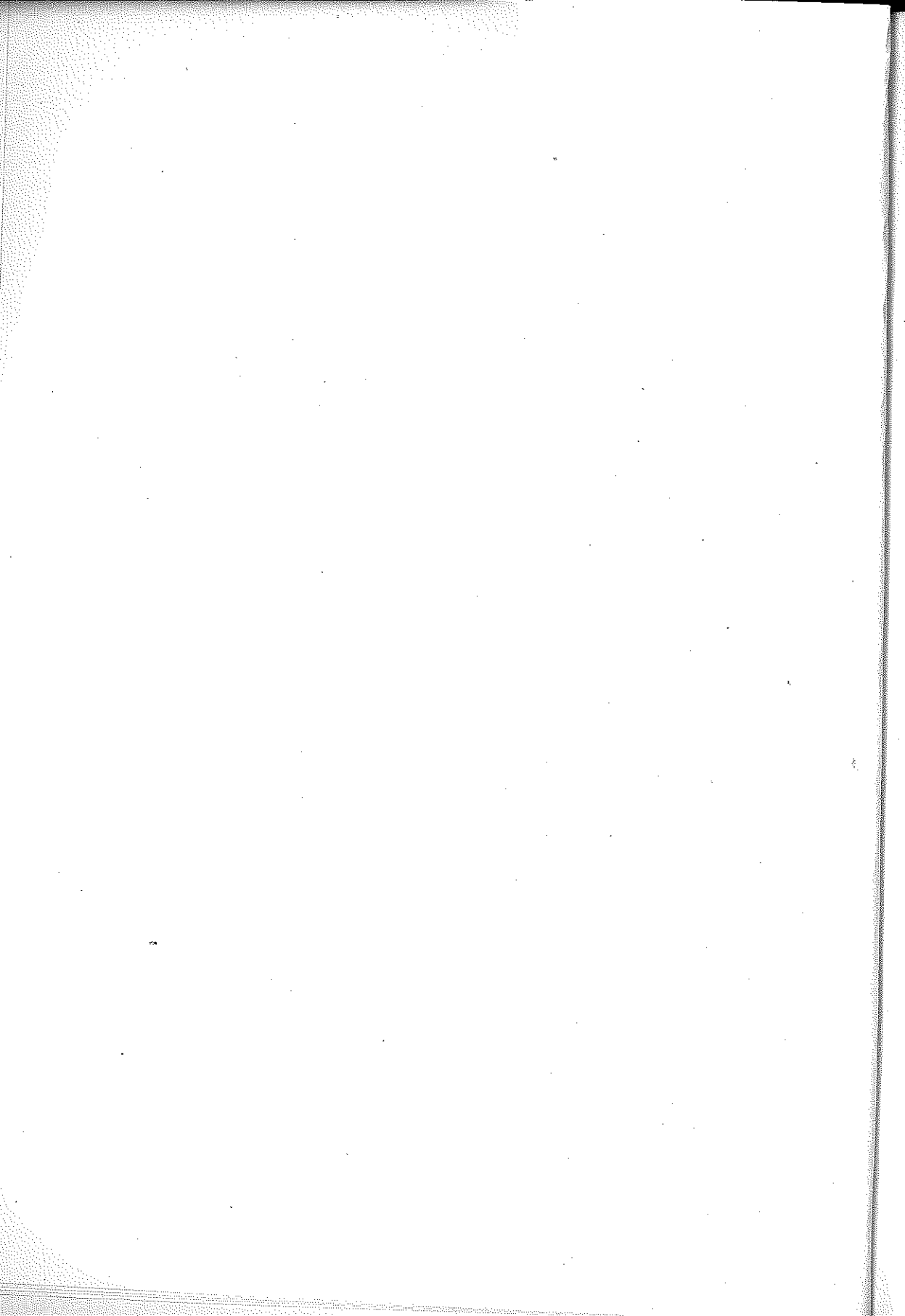


JÓZEF WIĘCKOWSKI

TEUMIENIE FALAMI NAPRĘŻEŃ
W BELKACH SPRĘŻYSTYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CIV



1. Pierwsze prace poświęcone zagadnieniom rozchodzenia się fal naprężeń w urządzeniach sprężystych pochodzą z drugiej połowy ubiegłego stulecia, jak np. prace C. Chree, [4] i [5], oraz L. Pochhammera, [11]. W chwili obecnej literatura tego przedmiotu jest tak bogata, że trudno omówić szczegółowo nawet te prace, które były autorowi dostępne. Obszerne informacje źródłowe można znaleźć np. w książce R. Kolsky'ego, [9].

Szczególnym zadaniem, rozchodzeniem się fal naprężeń w belkach sprężystych, zajmowało się również wielu badaczy. Już L. Rayleigh, [12], zbadał wpływ bezwładności obrotowej przekrojów belek na prędkości rozchodzenia się impulsów giętnych, a S. P. Timoszenko, [16], wykazał znaczny wpływ sił tnących na te prędkości.

W ostatnich latach ukazało się wiele prac teoretycznych i doświadczalnych na temat rozchodzenia się impulsów w belkach sprężystych i to zarówno impulsów podłużnych (np. R. Skalak, [15]), jak i poprzecznych (giętnych) (np. R. A. Anderson, [1], [2], M. Golland, P. D. Wickersham, M. A. Dengler, [6], A. Rippenberger, H. Norman Abramson, B. A. Boley, C. C. Chao, [3], i inni).

W dostępnej autorowi literaturze nie zwrócono uwagi na ciekawe własności sił reakcji urządzeń sprężystych podczas drgań. Ponieważ podczas drgań powstają fale naprężeń niosące energię, muszą powstawać szczególnego rodzaju reakcje zależne od rodzaju wymuszenia i własności sprężystych i geometrycznych układu, które mają charakter niezachowawczych sił tłumienia. Oprócz tych sił muszą wystąpić również siły zachowawcze bezwładności, zależne od przyspieszenia ruchu, oraz siły zachowawcze, zależne wyłącznie od przemieszczenia.

Można się spodziewać, że własności reakcji ośrodków sprężystych podczas drgań będą bardzo podobne do własności sił reakcji cieczy na drgające ciała zanurzone lub pływające w cieczy, [7], [8] i [17]. Np. dla drgań w cieczy idealnej można wskazać wymienione trzy rodzaje reakcji: siły tłumienia (falami powierzchniowymi), siły bezwładności proporcjonalne do przyspieszenia (charakteryzuje je tzw. pozorna masa wody towarzyszącej) oraz siły wyporu hydrostatycznego zależne od głębokości zanurzenia pod powierzchnią swobodną. Wszystkie te siły mają charakter sił

zależnych liniowo od prędkości, przyspieszenia i zanurzenia pod powierzchnią swobodną cieczy, przy czym ciekawą rzeczą jest, że siły tłumienia falami powierzchniowymi mają charakter sił tłumienia tarcielem lepkiem, w którym współczynnik tłumienia jest funkcją częstości.

W niniejszej pracy wstępnej poświęconej wyłącznie szczególnym przypadkom drgań belek wykażemy, że dla najprostszych ruchów wykładniczych lub harmonicznym w czasie siły tłumienia falami naprężeń są siłami typu sił tarcia lepkiego, jednakże podobnie jak w zagadnieniach hydromechaniki współczynniki tłumienia są funkcjami częstości. Dla pewnego przypadku drgań belki nieskończonej znajdziemy również masę zredukowaną jako funkcję częstości drgań. Podobieństwo tych zjawisk z drganiami sił w cieczy jest tak dalekie, że można nawet podać taki przykład z drgań ciał sztywnych w cieczy lepkiej, w którym współczynnik tłumienia i masa zredukowana cieczy zależy tak samo od częstości jak współczynnik tłumienia i masa zredukowana belki nieskończonej dla pewnego przypadku drgań, [17].

Wpływu tłumienia wewnętrznego na siły reakcji układów sprężystych nie będziemy w tej pracy analizowali. Szczegółową dyskusję podamy w pracach następnych. Na pewne interesujące zjawiska, które powinny wystąpić w układach z tłumieniem wewnętrznym, zwrócono uwagę w zakończeniu.

W punktach 2-6 pracy zajmiemy się wyłącznie wyznaczeniem takich ruchów belek sprężystych, przy których wystąpią wyłącznie siły tłumienia. Rozpatrzmy drgania podłużne i skrętne, p. 2, oraz drgania giętne z uwzględnieniem bezwładności obrotowej, p., 3, i sił tnących, p. 5. Wyprowadzimy szereg zależności na współczynniki tłumienia i podamy proste przykłady, p. 2, 4 i 6. W p. 7 i 8 znajdziemy takie rozwiązanie dla drgań giętnych wymuszonych, w którym wystąpią zarówno siły reakcji zachowawcze, jak i niezachowawcze i dla prostego przypadku drgań wyznaczymy współczynnik tłumienia i masę zredukowaną belki nieskończonej.

2. Weźmy pod uwagę równanie drgań podłużnych belki jednorodnej, prostoliniowej o stałym przekroju. Równanie to można napisać w postaci

$$(2.1) \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $a = \sqrt{E/\rho}$ jest prędkością fal podłużnych w belce, a u przemieszczeniem.

Rozpatrzmy belkę pokrywającą się z osią x dla $x \geq 0$. Załóżmy, że w przekroju $x=0$ działa dla $t \geq 0$ podłużna siła wymuszająca $P(t)$, a w chwili $t=0$ całkowita energia mechaniczna belki jest równa zeru. Powstaną wtedy w belce fale podłużne poruszające się z prędkością a

w kierunku dodatniej osi x . Łatwo wykazać, że z ogólnej całki równania (2.1) otrzymuje się wtedy rozwiązanie szczególne

$$(2.2) \quad u = f(x - at).$$

Obliczmy siłę podłużną P wymuszającą ruch opisany równaniem (2.2). Otrzymamy wtedy

$$(2.3) \quad P = -EAf'(-at),$$

gdzie A jest polem przekroju belki.

Podobnie prędkość przekroju początkowego v będzie

$$(2.4) \quad v = [\dot{u}]_{x=0} = -af'(-at).$$

Porównując równanie (2.3) z równaniem (2.4) spostrzegamy, że P jest w każdej chwili proporcjonalne do \dot{u} niezależnie od postaci ruchu wymuszonego, przy czym współczynnik proporcjonalności λ wynosi

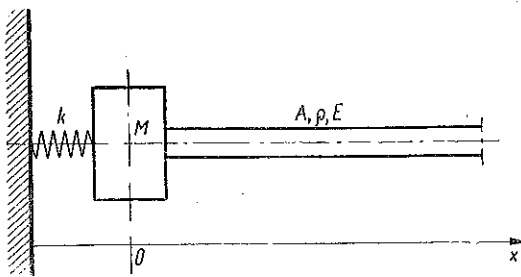
$$(2.5) \quad \lambda = A\sqrt{\rho E}.$$

Zatem siły reakcji końca belki mają charakter sił tłumiących, odpowiadających tarcia lepkiemu, a współczynnik λ jest współczynnikiem tłumienia.

Jeżeli połączymy rozważaną belkę z układem sprężystym o skończonych wymiarach, belka będzie działała jak tłumik drgań o współczynniku tłumienia określonym równaniem (2.5). Np. równanie ruchu oscylatora harmonicznego połączonego z taką belką (rys. 1) będzie

$$(2.6) \quad M\ddot{u} + A\sqrt{\rho E}\dot{u} + ku = Q(t)$$

gdzie M oznacza masę oscylatora, k sztywność sprężyny oraz $Q(t)$ siłę wymuszającą drgania, działającą na masę oscylatora. Równanie (2.6) opisuje zarówno drgania swobodne, jak i drgania wymuszone oscylatora z dowolną postacią siły wymuszającej, gdyż do wyznaczenia współczynnika tłumienia λ nie precyzowaliśmy postaci funkcji (2.2).



Rys. 1

Analogiczny wynik można otrzymać dla drgań skrętnych belki o przekroju kołowo symetrycznym. Wtedy równanie drgań ma postać

$$(2.7) \quad a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $a = \sqrt{G\rho}$ oznacza prędkość fal skrętnych, ϑ kąt skrećenia, a współczynnik tłumienia wynosi

$$(2.8) \quad \lambda = J_0 \sqrt{\rho G},$$

gdzie J_0 oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju oraz G moduł ścinania. Pręty o przekrojach pełnych mają nawet dla niewielkich wymiarów przekrojów duże współczynniki tłumienia λ ze względu na duże wartości stałych E i G , a ich najmniejsza długość (dla prętów rzeczywistych o wymiarach skończonych) potrzebna do tego, aby impulsy nie wracały do przekroju początkowego, jest bardzo duża, natomiast sprężyny śrubowe wykonane z cienkiego drutu o dużej średnicy nawinięcia mogą dać opisane wyżej efekty tłumienia już przy zupełnie realnych długościach minimalnych¹. Wprowadzając zastępczą belkę do obliczenia drgań podłużnych sprężyny według znanych metod elementarnych otrzymamy prędkość rozchodzenia się fal podłużnych a i współczynnik tłumienia λ :

$$(2.9) \quad a = \frac{2}{\pi} \frac{h}{D^2} \sqrt{\frac{C}{\rho F}},$$

$$(2.10) \quad \lambda = \frac{2}{D} \sqrt{C \rho F},$$

gdzie D jest średnicą zwinięcia sprężyny, h skokiem sprężyny, C sztywnością skrętną drutu, F polem przekroju drutu oraz ρ gęstością materiału sprężyny.

Jak widać z równań (2.9) i (2.10) zarówno prędkość fal, jak i współczynnik tłumienia łatwo zmniejszyć zwiększając średnicę nawinięcia sprężyny.

3. Rozpatrzmy teraz zadanie rozchodzenia się impulsów giętnych w belkach jednorodnych, prostoliniowych, których oś symetrii pokrywa się z dodatnią osią x . Uwzględniając wpływ bezwładności obrotowej przekrojów otrzymamy do rozpatrzenia równanie

$$(3.1) \quad \frac{EJ \partial^4 y}{\partial x^4} - J \rho \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Jak wiadomo, równanie (3.1) nie dopuszcza ogólnej postaci rozwiązania

$$(3.2) \quad y = f(x - at)$$

odpowiadającego stałej prędkości rozchodzenia się fal, a tylko pewną szczególną ich postać narzucającą warunki wymuszenia ruchu. Zbadajmy dla jakiej klasy ruchów równanie (3.1) dopuszcza rozwiązanie postaci (3.2), dla tych bowiem ruchów wystąpią szczególnie proste siły tłumienia o analogicznych własnościach do sił tłumienia lepkiego. Podstawiając (3.2) do (3.1) otrzymamy

$$(3.3) \quad (EJ - \rho J a^2) f^{IV} + \rho A a^2 f'' = 0.$$

¹ Patrz uwagi w zakończeniu p. 9.

Dwukrotne całkowanie daje

$$(3.4) \quad J(E - \rho a^2)f'' + \rho Aa^2f = c_1(x - at) + c_2.$$

Zajmiemy się tylko rozwiązaniem równania jednorodnego, gdyż całki wynikające z niejednorodności równania (3.4) odpowiadają translacji i obrotowi belki jako ciała sztywnego. Zbadamy zatem równanie:

$$(3.5) \quad J(E - \rho a^2)f'' + \rho Aa^2f = 0.$$

Rozwiązanie zależy od znaku współczynnika przy f'' , który określa przedział prędkości a rozchodzenia się fal giętnych, odpowiadających ruchom pewnego typu. Rozpatrzmy trzy przypadki

$$(3.6) \quad \begin{cases} 1. & E - \rho a^2 > 0 & \left(a^2 < \frac{E}{\rho} \right), \\ 2. & E - \rho a^2 = 0 & \left(a^2 = \frac{E}{\rho} \right), \\ 3. & E - \rho a^2 < 0 & \left(a^2 > \frac{E}{\rho} \right). \end{cases}$$

Oznaczając przez

$$(3.7) \quad \delta = \sqrt{\frac{\rho Aa^2}{J(E - \rho a^2)}}$$

możemy otrzymać ogólne rozwiązanie równania (3.5) dla przypadku pierwszego w postaci

$$(3.8) \quad f = c_1 \cos[\delta(x - at)] + c_2 \sin[\delta(x - at)].$$

Otrzymaliśmy zatem znany wynik, że dla wymuszeń harmonicznycch na końcu belki prędkość rozchodzenia się fal giętnych jest stała. Zakładając, że częstość kątowna wymuszeń jest ω , otrzymujemy równanie prędkości rozchodzenia się fal giętnych w postaci

$$(3.9) \quad \delta a = \omega.$$

Podstawiając (3.7), podnosząc obustronnie do kwadratu i porządkując według potęg a otrzymujemy równanie

$$(3.10) \quad a^4 \rho A + J \rho \omega^2 a^2 - \omega^2 EJ = 0.$$

Wyróżnik tego równania

$$(3.11) \quad \Delta = J^2 \rho^2 \omega^4 + 4 \rho AEJ$$

jest zawsze dodatni, zatem mamy dwa rozwiązania na a^2 :

$$(3.12) \quad a_{1,2}^2 = -\frac{J}{2A} \omega^2 \pm \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^2 + \frac{EJ}{\rho A} \omega^2}.$$

Oczywiście sens ma tylko pierwiastek dodatni a_1^2 , zatem

$$(3.13) \quad a_1 = \sqrt{-\frac{J}{2A}\omega^2 + \sqrt{\frac{J^2}{4A^2}\omega^4 + \frac{EJ}{\rho A}\omega^2}}.$$

Pomijając wpływ bezwładności obrotowej przekrojów otrzymujemy szczególnie prostą postać zależności (3.13):

$$(3.14) \quad a_1 = \sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho A}\omega^2};$$

łatwo sprawdzić, że obliczona prędkość rozchodzenia się fal giętnych jest zawarta w żądanym przedziale $\langle 0, \sqrt{E/\rho} \rangle$ dla wszystkich częstości drgań i że

$$(3.15) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} a_1 = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Dla granicznej wartości prędkości $a_1 = \sqrt{E/\rho}$ rozwiązania równania jednorodnego są tożsamościowo zerem. Zatem dopuszczalną klasą ruchów o stałej prędkości rozchodzenia się zaburzeń, są w tym przypadku tylko ruchy postaci

$$(3.16) \quad f = c_1 \left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \right) + c_2.$$

Rozpatrzmy teraz przypadek

$$(3.17) \quad a^2 > \frac{E}{\rho},$$

tzn. zaburzeń rozchodzących się z prędkością większą od prędkości fal podłużnych. Wtedy rozwiązaniem równania (3.5) jest funkcja

$$(3.18) \quad f = c_1 e^{-\delta(x-at)} + c_2 e^{\delta(x-at)},$$

gdzie

$$(3.19) \quad \delta = \sqrt{\frac{\rho A a^2}{J(\rho a^2 - E)}}.$$

Zatem wymuszenia muszą być dla tego przypadku wymuszeniami typu wykładniczego. Zakładając urojoną częstość kątową wymuszenia ω otrzymujemy równanie prędkości w postaci

$$(3.20) \quad \delta a = \omega$$

lub po obustronnym podniesieniu do kwadratu i uporządkowaniu względem potęg a^2

$$(3.21) \quad \rho A a^4 - J \rho \omega^2 a^2 + EJ \omega^2 = 0.$$

Wyróżnik tego równania

$$(3.22) \quad \Delta = J^2 \rho^2 \omega^4 - 4EJ\rho A\omega^2,$$

przy czym

$$(3.23) \quad \Delta \geq 0, \quad \text{gdy} \quad \omega^2 \geq 4 \frac{A}{J} \frac{E}{\rho},$$

$$(3.24) \quad \Delta < 0, \quad \text{gdy} \quad \omega^2 < 4 \frac{A}{J} \frac{E}{\rho}.$$

Przypadek $\Delta \geq 0$ dopuszcza dwa rozwiązania dodatnie dla a^2 :

$$(3.25) \quad a_{1,2}^2 = \frac{J}{2A} \omega^2 \pm \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 - \frac{EJ}{\rho A} \omega^2}.$$

Graniczne wartości dla $a_{1,2}^2$ przy $\omega \rightarrow \infty$ są następujące.

$$(3.26) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_1^2 = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_2^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Łatwo sprawdzić, że obydwie prędkości spełniają warunek

$$(3.27) \quad a_{1,2}^2 > \frac{E}{\rho}$$

przyjmując dla $\omega^2 = (4A/J)(E/\rho)$ wartości

$$(3.28) \quad a_1^2 = a_2^2 = 2 \frac{E}{\rho}.$$

Zatem przy tej samej częstotliwości urojonej wymuszenia wykładniczego na końcu belki otrzymujemy dwie różne fale wykładnicze o różnych prędkościach ruchu a_1 i a_2 .

4. Łatwo teraz obliczyć współczynniki tłumienia dla znalezionych prostych ruchów podstawowych. W przypadku ruchów okresowych harmonicznym zmiennych w czasie każdej częstotliwości wymuszenia odpowiada tylko jedna długość fali. To uniemożliwia realizację warunków brzegowych dla $x=0$. Możemy obliczyć tylko współczynniki tłumienia przy jednoczesnym działaniu siły i momentu na końcu belki obliczając dla takiego przypadku dwa współczynniki tłumienia λ_T dla siły i λ_M dla momentu. Zależności trygonometryczne (3.8) dają od razu proporcjonalność pomiędzy siłą T i prędkością postępową \dot{y} przekroju oraz pomiędzy momentem M i prędkością kątową \dot{y}' przekroju dla $x=0$. Prosty rachunek prowadzi do równań dla λ_T i λ_M w postaci

$$(4.1) \quad \lambda_T = \frac{EJ}{\omega} \delta^3,$$

$$(4.2) \quad \lambda_M = \frac{EJ}{\omega} \delta$$

lub po uwzględnieniu wzorów (3.7) i (3.12)

$$(4.3) \quad \lambda_T = \frac{EJ}{\omega} \left[\frac{\frac{\rho A}{J} \left(-\frac{J}{2A} \omega^2 + \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 + \frac{EJ}{\rho A} \omega^2} \right)}{E - \rho \left(-\frac{J}{2A} \omega^2 + \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 + \frac{EJ}{\rho A} \omega^2} \right)} \right]^{1,2}$$

$$(4.4) \quad \lambda_M = \frac{EJ}{\omega} \left[\frac{\frac{\rho A}{J} \left(-\frac{J}{2A} \omega^2 + \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 + \frac{EJ}{\rho A} \omega^2} \right)}{E - \rho \left(-\frac{2A}{J} \omega^2 + \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 + \frac{EJ}{\rho A} \omega^2} \right)} \right]^{3,2}$$

Dla wymuszeń wykładniczych mamy dla każdej częstości urojonej dwie różne fale. Potrafimy zrealizować tutaj pełne warunki brzegowe. Współczynniki tłumienia znaleziono dla czterech prostych przypadków przedstawionych poniżej:

$$(4.5.1) \quad A. \quad x=0, \quad y=0, \quad \dot{y}' \neq 0, \quad \lambda_{TA}=0, \quad \lambda_{MA} = \frac{EJ}{\omega} (\delta_1 + \delta_2),$$

$$(4.5.2) \quad B. \quad x=0, \quad y \neq 0, \quad \dot{y}'=0, \quad \lambda_{TB} = \frac{EJ}{\omega} \delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2), \quad \lambda_{MB}=0,$$

$$(4.5.3) \quad C. \quad x=0, \quad T=0, \quad M \neq 0, \quad \lambda_{MC} = \frac{EJ}{\omega} \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2},$$

$$(4.5.4) \quad D. \quad x=0, \quad T \neq 0, \quad M=0, \quad \lambda_{TD} = \frac{EJ}{\omega} \frac{\delta_1^2 \delta_2^2}{\delta_1 + \delta_2}.$$

Otrzymaliśmy zatem dla czterech podstawowych warunków ruchu współczynniki tłumienia dla siły T lub momentu M . Należy pamiętać, że stosowalność wzorów (4.5.1) - (4.5.4) jest ograniczona warunkiem (3.23), tzn. że

$$(4.6) \quad \omega^2 > 4 \frac{A}{J} \frac{E}{\rho},$$

gdzie δ_1 i δ_2 otrzymujemy z równań (3.19) i (3.25) według wzoru

$$(4.7) \quad \delta_{1,2} = \sqrt{\frac{\rho A \left(\frac{J}{2A} \omega^2 \pm \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 - \frac{EJ}{\rho A} \omega^2} \right)}{J \left[\rho \left(\frac{J}{2A} \omega^2 \pm \sqrt{\frac{J^2}{4A^2} \omega^4 - \frac{EJ}{\rho A} \omega^2} \right) - E \right]}}$$

Charakterystyczną cechą znalezionych współczynników jest ich zależność od częstości.

Posługując się zależnościami (4.5) można dla szeregu układów liniowo sprężystych o tak dobranych parametrach, aby współczynnik tłumienia był większy od krytycznego, zrealizować drgania swobodne układu

o określonych warunkach brzegowych i oczywiście przy zerowych warunkach początkowych, tzn. że całkowita energia mechaniczna belki w chwili $t=0$ jest równa zero. Dla przykładu weźmy układ przedstawiony na rys. 2, dla którego $[\dot{y}']_{x=0}=0$, a masę M uważamy za ciało sztywne. Wtedy drgania swobodne tego układu mogą być opisane szczególną całką równania drgań swobodnych z tłumieniem lepkiem:

$$(4.8) \quad M\ddot{u} + \lambda_{TB}\dot{u} + kx = 0,$$

gdy

$$(4.9) \quad \lambda_{TB} > (\lambda_{TB})_{kr}$$

i gdy warunki początkowe ruchu dla masy oscylatora są tak dobrane, że w całości ogólnej

$$(4.10) \quad u = c_1 \exp\left[\frac{1}{2M}(-\lambda_{TB} + \sqrt{\lambda_{TB}^2 - 4Mk})t\right] + \\ + c_2 \exp\left[\frac{1}{2M}(-\lambda_{TB} - \sqrt{\lambda_{TB}^2 - 4Mk})t\right],$$

$c_1 = 0$ oraz zgodnie z warunkiem (3.23)

$$(4.11) \quad (\lambda_{TB} + \sqrt{\lambda_{TB}^2 - 4Mk})^2 > 16 \frac{A}{J} \frac{E}{\rho} M^2.$$

Spełnienie warunków (4.9) i (4.12) łatwo uzyskać dobierając odpowiednio masę M .

5. Zajmiemy się teraz wyznaczeniem klasy najprostszych ruchów przy drganiach giętych belki pokrywającej się z osią x dla $x \geq 0$ uwzględniając zarówno wpływ siły tnącej jak i bezwładności obrotowej przekrojów. Zbadamy zatem rozwiązanie S. P. T i m o s z e n k i

$$(5.1) \quad EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - J \rho \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$$

w postaci

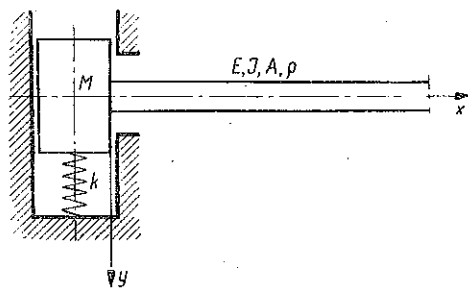
$$(5.2) \quad y = f(x - at).$$

Po podstawieniu (5.2) do (5.1) otrzymujemy następujące równanie dla funkcji f

$$(5.3) \quad f^{IV} \left[EJ - \rho J \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) a^2 + \rho^2 \frac{J}{k'G} a^4 \right] + \rho A a^2 f'' = 0,$$

a po dwukrotnym całkowaniu

$$(5.4) \quad f'' \left[EJ - \rho J \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) a^2 + \rho^2 \frac{J}{k'G} a^4 \right] + \rho A a^2 f = c_1(x - at) + c_2.$$



Rys. 2

Podobnie jak w punkcie 3 rozpatrzmy równanie jednorodne

$$(5.5) \quad f'' + \frac{\varrho A a^2}{EJ - \varrho J \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) a^2 + \varrho^2 \frac{J}{k'G} a^4} f = 0.$$

Ponieważ postać rozwiązania równania (5.5) zależy od znaku współczynnika przy f , zbadamy znak wielomianu względem a w mianowniku tego współczynnika:

$$(5.6.1) \quad M = EJ - \varrho J \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) a^2 + \varrho^2 \frac{J}{k'G} a^4;$$

wyróżnik tego trójmianu

$$(5.6.2) \quad \Delta = J^2 \varrho^2 \left(1 - \frac{E}{k'G}\right)^2$$

jest nieujemny, zatem zawsze istnieją rzeczywiste rozwiązania dla a^2 ograniczające przedział, w którym $M < 0$. Wprowadźmy bezwymiarowy parametr β :

$$(5.7) \quad \beta = \frac{E}{k'G}.$$

Wtedy

$$(5.8) \quad \Delta = J^2 \varrho^2 (1 - \beta)^2,$$

a punkty graniczne przedziału a^2 , w którym $M < 0$, są następujące:

$$(5.9) \quad a_{1,2}^2 = \frac{1 + \beta \pm |1 - \beta|}{2\beta} \frac{E}{\varrho}.$$

Ponieważ $k' < 1$ oraz $G < E$, zatem $\beta > 1$ i otrzymujemy

$$(5.10) \quad a_1^2 = \frac{1}{\beta} \frac{E}{\varrho} = \frac{k'G}{\varrho}, \quad a_2^2 = \frac{E}{\varrho}.$$

Ostatecznie więc

$$(5.11) \quad M > 0, \quad \text{gdy} \quad a^2 \in \left(0, \frac{k'G}{\varrho}\right) \text{ lub } a^2 \in \left(\frac{E}{\varrho}, \infty\right).$$

Znajdźmy rozwiązanie równania (5.5) dla $M > 0$. Otrzymamy

$$(5.12) \quad f = c_1 \sin [\delta(x - at)] + c_2 \cos [\delta(x - at)],$$

gdzie

$$(5.13) \quad \delta = a \sqrt{\frac{\varrho A}{E J \beta a^4 - \varrho J (1 + \beta) a^2 + EJ}}.$$

Zakładając wymuszenie z częstością kątową drgań ω otrzymujemy podobnie jak w p. 3 równanie prędkości w postaci

$$(5.14) \quad \delta a = \omega$$

lub po uporządkowaniu

$$(5.15) \quad a^4 \left(\frac{\rho^2}{E} J \beta - \rho A \right) - [\rho J (1 + \beta) \omega^2] a^2 + E J \omega^2 = 0.$$

Wyróżnik tego równania

$$(5.16) \quad \Delta = \rho^2 J^2 (1 - \beta)^2 \omega^4 + 4 \rho A E J \omega^2$$

jest zawsze nieujemny. Zatem istnieją dwa rozwiązania dla a i jak łatwo sprawdzić zawsze nieujemne:

$$(5.17) \quad a_{1,2}^2 = \frac{\rho J (1 + \beta) \omega^2 \pm \sqrt{\rho^2 J^2 (1 - \beta)^2 \omega^4 + 4 \rho A E J \omega^2}}{2 \left(\frac{\rho^2}{E} J \beta \omega^2 - \rho A \right)}$$

Zbadajmy własności tych pierwiastków w zależności od ω .

Obliczając granicę a_1^2 i a_2^2 przy $\omega \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$(5.18) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_1^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_2^2 = \frac{k' G}{\rho}.$$

Zbadajmy teraz a_1^2 przy malejącym ω . Mianownik we wzorze (5.17) maleje do zera przy $\omega^2 \rightarrow (E/\rho)(A/J\beta)$. Zatem

$$(5.19) \quad \lim a_1^2 = \infty,$$

$$\text{gdy} \quad \omega^2 \rightarrow \frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta} \quad \text{oraz} \quad \omega^2 > \frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta}.$$

Rzeczywiste rozwiązania dla a_1 otrzymujemy tylko dla częstości kątowych spełniających warunek

$$(5.20) \quad \frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta} \leq \omega^2 < \infty.$$

Odmienne przedstawiają się własności a_2^2 . Łatwo wykazać, że pierwiastkami licznika w równaniu (5.17) są

$$(5.21) \quad \omega^2 = 0 \quad \text{i} \quad \omega^2 = \frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta}$$

oraz że granicą a_2^2 w punkcie $\omega^2 = (E/\rho)(A/J\beta)$ ma wartość skończoną. Jednocześnie $a_2^2 > 0$ w całym przedziale częstości kątowych $\omega \in (0, \infty)$ oraz $\lim a_2^2 = 0$, gdy $\omega \rightarrow 0$.

Ostatecznie wyniki dyskusji można przedstawić w sposób następujący:

$$(5.22.1) \quad \text{gdy} \quad \omega^2 \in \left(\frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta}, \infty \right), \quad a_1^2 \in \left(\frac{E}{\rho}, \infty \right);$$

$$(5.22.2) \quad \text{gdy} \quad \omega^2 \in (0, \infty), \quad a_2^2 \in \left(0, \frac{k'G}{\rho} \right).$$

Dwie fale o różnych długościach otrzymujemy zatem tylko dla

$$(5.23) \quad \omega^2 > \frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta}.$$

Dla tego przypadku można ogólne rozwiązanie równania (5.5) napisać w postaci

$$(5.24) \quad f = C_{11} \sin(\delta_1 x - \omega t) + C_{12} \sin(\delta_2 x - \omega t) + \\ + C_{21} \cos(\delta_1 x - \omega t) + C_{22} \cos(\delta_2 x - \omega t).$$

Umożliwia to realizację warunków brzegowych dla $x = 0$, jeżeli założymy harmoniczne wymuszenia drgań na końcu belki. Weźmy teraz przypadek $M < 0$, tzn. gdy prędkość rozchodzenia się zaburzeń znajduje się w przedziale

$$(5.25) \quad \left(\frac{k'G}{\rho}, \frac{E}{\rho} \right).$$

Wtedy rozwiązanie równania (5.5) jest funkcją

$$(5.26) \quad f = c_1 e^{-\delta(x-at)} + c_2 e^{\delta(x-at)},$$

gdzie

$$(5.27) \quad \delta = a \sqrt{\frac{\rho A}{- \frac{\rho^2}{E} J \beta a^4 + \rho J (1 + \beta) a^2 - EJ}}.$$

Zakładając urojoną kątową częstość drgań ω otrzymujemy równanie częstości w postaci

$$(5.28) \quad \delta a = \omega$$

lub po uporządkowaniu względem potęg prędkości

$$(5.29) \quad \left(\rho A + \frac{\rho^2}{E} J \beta \omega^2 \right) a^4 - \rho J (1 + \beta) \omega^2 a^2 + EJ \omega^2 = 0.$$

Wyróżnik tego równania

$$(5.30) \quad \Delta = \rho^2 J^2 (1 - \beta)^2 \omega^4 - 4 \rho A E J \omega^2$$

jest dodatni, gdy

$$(5.31) \quad \omega^2 > \frac{4A}{J(1-\beta)^2} \frac{E}{\rho}.$$

Wtedy istnieją dwa pierwiastki dodatnie dla a^2 w postaci

$$(5.32) \quad a_{1,2}^2 = \frac{\rho J(1+\beta)\omega^2 \pm \sqrt{\rho^2 J^2(1-\beta)^2 \omega^4 - 4\rho A E J \omega^2}}{2 \left(\rho A + \frac{\rho^2}{E} J \beta \omega^2 \right)}$$

Gdy $\omega^2 \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$(5.33) \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} a_{1,2}^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1+\beta \pm |1-\beta|}{2\beta},$$

skąd

$$(5.34) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_1^2 = \frac{E}{\rho} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_2^2 = \frac{k'G}{\rho}.$$

Gdy $\omega^2 \rightarrow [4A'J(1-\beta)^2](E/\rho)$, otrzymujemy graniczną wspólną wartość pierwiastków zgodnie z równaniem

$$(5.35) \quad \lim a_{1,2}^2 = \frac{2}{1+\beta} \frac{E}{\rho},$$

gdy $\omega^2 \rightarrow \frac{4A}{J(1-\beta)^2} \frac{E}{\rho}$ oraz $\omega^2 > \frac{4A}{J(1-\beta)^2} \frac{E}{\rho}$.

Łatwo wykazać, że wartość ta znajduje się wewnątrz przedziału

$$(5.36) \quad \left(\frac{k'G}{\rho}, \frac{E}{\rho} \right).$$

Zatem gdy

$$(5.37) \quad \omega^2 > \frac{4A}{J(1-\beta)^2} \frac{E}{\rho},$$

rozwiązanie równania (5.5) można napisać w postaci

$$(5.38) \quad f = c_{11} e^{-(\delta_1 x - \omega t)} + c_{12} e^{-(\delta_2 x - \omega t)} + c_{21} e^{(\delta_1 x - \omega t)} + c_{22} e^{(\delta_2 x - \omega t)},$$

zamiast dla $\omega^2 = [4A/J(1-\beta)^2](E/\rho)$ mamy rozwiązanie

$$(5.39) \quad f = c_1 e^{-(\delta x - \omega t)} + c_2 e^{(\delta x - \omega t)}.$$

Dzięki istnieniu czterech stałych w rozwiązaniu (5.38) możemy (przy danym wymuszeniu wykładniczym z częstością kątową ω na końcu belki) realizować warunki brzegowe.

6. Zbadajmy przypadek drgań wymuszonych masy m połączonej z belką nieskończoną i elementami sprężystymi jak to przedstawiono na rys. 3.

Założmy, że

$$(6.1) \quad \omega^2 > \frac{E}{\rho} \frac{A}{J\beta}$$

oraz że całkowita energia mechaniczna belki w chwili początkowej jest równa zeru:

$$(6.2) \quad y = c_{11} \sin(\delta_1 x - \omega t) + c_{12} \sin(\delta_2 x - \omega t).$$

Można zatem spełnić warunek brzegowy

$$(6.3) \quad [y]_{x=0} = 0,$$

skąd

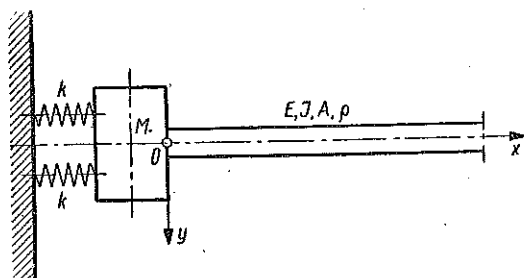
$$(6.4) \quad c_{11} + c_{12} = 0$$

i rozwiązanie dla y jest funkcją

$$(6.5) \quad y = c_{11} [\sin(\delta_1 x - \omega t) - \sin(\delta_2 x - \omega t)].$$

Obliczając moment gnący (reakcję) końca belki z równania

$$(6.6) \quad M = -EJ \left(-\frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k' \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$



Rys. 3

oraz prędkość kątową \dot{y} masy m i porównując obydwa równania otrzymujemy

$$(6.7) \quad M = -\lambda \dot{y}',$$

gdzie

$$(6.8) \quad \lambda = \frac{EJ}{\omega} k' (\delta_1 + \delta_2).$$

Wielkości δ_1 i δ_2 obliczamy z równań (5.27) i (5.32). Zatem równanie drgań wymuszonych masy m przedstawionej na rys. 3, będzie miało postać

$$(6.9) \quad J_0 \ddot{\Theta} + \frac{EJ}{\omega} k' (\delta_1 + \delta_2) \dot{\Theta} + k\Theta = M_0 \sin \omega t.$$

Przy tym w rozwiązaniu równania jednorodnego należy przyjąć stałe dowolne równe zero:

W równaniu tym J_0 oznacza bezwładność masy m względem punktu 0, k' wypadkowy współczynnik sprężystości elementów sprężystych oraz Θ chwilowy kąt obrotu.

7. Rozpatrzmy teraz wymuszone drgania giętne belki sprężystej nieskończenie długiej bez uwzględnienia wpływu bezwładności obrotowej przekrojów i siły tnącej. Założymy, że belka pokrywa się z osią x dla $x \geq 0$ i że drgania są harmoniczne. Otrzymane rozwiązania będą dostatecznie dokładne tylko dla dostatecznie małych częstości drgań. Równanie drgań belki będzie zatem

$$(7.1) \quad EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + eA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Szukać będziemy rozwiązania ogólnego dla y w postaci zespolonej

$$(7.2) \quad y(x, t) = y_0(x) e^{i\omega t},$$

odpowiadającej ruchowi kinetycznie ustalonemu.

Aby otrzymać tylko rozwiązania wymuszone, posłużymy się metodą N. E. Koczina, [8], wprowadzając fikcyjne tłumienie w belce. Założymy najprostszą postać tłumienia proporcjonalnego do prędkości drgań przekrojów. Współczynnik tłumienia fikcyjnego oznaczymy przez μ . Aby otrzymać rozwiązanie dla drgań wymuszonych belki sprężystej bez tłumienia wewnętrznego, rozwiążemy wpieryw zadanie dla belki z tłumieniem fikcyjnym i obliczymy wartość graniczną otrzymanego rozwiązania przy $\mu \rightarrow 0$.

Równanie drgań uwzględniające nasze fikcyjne tłumienie w belce będzie następujące:

$$(7.3) \quad EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Podstawiając (7.2) otrzymamy równanie dla y_0 w postaci

$$(7.4) \quad EJ y_0^{IV} + (\mu i \omega - \rho A \omega^2) y_0 = 0.$$

Szukać będziemy rozwiązania wykładniczego

$$(7.5) \quad y_0 = c e^{rx};$$

otrzymamy następujące równanie charakterystyczne:

$$(7.6) \quad r^4 = \frac{\rho A}{EJ} \omega^2 - \frac{\mu \omega}{EJ} i.$$

Do wyznaczenia pierwiastków równania charakterystycznego posłużymy się łatwymi do wprowadzenia równaniami

$$(7.7) \quad (c + di)^{1,2} = \begin{cases} \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(c + \sqrt{d^2 + d^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 + d^2})} \right] \\ \quad (d \geq 0), \\ \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(c + \sqrt{c^2 + d^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 + d^2})} \right] \\ \quad (d \leq 0), \end{cases}$$

gdzie c i d są liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązując równania (7.6) względem r^2 otrzymujemy

$$(7.8) \quad (r^2)_{1,2} = \pm \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{\mu \omega}{EJ} \right)^2 + \left(\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 \right)^2} \right]} - \right. \\ \left. - i \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{\mu \omega}{EJ} \right)^2 + \left(\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 \right)^2} \right]} \right\}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(7.9.1) \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{\mu \omega}{EJ} \right)^2 + \left(\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 \right)^2} \right]},$$

$$(7.9.2) \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{\mu \omega}{EJ} \right)^2 + \left(\frac{\rho A}{EJ} \omega^2 \right)^2} \right]},$$

łatwo wykazać, że

$$(7.10) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EJ}}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \beta = 0.$$

Mamy zatem przy oznaczeniach (7.9)

$$(7.11) \quad (r^2)_{1,2} = \pm (\alpha - i\beta),$$

skąd po powtórnym zastosowaniu wzorów (7.7) otrzymujemy rozwiązanie dla r w postaci

$$(7.12.1) \quad r_{1,2} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \right],$$

$$(7.12.2) \quad r_{3,4} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \right].$$

Oznaczając przez

$$(7.13.1) \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})},$$

$$(7.13.2) \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})},$$

otrzymujemy ostatecznie

$$(7.14) \quad r_1 = \delta - i\gamma, \quad r_2 = -\delta + i\gamma, \quad r_3 = \gamma + i\delta, \quad r_4 = -\gamma - i\delta.$$

Łatwo wykazać, że

$$(7.15) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \gamma = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \delta = \delta_0 = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EJ} \omega^2}.$$

Wykorzystując rozwiązania (7.14) równania charakterystycznego napiszemy ogólne rozwiązanie równania (7.4) w postaci

$$(7.16) \quad y_0(x) = c_1 e^{(\delta - i\gamma)x} + c_2 e^{(-\delta + i\gamma)x} + c_3 e^{(\gamma + i\delta)x} + c_4 e^{(-\gamma - i\delta)x}.$$

Ponieważ rozważamy drgania wymuszone belki pokrywającej się z pół prostą dla $x \geq 0$ z wymuszeniem drgań w punkcie $x = 0$ ruch belki dla $x \rightarrow \infty$ musi całkowicie zaniknąć. Zatem

$$(7.17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_0 = 0,$$

skąd od razu

$$(7.18) \quad c_1 = c_3 = 0.$$

Ostatecznie rozwiązaniem równania (7.4), uwzględniającym warunki brzegowe dla $x \rightarrow \infty$, jest funkcja

$$(7.19) \quad y_0(x) = c_2 e^{(-\delta + i\gamma)x} + c_4 e^{(-\gamma - i\delta)x}.$$

Łatwo obliczyć teraz rozwiązanie graniczne dla $\mu \rightarrow 0$. Posługując się równaniami (7.15) otrzymujemy

$$(7.20) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} y_0(x) = c_2 e^{-\delta_0 x} + c_4 e^{-i\delta_0 x} \equiv \bar{y}_0(x).$$

Rozwiązanie rzeczywiste $y(x, t)$ równania (7.1) otrzymamy z równań

$$(7.21) \quad y(x, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \bar{y}_0(x)]$$

dla wymuszenia proporcjonalnego do $\cos \omega t$ oraz

$$(7.22) \quad y(x, t) = \operatorname{Im} [e^{i\omega t} \bar{y}_0(x)]$$

dla wymuszenia proporcjonalnego do $\sin \omega t$.

8. Rozpatrzmy teraz przykład rozwiązania równania (7.1) dla drgań wymuszonych kinematycznie z warunkami brzegowymi jak na rys. 2. Wykażemy, że dla takiej belki istnieje przesunięcie fazowe pomiędzy drganiami wymuszonymi końca belki i siłą reakcji belki dla $x = 0$, co warunkuje istnienie niezachowawczych sił tłumienia. Rozwiążemy zadania ogólnie przy $\mu \neq 0$, co umożliwi zbadanie wpływu tłumienia wewnętrznego na tłumienie falami naprężeń, jednakże szczegółową dyskusję tego zagadnienia przedstawimy w następnej pracy.

Z warunku brzegowego dla $x = 0$

$$(8.1) \quad y'_0 = 0$$

otrzymujemy

$$(8.2) \quad c_2 = -i c_4,$$

zatem

$$(8.3) \quad y_0(x) = c_4 [-i e^{(-\delta + i\gamma)x} + e^{-(\gamma + i\delta)x}].$$

Przyjmując wymuszenie kinematyczne drgań na końcu belki w postaci

$$(8.4) \quad y_0 = B e^{i\omega t},$$

gdzie B jest liczbą rzeczywistą, otrzymujemy

$$(8.5) \quad c_4 = \frac{B}{2} (1 + i).$$

Stąd według (8.3)

$$(8.6) \quad y_0(x) = \frac{B}{2}(1+i)[-ie^{(-\delta+i\gamma)x} + e^{-(\gamma+i\delta)x}].$$

Znajdując rozwiązanie graniczne dla $\mu \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$(8.7) \quad \bar{y}_0(x) = \frac{B}{2}(1+i)[-ie^{-\delta_0 x} + e^{-i\delta_0 x}].$$

Obliczmy siłę tnącą (reakcję) na końcu belki, tzn. dla $x=0$ i wymuszenia proporcjonalnego do $\sin \omega t$.

Posługując się równaniami (7.22) i (8.7) otrzymujemy

$$(8.8) \quad T = [-EJy''']_{x=0} = Jm [B\delta_0^3(i-1)e^{i\omega t}] EJ$$

lub po wykonaniu działań

$$(8.9) \quad T = BEJ\delta_0^3(\sin \omega t - \cos \omega t).$$

Łatwo dokonać następującego przekształcenia:

$$(8.10) \quad T = \left[\frac{EJ}{\omega} \delta_0^3 \dot{y} \right]_{x=0} - \left[\frac{EJ}{\omega^2} \delta_0^3 \ddot{y} \right]_{x=0},$$

skąd współczynnik tłumienia

$$(8.11) \quad \lambda = (EJ)^{1/4} (\rho A)^{3/4} \sqrt{\omega},$$

a zredukowana masa pręta

$$(8.12) \quad \kappa = (EJ)^{1/4} (\rho A)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Zatem równanie drgań wymuszonych masy połączonej z belką sprężystą nieskończenie długą według schematu na rys. 2 można napisać w postaci

$$(8.13) \quad \left[M + (EJ)^{1/4} (\rho A)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right] \ddot{u} + (EJ)^{1/4} (\rho A)^{3/4} \sqrt{\omega} \dot{u} + ku = P_0 \sin \omega t.$$

Bardzo interesującą rzeczą jest zależność masy zredukowanej i współczynnika tłumienia od częstości. Otóż zależą one od częstości według tego samego prawa co masa zredukowana i współczynnik tłumienia dla pewnego przypadku drgań ciała sztywnego w cieczy lepkiej, [17].

9. Wykazaliśmy zatem, że w belkach sprężystych nieskończonych, w których nie ma tłumienia wewnętrznego, wystąpią ciekawe efekty tłumienia falami naprężeń. Podczas drgań takich belek pojawiają się siły niezachowawcze, siły tłumienia i siły zachowawcze bezwładności (8.10), przy czym siły tłumienia mają charakter sił tłumienia tarcielem lepkiem.

Zarówno współczynniki tłumienia (4.1), (4.5), (6.8) i (8.11), jak i masa zredukowana są funkcjami częstości kątowej drgań podobnie jak w przypadku drgań ciał sztywnych i sprężystych w cieczy idealnej, [7], [8] i [17]. Jednakże tego rodzaju zjawiska mogą wystąpić również w belkach o wymiarach skończonych, w których tłumienie wewnętrzne niemal całkowicie gasi fale naprężeń wymuszone drganiami i uniemożliwia ich powrót (po odbiciu) do miejsca wymuszenia. Jeżeli to tłumienie jest dostatecznie małe, to można się spodziewać, że od pewnych minimalnych wymiarów rozważanego układu począwszy, można obliczać drgania mas połączonych z różnymi układami sprężystymi (jak np. drgania mas wiszących na linie i połączonej z wysięgnikiem dźwigowym, drgania silnika okrętowego połączonego z kadłubem statku, drgania maszyn na fundamentach itp.) nie wnikając w mechanizm tłumienia wewnętrznego a posługując się tylko współczynnikami tłumienia i mas zredukowanych, zależnymi wyłącznie od stałych charakteryzujących własności sprężyste materiału i wielkości geometryczne układu.

Szereg rozwiązań z zakresu drgań belek, płyt i kadłuba statku oraz półpłaszczyzny i półprzestrzeni sprężystej z uwzględnieniem niejednorodności i anizotropii materiału, w których dla różnych praw tłumienia wewnętrznego obliczać się będzie wymiary minimalne układu i szacować zależność współczynników tłumienia i mas zredukowanych od praw i wielkości tłumienia wewnętrznego podamy w następnych pracach.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. A. Anderson, *Wave Groups in Flexural Motion of Beams Predicted by Timoshenko Theory*, Journ. Appl. Mech. 4 (1954).
- [2] R. A. Anderson, *The Wave Method for Solving Flexural Vibration Problems*, Journ. Appl. Mech. 4 (1954).
- [3] B. A. Boley, C. C. Chao, *Some Solutions of the Timoshenko Beam Equations*, Journ. Appl. Mech. 5 (1955).
- [4] C. Chree, Trans. Camb. Phil. Soc., 14, 1889, 250.
- [5] C. Chree, Quart. Journ. Pure Appl. Math., 23, 1899, 335.
- [6] M. Goland, P. D. Wickersham, M. A. Dengler, *Propagation of the Elastic Impact in Beams in Bending*, Journ. Appl. Mech. 1 (1955).
- [7] Н. Е. Кочин, *Плоская задача об установившемся колебании тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости*, Соб. соч., 2, Moskwa 1949.
- [8] Н. Е. Кочин, *Теория волн, вынуждаемых колебаниями тела под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости*, Соб. соч., 2, Moskwa 1949.
- [9] H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, Oxford 1953.
- [10] J. Miklowitz, *Propagation of Compressional Waves in Dispersive Elastic Rod*, Journ. Appl. Mech. 2 (1957).
- [11] L. Pochhammer, Journ. angew. Math., 81, 1876, s. 324.
- [12] Rayleigh Lord (J. W. Strett), *Theory of Sound*.
- [13] F. O. Ringleb, *Motion and Stress of an Elastic Cable Due to Impact*, Journ. Appl. Mech. 3 (1957).

- [14] A. Ripperberger, H. Abramson Norman, *A Study of the Propagation of Flexural Waves in Elastic Beams*, Journ. Appl. Mech. 3 (1957).
- [15] R. Skalak, *Longitudinal Impact of a Semi-Infinite Circular Elastic Bar*, Journ. Appl. Mech. 1 (1957).
- [16] S. P. Timoshenko, *Phil. Mag.* 41 (1921), 744.
- [17] J. Więckowski, *Równania drgań giętnych kadłuba statku* [Equations of Flexural Vibration of a Ship Hull], Warszawa 1957.

Резюме

ДЕМПФИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГИХ БАЛКАХ

В работе указывается на некоторую аналогию явлений колебаний в упругих средах в жидкостях. Для целого ряда вынужденных колебаний бесконечных упругих балок определяются силы реакции этих балок. Показано, что для ряда случаев гармонических или показательных колебаний во времени, эти силы имеют характер сил вязкого трения с коэффициентом демпфирования, зависящим от частоты и с постоянными, характеризующими упругие свойства и геометрию балок. Определяется также для некоторого простого случая вынужденных колебаний редуцированную массу бесконечной балки в зависимости от вышеупомянутых постоянных. Полученные результаты иллюстрируются простыми примерами колебаний гармонического осциллятора, соединенного с бесконечной упругой балкой.

Summary

STRESS DAMPING IN ELASTIC BEAMS BY MEANS OF WAVES

An analogy is indicated between vibrations in elastic bodies and in liquids. In a number of cases of forced vibration of infinite elastic beams, reaction forces of these beams are found. It is pointed out that for a series of cases of harmonic or exponential vibrations, these forces have the form of viscous friction forces with the coefficient of damping depending on the frequency and the constants characterizing the elastic properties and the geometry of the beam. For a certain simple case of forced vibration, the reduced mass of an infinite beam is determined in function of the above constants. The results obtained are illustrated by simple examples of vibration of a harmonic oscillator connected with an infinite elastic beam.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 listopada 1957 r.