współrzędnych biegunowych będziemy mogli określić stan napięcia nieograniczonej tarczy za pomocą następujących wzorów:

$$R_r + \Theta_\Theta = X_x + Y_y = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\varrho\omega^2(z-a)(z_1-a),$$

$$2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta) = e^{2i\Theta}[2X_y + i(X_x - Y_y)] = -e^{2i\Theta}\frac{i}{2}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varrho\omega^2(z_1-a)^2.$$

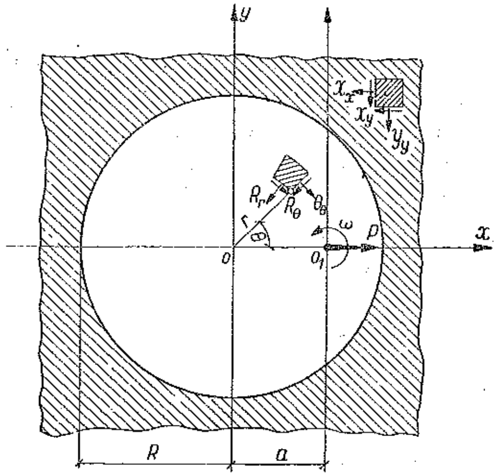
Wobec powyższego na obwodzie koła o promieniu R (rys. 1) tarczy nieograniczonej będą panować naprężenia R_Θ i R_R określone wzorem następującym:

$$R_\Theta + iR_R = \frac{1}{2}[2R_\Theta + i(R_R - \Theta_\Theta)] + \frac{i}{2}(R_R + \Theta_\Theta) = \tag{1}$$

$$= -i\frac{\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2\left(R - \frac{a}{R}z\right)^2 - i\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2(z-a)(z_1-a).$$

Przyłóżmy w punkcie O_1 omawianej tarczy nieograniczonej (rys. 1) siłę skupioną $P = -\pi a \varrho \omega^2 R^2$. Wartości naprężeń R_Θ i R_R, powstałych w punktach okręgu koła o promieniu R pod wpływem działania siły P, wyrazi wzór

$$R_\Theta + iR_R = \frac{e^{2i\Theta}}{2}\left[-\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z)\right] + \frac{i}{4}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right], \tag{2}$$



Rys. 1

przy czym wartości funkcyj $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ na podstawie pracy [2] wynoszą:

$$\Phi(z) = \frac{P}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{z-a},$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{P}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{z_1-a},$$

$$F(z) = \frac{iP}{2\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[-\frac{a}{(z-a)^2} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{z-a}\right].$$

Uwzględniając powyższe wartości funkcyj oraz wartość siły P we wzorze (2), będziemy mieli:

$$R_\Theta + iR_R = -ia\varrho\omega^2 R^2 \frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\,\frac{z}{(z-a)^2} + ia^2\varrho\omega^2 \frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\,\frac{z^2}{(z-a)^2} - \tag{3}$$

$$- ia\varrho\omega^2 \frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\,\frac{z^2}{z-a} - ia\varrho\omega^2 R^2 \frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z_1-a}\right).$$

Sumując naprężenia R_Θ i R_R określone wzorami (1) i (3) otrzymamy w wyniku działań ogólne wartości naprężeń R_Θ i R_R panujących w punktach okręgu koła o promieniu R wirującej tarczy nieograniczonej łącznie z działaniem siły P.

Wartości tych naprężeń określą wzór następujący:

$$(4)\quad R_\Theta + iR_R = -i\frac{\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2\left(R-\frac{a}{R}z\right)^2 - i\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2(z-a)(z_1-a) -$$

$$-ia\varrho\omega^2 R^2\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{z}{(z-a)^2} + ia^2\varrho\omega^2\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{z^2}{(z-a)^2} -$$

$$-ia\varrho\omega^2\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{z^2}{z-a} - ia\varrho\omega^2 R^2\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z_1-a}\right).$$

Przypuśćmy, że na okręgu koła o promieniu R działają siły naprężenia R_Θ i R_R określone wzorem (4), lecz ze znakiem przeciwnym. Wyznaczając dla tego stanu obciążenia krążka wartości naprężeń w dowolnym jego punkcie oraz dodając powyższe wartości naprężeń do naprężeń panujących w odpowiednich punktach wirującej tarczy nieograniczonej, na którą działa również siła P, otrzymamy wartości naprężeń panujących w krążku wirującym mimośrodowo, tj. dookoła osi przechodzącej przez punkt O_1.

Pod działaniem naprężeń R_Θ i R_R określonych wzorem (4) krążek o promieniu R znajduje się w równowadze; łatwo można sprawdzić, że

$$\int_0^{2\pi}(R_R + iR_\Theta)e^{i\Theta}\,d\Theta = 0\,.$$

Warunek ten obejmuje równanie rzutów sił na osie współrzędnych prostokątnych w kształcie następującym:

$$\int_0^{2\pi}(R_R\cos\Theta - R_\Theta\sin\Theta)\,d\Theta = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi}(R_R\sin\Theta + R_\Theta\cos\Theta)\,d\Theta = 0\,.$$

W dalszym ciągu wyznaczać będziemy wartości naprężeń R_Θ, R_r i Θ_Θ, panujących w dowolnym punkcie krążka o promieniu R, powstałych pod wpływem działania R_Θ i R_R na obwodzie tego krążka zgodnie ze wzorem (4), lecz ze znakiem przeciwnym.

Określenie tych naprężeń będzie możliwe ze wzorów

$$R_r + \Theta_\Theta = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right],$$

$$2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta) = -\frac{i}{2}z\Phi'(z) + \frac{z^2}{r^2}F(z),$$

po uprzednim wyznaczeniu funkcji $\Phi(z)$ i $F(z)$.

W tym celu zostanie zastosowany wzór **Schwartza**

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\Theta)\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta+ib_0, \tag{5}$$

określający funkcję holomorficzną $f(z)$ w obszarze ograniczonym okręgiem koła o promieniu R, gdy znana jest część rzeczywista $\varphi(\Theta)$ tej funkcji na obwodzie powyższego koła.

Podobny kształt ma również wzór

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}i\psi(\Theta)\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta+a_0, \tag{6}$$

określający funkcję holomorficzną $f(z)$ w obszarze ograniczonym okręgiem koła o promieniu R, gdy znana jest część urojona $i\psi(\Theta)$ tej funkcji na obwodzie wspomnianego koła.

Dodając stronami wzór (6) i (5) otrzymujemy

$$2f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi(\Theta)+i\psi(\Theta)]\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta+ib_0+a_0, \tag{7}$$

zaś odejmując wzór (6) od wzoru (5) mamy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi(\Theta)-i\psi(\Theta)]\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta+ib_0-a_0=0. \tag{8}$$

Wzór (7) określa funkcję holomorficzną w obszarze ograniczonym okręgiem koła o promieniu R, gdy znana jest część rzeczywista i część urojona tej funkcji na obwodzie wspomnianego koła. Natomiast wzór (8) wskazuje na to, że w przypadku wiadomej funkcji sprzężonej na okręgu koła o promieniu R otrzymujemy w wyniku określonych działań tylko wielkość stałą.

Przechodząc do sprawy określenia funkcji $\Phi(z)$ napiszemy w tym celu równość następującą:

$$R_R+\Theta_\Theta=2(R_R+iR_\Theta)-i[2R_\Theta-i(R_R-\Theta_\Theta)].$$

Stosując do lewej strony wzór (5), do pierwszego wyrazu prawej strony wzór (7), zaś do drugiego wyrazu prawej strony (8), otrzymamy, [3],

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(R_R+iR_\Theta)\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta+C. \tag{9}$$

Podstawiając w tym wzorze $Re^{i\Theta}=t$ mamy $d\Theta=dt/it$ i wobec tego wzór (9) określający funkcję $\Phi(z)$ napisać można w postaci nieco zmienionej, mianowicie:

$$(10) \qquad \Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\oint (R_R+iR_\Theta)\frac{t+z}{t(t-z)}dt+C.$$

Z kolei przekształcimy funkcję R_R+iR_Θ określoną wzorem (4) za pomocą zależności $zz_1=R^2$ w ten sposób, ażeby funkcja $\Phi(z)$ dawała wartości naprężeń skończone. Zmienimy jednocześnie znak na przeciwny.

Postać funkcji R_R+iR_Θ występującej pod znakiem całki jest po przekształceniu następująca:

$$R_R+iR_\Theta=\frac{\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2\left(R-\frac{a}{R}t_1\right)^2+\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2(R^2-at-at_1+a^2)+$$
$$+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{t}{(R^2-at)^2}-a^2\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{1}{(R^2-at)^2}+$$
$$+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{1}{t(R^2-at)}+a\varrho\omega^2R^2\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\left(\frac{t}{R^2-at}+\frac{t_1}{R^2-at_1}\right).$$

Następnie biorąc pod uwagę wzór (8) oraz ponadto w przypadku funkcji meromorficznej wzór

$$\oint f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(a_k),$$

[gdzie $\operatorname{res} f(a_k)$ oznacza residuum omawianej funkcji w punkcie (a_k)] otrzymamy ze wzoru (10) po wykonaniu odnośnych działań

$$(11) \qquad \Phi(z)=-2a\varrho\omega^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}z+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{z}{(R^2-az)^2}-$$
$$-a^2\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{(R^2-az)^2}+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{z(R^2-az)}-\frac{1}{R^2z}\right]+$$
$$+a\varrho\omega^2R^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{z}{R^2-az}+C_1.$$

W celu określenia funkcji $F(z)$ napiszemy równość następującą:

$$2(R_\Theta+iR_R)=i(R_R+\Theta_\Theta)+[2R_\Theta+i(R_R-\Theta_\Theta)].$$

Stosując do wyrazu lewej strony wzór (7), do pierwszego wyrazu prawej strony wzór (5), zaś do drugiego wyrazu prawej strony wzór (7), znajdziemy

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(R_\Theta+iR_R)\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta=i\Phi(z)-iz\Phi'(z)+\frac{2z^2}{R^2}F(z),$$

skąd otrzymujemy

$$(12) \qquad F(z)=\frac{R^2}{2z^2}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(R_\Theta+iR_R)\frac{Re^{i\Theta}+z}{Re^{i\Theta}-z}d\Theta-i\Phi(z)+iz\Phi'(z)\right]=$$

$$=\frac{R^2}{2z^2}\left[\frac{1}{\pi i}\oint(R_\Theta+iR_R)\frac{t+z}{t(t-z)}dt-i\Phi(z)+iz\Phi'(z)\right],$$

gdzie $t=Re^{i\Theta}$.

Funkcja $R_\Theta+iR_R$, znajdująca się pod znakiem całki pierwszego wyrazu prawej strony, na podstawie wzoru (4) i po przekształceniu jego przy pomocy zależności $zz_1=R^2$ oraz po zmianie znaku na odwrotny, posiada następującą postać:

$$(13) \qquad R_\Theta+iR_R=i\varrho\omega^2\frac{\mu}{4(\lambda+2\mu)}\left(R-\frac{a}{R}t\right)^2+i\varrho\omega^2\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}(R^2-at_1-at+a^2)+$$

$$+ia\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{t_1}{(R^2-at_1)^2}-ia^2\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{1}{(R^2-at_1)^2}+$$

$$+ia\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\frac{1}{t_1(R^2-at_1)}+ia\varrho\omega^2R^2\frac{\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\left(\frac{t_1}{R^2-at_1}+\frac{t}{R^2-at}\right).$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymujemy ze wzoru (12)

$$(14) \qquad F(z)=\frac{R^2}{2z^2}\left\{i\varrho\omega^2\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left(R-\frac{a}{R}z\right)^2-i\,2a\varrho\omega^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}z+\right.$$

$$+ia\varrho\omega^2\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}z+ia^2\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{(R^2-az)^2}-$$

$$-ia\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{z(R^2-az)}-\frac{1}{R^2z}\right]+ia\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{z(R^2+az)}{(R^2-az)^3}-$$

$$-i2a^3\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{z}{(R^2-az)^3}+ia\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{R^2z}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{R^2-2az}{z(R^2-az)^2}\right]+i(C_2-C_1)\right\}.$$

Stałe C_1 i C_2 występujące we wzorach (11) i (14) należy określić z istniejących warunków rozpatrywanego zagadnienia, tj. z warunku że na obwodzie krążka, a więc dla $r=R$, naprężenia $R_\Theta+iR_R$ wyznaczone z zależności

$$R_\Theta+iR_R=\frac{1}{2}[2R_\Theta+i(R_R-\Theta_\Theta)]+\frac{i}{2}(R_R+\Theta_\Theta)=$$

$$=-\frac{i}{4}z\Phi'(z)+\frac{z^2}{2R^2}F(z)+\frac{i}{4}[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)],$$

muszą być takie same jak we wzorze (13). Ponadto dla $r=0$ wartości naprężeń w krążku powinny posiadać wartości skończone.

Zatem z pierwszego warunku otrzymujemy

$$(15)\qquad C_1 + C_2 = 2\varrho\omega^2 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(R^2+a^2),$$

zaś z drugiego warunku, tj. z zależności

$$2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta) = -\frac{i}{2} z\Phi'(z) + \frac{z^3}{2r^2}F(z)$$

wynika, że dla $r=0$ wartości naprężeń będą miały wartości skończone, o ile przyjmiemy, że

$$C_2 - C_1 = -\varrho\omega^2 R^2 \frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \varrho\omega^2 a^2 \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Wobec tego z powyższej zależności oraz z równości (15) otrzymujemy

$$C_1 = \varrho\omega^2 R^2 \frac{2\lambda+3\mu}{2(\lambda+2\mu)} + \varrho\omega^2 a^2 \frac{\lambda}{\lambda+2\mu},$$

$$C_2 = \varrho\omega^2 R^2 \frac{2\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} + \varrho\omega^2 a^2.$$

Zatem na podstawie wyżej przeprowadzonych rozważań wartości naprężeń R_Θ, R_r i Θ_Θ panujących w krążku wirującym dookoła osi przechodzącej przez punkt O_1 można będzie określić z równań następujących:

$$\begin{aligned}
R_r + \Theta_\Theta = &-\varrho\omega^2 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(z-a)(z_1-a) - a\varrho\omega^2 R^2 \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z_1-a}\right) + \\
&+\frac{1}{2}\left\{-2\varrho\omega^2 a \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(z+z_1) + \varrho\omega^2 a R^4 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{z}{(R^2-az)^2} + \right.\right.\\
&\left.+\frac{z_1}{(R^2-az_1)^2}\right] - \varrho\omega^2 a^2 R^4 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{(R^2-az)^2}+\frac{1}{(R^2-az_1)^2}\right] + \\
&+\varrho\omega^2 a R^4 \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{z(R^2-az)} - \frac{1}{R^2 z} + \frac{1}{z_1(R^2-az_1)} - \frac{1}{R^2 z_1}\right] + \\
&+\varrho\omega^2 a R^2 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{z}{R^2-az}+\frac{z_1}{R^2-az_1}\right) + 2\varrho\omega^2 a^2 \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} + \\
&\left.+\varrho\omega^2 R^2 \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta) = &-i\varrho\omega^2 \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)} e^{2i\Theta}(z_1-a)^2 - i\varrho\omega^2 a R^2 \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \frac{z}{(z-a)^2} - \\
&-ia\varrho\omega^2 R^2 \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \frac{z^2}{r^2}\left[-\frac{a}{(z-a)^2} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{z-a}\right] - i\frac{z}{2}\left\{-2a\varrho\omega^2 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} + \right.\\
&+a\varrho\omega^2 R^4 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{R^2+az}{(R^2-az)^3} - 2a^3\varrho\omega^2 R^4 \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{(R^2-az)^3} +
\end{aligned}$$

$$+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{(R^2-az)^2}+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{R^2z^2}-\frac{R^2-2az}{z^2(R^2-az)^2}\right]\Bigg\}+$$

$$+i\frac{R^2}{2r^2}\left\{\varrho\omega^2\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left(R-\frac{a}{R}z\right)^2+a\varrho\omega^2\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}z-2a\varrho\omega^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}z-\right.$$

$$-\varrho\omega^2R^2\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+a^2\varrho\omega^2\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}+a^2\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{(R^2-az)^2}-$$

$$-a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{z(R^2-az)}-\frac{1}{R^2z}\right]+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{z(R^2+az)}{(R^2-az)^3}-$$

$$\left.-2a^3\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{z}{(R^2-az)^3}+a\varrho\omega^2R^4\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{R^2z}-\frac{R^2-2az}{z(R^2-az)^2}\right]\right\}.$$

Wartości tych naprężeń są następujące:

$$(16)\qquad R_\Theta=\frac{\varrho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)}\left\{-2(\lambda+2\mu)ar\sin\Theta+\mu a^2\sin2\Theta-\right.$$

$$-(\lambda+\mu)aR^2r\frac{(r^2-a^2)\sin\Theta}{A^2}+(\lambda+\mu)a^3R^2\frac{2r\sin\Theta-a\sin2\Theta}{A^2}-$$

$$-(\lambda+3\mu)aR^2\frac{a\sin2\Theta-r\sin\Theta}{A}-$$

$$-(\lambda+\mu)aR^4r\frac{(6R^4a^2r^2-a^4r^4-R^8)\sin\Theta-aR^2r(R^4+a^2r^2)\sin2\Theta}{B^3}+$$

$$+2(\lambda+\mu)a^3R^4r\frac{R^2(3a^2r^2-R^4)\sin\Theta-a^3r^3\sin2\Theta}{B^3}-$$

$$-(\lambda+\mu)aR^4r\frac{(a^2r^2-R^4)\sin\Theta}{B^2}+$$

$$+(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\left[\frac{R^2(R^4+4a^2r^2)\sin\Theta-2ar(R^4+a^2r^2)\sin2\Theta+R^2a^2r^2\sin3\Theta}{B^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin\Theta}{R^2}\right]\right\}+\frac{\varrho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)}\frac{R^2}{r^2}\left\{(\lambda+\mu)ar\sin\Theta-\mu\frac{a^2r^2}{R^2}\sin2\Theta+(\lambda+\mu)a^3R^4r\times\right.$$

$$\times\frac{ar\sin2\Theta-2R^2\sin\Theta}{B^2}-(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\left(\frac{R^2\sin\Theta-ar\sin2\Theta}{B}-\frac{\sin\Theta}{R^2}\right)+$$

$$+(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\left[\frac{\sin\Theta}{R^2}-\frac{R^2(R^4+4a^2r^2)\sin\Theta-2ar(R^4+a^2r^2)\sin2\Theta+a^2R^2r^2\sin3\Theta}{B^2}\right]-$$

$$-2(\lambda+\mu)a^3R^4r\frac{R^2(3a^2r^2-R^4)\sin\Theta-a^3r^3\sin2\Theta}{B^3}+$$

$$\left.+(\lambda+\mu)aR^4r\frac{(6R^4a^2r^2-a^4r^4-R^8)\sin\Theta-aR^2r(R^4+a^2r^2)\sin2\Theta}{B^3}\right\},$$

$$(17)\qquad R_r = \frac{\varrho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)}\Biggl\{(2\lambda+3\mu)(R^2-r^2) - 2\mu a^2 + 2(\lambda+2\mu)\,ar\cos\Theta -$$

$$-\mu a^2\cos 2\Theta - 2(\lambda+\mu)\,aR^2\,\frac{r\cos\Theta - a}{A} + 2(\lambda+\mu)\,aR^4 r\,\frac{(R^4+a^2r^2)\cos\Theta - 2R^2ar}{B^2} -$$

$$-2(\lambda+\mu)\,a^2R^4\,\frac{R^4 - 2R^2ar\cos\Theta + a^2r^2\cos 2\Theta}{B^2} + 2(\lambda+\mu)\,aR^2 r\,\frac{R^2\cos\Theta - ar}{B} +$$

$$+2(\lambda+3\mu)\,\frac{aR^4}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta - ar\cos 2\Theta}{B} - \frac{\cos\Theta}{R^2}\right) -$$

$$-(\lambda+\mu)\,aR^2 r\,\frac{(r^2+a^2)\cos\Theta - 2ar}{A^2} +$$

$$+(\lambda+\mu)\,a^2R^2\,\frac{r^2 - 2ar\cos\Theta + a^2\cos 2\Theta}{A^2} - (\lambda+3\mu)aR^2\,\frac{r\cos\Theta - a\cos 2\Theta}{A} -$$

$$-(\lambda+\mu)\,aR^6 r\,\frac{R^2(R^4+3a^2r^2)\cos\Theta - a^3r^3\cos 2\Theta - 3R^4ar}{B^3} +$$

$$+2(\lambda+\mu)\,a^3R^4 r\,\frac{R^2(R^4+3a^2r^2)\cos\Theta - a^3r^3\cos 2\Theta - 3R^4ar}{B^3} +$$

$$+(\lambda+3\mu)\,\frac{aR^4}{r}\left[\frac{R^2(R^4+4a^2r^2)\cos\Theta - 2ar(R^4+a^2r^2)\cos 2\Theta + R^2a^2r^2\cos 3\Theta - 2arR^4}{B^2} -\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\Theta}{R^2}\right] - (\lambda+\mu)\,a^2R^4r^2\,\frac{R^6\cos 2\Theta - ar(3R^4+a^2r^2)\cos\Theta + 3R^2a^2r^2}{B^3} -$$

$$-(\lambda+\mu)\,aR^4 r\,\frac{(R^4+a^2r^2)\cos\Theta - 2R^2ar}{B^2}\Biggr\} +$$

$$+\frac{\varrho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)}\,\frac{R^2}{r^2}\Biggl\{-(\lambda+\mu)\,ar\cos\Theta + \mu a^2\left(2 + \frac{r^2}{R^2}\cos 2\Theta\right) +$$

$$+(\lambda+\mu)\,a^2R^4\,\frac{R^4 - 2R^2ar\cos\Theta + a^2r^2\cos 2\Theta}{B^2} -$$

$$-(\lambda+3\mu)\,\frac{aR^4}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta - ar\cos 2\Theta}{B} - \frac{\cos\Theta}{R^2}\right) -$$

$$-2(\lambda+\mu)\,a^3R^4 r\,\frac{R^2(R^4+3a^2r^2)\cos\Theta - a^3r^3\cos 2\Theta - 3R^4ar}{B^3} +$$

$$+(\lambda+\mu)\,aR^4 r\,\frac{(R^8 - a^4r^4)\cos\Theta + aR^2r(R^4 - a^2r^2)\cos 2\Theta + 3R^2ar(a^2r^2 - R^4)}{B^3} +$$

$$+(\lambda+3\mu)\,\frac{aR^4}{r}\left[\frac{\cos\Theta}{R^2} -\right.$$

$$\left.-\frac{R^2(R^4+4a^2r^2)\cos\Theta - 2ar(R^4+a^2r^2)\cos 2\Theta + a^2R^2r^2\cos 3\Theta - 2arR^4}{B^2}\right]\Biggr\},$$

$$\Theta_\Theta = \frac{\varrho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)}\Bigg\{-2\mu a^2 - (\mu+2\lambda) r^2 + (2\lambda+3\mu) R^2 - 2(\lambda+2\mu) ar\cos\Theta +$$

$$+\mu a^2\cos 2\Theta - 2(\lambda+\mu) aR^2\frac{r\cos\Theta - a}{A} + 2(\lambda+\mu) aR^4 r\frac{(R^4+a^2r^2)\cos\Theta - 2R^2ar}{B^2} -$$

$$-2(\lambda+\mu) a^2R^4\frac{R^4 - 2R^2ar\cos\Theta + a^2r^2\cos 2\Theta}{B^2} +$$

$$+2(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta - ar\cos 2\Theta}{B} - \frac{\cos\Theta}{R^2}\right) +$$

$$+2(\lambda+\mu) aR^2 r\frac{R^2\cos\Theta - ar}{B} + (\lambda+\mu) aR^2 r\frac{(r^2+a^2)\cos\Theta - 2ar}{A^2} -$$

$$-(\lambda+\mu) a^2R^2\frac{r^2 - 2ar\cos\Theta + a^2\cos 2\Theta}{A^2} + (\lambda+3\mu) aR^2\frac{r\cos\Theta - a\cos 2\Theta}{A} +$$

$$+(\lambda+\mu) aR^6 r\frac{R^2(R^4+3a^2r^2)\cos\Theta - a^3r^3\cos 2\Theta - 3R^4ar}{B^3} -$$

$$-2(\lambda+\mu) a^3R^4 r\frac{R^2(R^4+3a^2r^2)\cos\Theta - a^3r^3\cos 2\Theta - 3R^4ar}{B^3} -$$

$$-(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\Bigg[\frac{R^2(R^4+4a^2r^2)\cos\Theta - 2ar(R^4+a^2r^2)\cos 2\Theta + R^2a^2r^2\cos 3\Theta - 2arR^4}{B^3} -$$

$$-\frac{\cos\Theta}{R^2}\Bigg] + (\lambda+\mu) a^2R^4r^2\frac{R^6\cos 2\Theta - ar(3R^4+a^2r^2)\cos\Theta + 3R^2a^2r^2}{B^3} +$$

$$+(\lambda+\mu) aR^4 r\frac{(R^4+a^2r^2)\cos\Theta - 2R^2ar}{B^2}\Bigg\} -$$

$$-\frac{\varrho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)}\frac{R^2}{r^2}\Bigg\{-(\lambda+\mu) ar\cos\Theta + \mu a^2\left(2 + \frac{r^2}{R^2}\cos 2\Theta\right) +$$

$$+(\lambda+\mu) a^2R^4\frac{R^4 - 2R^2ar\cos\Theta + a^2r^2\cos 2\Theta}{B^2} -$$

$$-(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta - ar\cos 2\Theta}{B} - \frac{\cos\Theta}{R^2}\right) -$$

$$-2(\lambda+\mu) a^3R^4 r\frac{R^2(R^4+3a^2r^2)\cos\Theta - a^3r^3\cos 2\Theta - 3R^4ar}{B^3} +$$

$$+(\lambda+\mu) aR^4 r\frac{(R^8 - a^4r^4)\cos\Theta + aR^2r(R^4 - a^2r^2)\cos 2\Theta + 3R^2ar(a^2r^2 - R^4)}{B^3} +$$

$$+(\lambda+3\mu)\frac{aR^4}{r}\Bigg[\frac{\cos\Theta}{R^2} -$$

$$-\frac{R^2(R^4+4a^2r^2)\cos\Theta - 2ar(R^4+a^2r^2)\cos 2\Theta + a^2R^2r^2\cos 3\Theta - 2arR^4}{B^3}\Bigg]\Bigg\}.$$

We wzorach powyższych przyjęte zostały oznaczenia

$$A = r^2 - 2ar\cos\Theta + a^2,$$

$$B = R^4 - 2R^2 ar\cos\Theta + a^2 r^2.$$

Ze wzorów (16) i (17) można zauważyć, że dla $r = R$, tj. na obwodzie krążka, wartości naprężeń R_Θ i R_r są równe zeru, jak być powinno, przy czym dla $r = 0$ wartości naprężeń, R_Θ, R_r i Θ_Θ posiadają wartości skończone. Natomiast dla $r = a$ i $\Theta = 0$, tj. na osi obrotu, wartości naprężeń R_r i Θ_Θ osiągają wartości nieskończenie wielkie, a to wskutek działania skupionej siły odporowej P. W bezpośredniej bliskości osi obrotu będą więc miały miejsce odkształcenia niesprężyste. Jednakże w pewnym oddaleniu od tej osi stan napięcia jak również i odkształcenia będą określone ściśle wzorami wyżej wyprowadzonymi.

Literatura cytowana w tekście

[1] F. Szelągowski, *The Problem of a Rotating Disk with Rigid Circular Central Part,* Bull. Acad. Polon. Sci., cl. 4, 5 (1957).

[2] F. Szelągowski, *The Tension with Concentrated Forces of an Infinite Plate with a Rigid Circular Inclusion,* Bull. Acad. Polon. Sci., cl. 4, 4 (1956), 145.

[3] G. V. Kolosow, *Application of the Complex Variable to the Theory of Elasticity,* Moskwa 1935.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

В работе выводятся формулы, определяющие значения напряжений R_Θ, R_r, Θ_Θ, существующих в произвольной точке диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси проходящей через точку O_1, расположенной на расстоянии a от центра этого диска.

Summary

THE STATE OF STRESS IN A DISC ROTATING ABOUT AN ECCENTRIC AXIS

This paper is devoted to the derivation of equations determining the values of the stresses R_Θ, R_r and Θ_Θ at every point of a disc rotating with constant angular velocity ω about an axis passing through a point O_1 at the distance a from the axis of the disc.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 grudnia 1957 r.