

ZBIGNIEW OLESIAK

ZASTOSOWANIE SZEREGÓW TRYGNOMETRYCZNYCH
DO OBLICZANIA ZAMKNIĘTYCH POWŁOK WALCOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

C

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	267
2. Rura o skończonej długości swobodnie podparta na dwu obwodach w odległości l	267
3. Rura utwierdzona na dwu obwodach	271
4. Inne przypadki podparcia powłoki	275
5. Zmiany grubości i promienia rury	277

1. Wstęp. Równanie różniczkowe zamkniętych powłok walcowych obciążonych kołowo symetrycznie i jego rozwiązania dla różnych przypadków obciążeń rur jest znane i przeszło już dość dawno do literatury podręcznikowej, [2]. Również znane są rozwiązania przypadków rur o skończonej długości, obciążonych np. ciśnieniem wewnętrznym i podpartych na obu brzegach lub zamocowanych zupełnie. Praca niniejsza zajmuje się zastosowaniem szeregów trygonometrycznych do pewnych przypadków rur zamocowanych lub podpartych na dwu lub więcej obwodach i poddanych w zasadzie dowolnemu obciążeniu kołowo symetrycznemu.

Jeśli chodzi o podobne równanie różniczkowe belek na sprężystym podłożu, metoda szeregów trygonometrycznych została zastosowana przez W. Nowackiego, [1].

Równanie różniczkowe zamkniętej powłoki walcowej obciążonej kołowo symetrycznie przyjmuje postać

$$(1.1) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{D},$$

gdzie w oznacza ugięcie promieniowe powłoki, q jej obciążenie, a promień rury, h grubość ścianki rury, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ płytową sztywność zginania oraz gdzie $\beta^4 = 3(1 - \nu^2)/a^2 h^3 = Eh/4a^2 D$.

2. Rura o skończonej długości swobodnie podparta na dwu obwodach w odległości l . Przyjmujemy, że obciążenie rury możemy przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego

$$(2.1) \quad q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Rozwiązania równania różniczkowego (1.1) poszukujemy w postaci następującego szeregu

$$(2.2) \quad w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Różniczkując (2.2) i wstawiając (2.1) i (2.2) do równania różniczkowego (1.1) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 + 4\beta^4 \right] - \frac{q_n}{D} \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Ponieważ związek ten zachodzi dla każdego x , możemy wyznaczyć współczynniki

$$(2.3) \quad A_n = \frac{q}{D \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 + 4\beta^4 \right]} = \frac{q_n}{\Delta_n}.$$

A więc ugięcie przedstawić można za pomocą szeregu

$$(2.4) \quad w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Rozwiązanie to, jak łatwo można się przekonać, spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia, mianowicie

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w''(0) = w''(l) = 0.$$

Poniżej wyznaczmy współczynniki q_n dla kilku typów obciążeń. Dążymy do wyznaczenia linii wpływowej ugięcia powłoki. Wtedy ugięcie pod dowolnym obciążeniem jest całką linii wpływowej pomnożonej przez to obciążenie.

Rozważmy przypadek, gdy $q = \text{const}$ na odcinku 2ε . Wtedy

$$q(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < e - \varepsilon,$$

$$q(x) = q \quad \text{dla} \quad e - \varepsilon \leq x \leq e + \varepsilon,$$

$$q(x) = 0 \quad \text{dla} \quad e + \varepsilon < x \leq l.$$

Współczynniki rozwinięcia funkcji $q(x)$ na szereg Fouriera są następujące:

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

W naszym przypadku mamy

$$q_n = \frac{2q}{l} \int_{e-\varepsilon}^{e+\varepsilon} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4q}{\pi n} \sin \frac{n\pi e}{l} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l}.$$

Ugięcie rury otrzymamy wstawiając powyższe wyrażenie do (2.4):

$$(2.5) \quad w(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n n} \sin \frac{n\pi e}{l} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Jeżeli we wzorze (2.5) przyjmiemy, że $\varepsilon = e = l/2$, to otrzymamy ugięcie pod działaniem jednostajnego obciążenia na całej długości. Wtedy $q_n = 4q/\pi n$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) i mamy

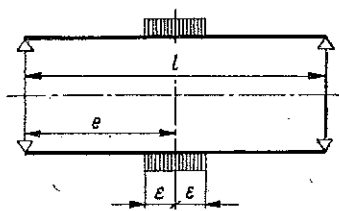
$$(2.6) \quad w(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4ql^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^5 + \frac{12(1-\nu^2)l^4}{a^2 h^2 \pi^4} n}$$

Przyjmijmy obecnie, że na rurę działa obwodowa siła P w odległości e od podpory lewej. Wtedy

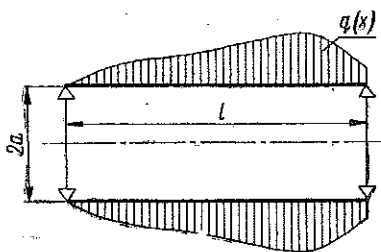
$$P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2q\varepsilon,$$

oraz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l \frac{\sin \frac{n\pi\varepsilon}{l}}{n\pi\varepsilon} = 1, \quad q_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi\varepsilon}{l}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Tak więc w przypadku siły obwodowej wzór na ugięcie w przekroju x ma postać

$$(2.7) \quad w(x) = \frac{2P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi\varepsilon}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

O ile we wzorze (2.7) przyjmijmy $P = 1$, otrzymamy linię wpływową ugięcia rury. Ugięcie w przekroju x pod działaniem dowolnego obciążenia kołowo symetrycznego napiszemy całkując linię wpływową pomnożoną przez obciążenie:

$$(2.8) \quad w(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l q(e) \sin \frac{n\pi e}{l} de.$$

Wyznamy jeszcze ugięcie spowodowane momentem działającym na obwodzie odległym o e od podpory lewej. Moment skupiony możemy wyrazić jako parę sił działających na ramieniu ε :

$$M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\varepsilon.$$

Wobec tego linię ugięcia pod działaniem obwodowego momentu otrzymamy różniczkując (2.7) względem e :

$$(2.9) \quad w(x) = \frac{2M\pi}{l^2} \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} \cos \frac{n\pi e}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

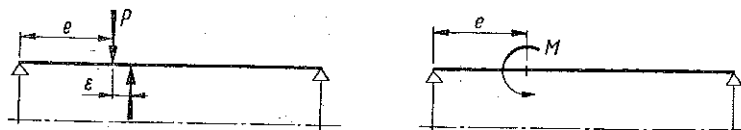
Obliczmy obecnie ugięcie, gdy $q(e) = \text{const}$. Po scałkowaniu funkcji określającej linię wpływową (2.8) mamy

$$w(x) = \frac{2q}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} (1 - \cos n\pi),$$

czyli

$$w(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{l}{\Delta_n n} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

zgodnie ze wzorem (2.6).



Rys. 3

Maksymalne ugięcie dostajemy dla $x = l/2$:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{D\pi^5} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5 + \frac{12(1-\nu^2)l^4}{a^2 h^2 \pi^4} n}.$$

Ponieważ szereg jest szybkozbieżny, możemy uwzględnić tylko pierwszy jego wyraz i wtedy

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{D\pi^5} \frac{1}{\left(1 + \frac{12(1-\nu^2)l^4}{a^2 h^2 \pi^4}\right)}.$$

W przypadku, gdy promień powłoki zmierza do nieskończoności ($a \rightarrow \infty$), mamy do czynienia z ugięciem walcowym nieograniczonego pasma płytowego o szerokości l , na które działa obciążenie ciągłe $q = \text{const}$:

$$w(x) = \frac{4ql^4}{D\pi^5} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Ugięcie maksymalne otrzymujemy dla $x = l/2$:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{D\pi^5} = \frac{5ql^4}{384D} 1,0039,$$

czyli uwzględniając tylko pierwszy wyraz szeregu błąd w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym nie przekracza 0,4%.

Inne wielkości statyczne wyznaczmy ze znanych wzorów:

$$(2.10) \quad M_\varphi = \nu M_x, \quad M_x = -D \frac{d^3 w}{dx^2}, \quad T_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3},$$

a więc różniczkując (2.8) znajdziemy

$$(2.11) \quad \begin{cases} M_x = \frac{2D\pi^2}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l q(e) \sin \frac{n\pi e}{l} de, \\ T_x = \frac{2D\pi^3}{l^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l q(e) \sin \frac{n\pi e}{l} de. \end{cases}$$

Dla obciążenia $q = \text{const}$ mamy

$$M_x = \frac{4q\pi D}{l^3} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3 + \frac{12(1-\nu^2)l^2}{a^2 h^2 n}}$$

$$T_x = \frac{4q\pi^2 D}{l^3} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{n^2}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4ql}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + \frac{12(1-\nu^2)l^2}{a^2 h^2 n}}$$

Szeregi te są wolniej zbieżne od szeregów, które przedstawiają ugięcie i przy obliczaniu nie można brać pod uwagę tylko pierwszego wyrazu szeregu, lecz kilka jego wyrazów.

3. Rura utwierdzona na dwu obwodach. Przypuśćmy, że mamy rozwiązać zagadnienie rury o długości l utwierdzonej na brzegach. Przyjmujemy wpraw, że mamy utwierdzenie tylko na jednym obwodzie $x = 0$, wtedy musi być spełniony warunek $w'(0) = 0$. Powłokę utwierdzoną na brzegu traktujemy jako swobodnie podpartą i obciążoną momentem obwodowym na utwierdzonym obwodzie. Następnie nie znany moment obliczamy z warunku brzegowego. Wykorzystując (2.4) i (2.9) znajdziemy

$$(3.1) \quad w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2M_A \pi}{l^2} \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Nie znany moment utwierdzenia wyznaczamy z warunku brzegowego dla $x=0$:

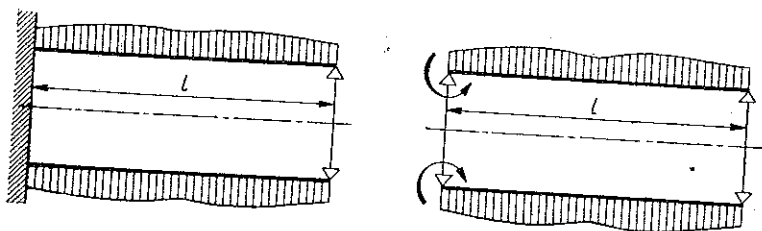
$$\sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} n + \frac{2M_A \pi}{l^2} \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{\Delta_n} = 0.$$

Stąd

$$(3.2) \quad M_A = - \frac{l^2 \sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} n}{2\pi \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{\Delta_n}}.$$

Wstawiamy (3.2) do (3.1) i otrzymujemy ugięcie rury

$$(3.3) \quad w(x) = \sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{\sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} n}{\sum_1^{\infty} \frac{n^3}{\Delta_n}} \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$



Rys. 4

Powłokę utwierdzoną na obu brzegach traktować możemy jako podpartą i obciążoną momentami rozłożonymi na obu obwodach. Spełnione są wtedy następujące warunki brzegowe:

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w'(0) = w'(l) = 0.$$

Ugięcie przedstawia się wzorem

$$(3.4) \quad w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2}{l^2} M_A \pi \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2}{l^2} M_B \pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Delta_n} n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Momenty utwierdzenia wyznaczmy z warunków brzegowych. Otrzymujemy układ dwu równań o dwu niewiadomych:

$$(3.5) \begin{cases} \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} q_n + \frac{2}{l^2} M_A \pi \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n} + \frac{2}{l^2} M_B \pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Delta_n} n^2 = 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} (-1)^n n + \frac{2}{l^2} M_A \pi \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n} (-1)^n + \frac{2}{l^2} M_B \pi \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n} = 0; \end{cases}$$

stąd po rozwiązaniu znajdziemy

$$M_A = \frac{l^2}{2\pi} \frac{\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{q_n n}{\Delta_n} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\Delta_n} - \sum_1^{\infty} \frac{q_n n}{\Delta_n} \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n}}{\left(\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n}\right)^2 - \left(\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\Delta_n}\right)^2},$$

$$M_B = \frac{l^2}{2\pi} \frac{\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\Delta_n} \sum_1^{\infty} n \frac{q_n}{\Delta_n} - \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{q_n}{\Delta_n} n}{\left(\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n}\right)^2 - \left(\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\Delta_n}\right)^2}.$$

Znaczne uproszczenie otrzymujemy dla obciążenia q symetrycznego względem płaszczyzny $x=l/2$. Wtedy $M_A=M_B$ i ugięcie przyjmuje postać

$$(3.6) \quad w(x) = \sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2}{l^2} M \pi \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} - \\ - \frac{2}{l^2} M \pi \sum_1^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} (-1)^n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

czyli

$$w(x) = \sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{4}{l^2} M \pi \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Z warunku $w'(0)=0$ znajdziemy

$$(3.7) \quad M = - \frac{l^2}{4\pi} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} n}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n}};$$

ten sam wynik otrzymamy z równania (3.5) przyjmując, że n przebiega tylko wskaźniki nieparzyste (warunek symetrii).

Weźmy jako przykład rurę obciążoną siłą P w odległości $l/2$ od utwierdzonego obwodu. Wtedy

$$q_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{2P}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

oraz moment

$$(3.8) \quad M = -\frac{Pl}{2\pi} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n}{\Delta_n}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n}}$$

W przypadku obciążenia $q = \text{const}$ mamy

$$q_n = \frac{4q}{\pi n} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

oraz moment utwierdzenia

$$(3.9) \quad M = -\frac{ql^2}{\pi^2} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{\Delta_n}}$$

Przypuśćmy, że promień rury wzrasta nieograniczenie, wtedy $a \rightarrow \infty$, $\Delta_n \rightarrow D(n\pi/l)^4$ i otrzymujemy rozwiązanie dla nieograniczonego pasma płytowego o szerokości l utwierdzonego na obu brzegach. Wyznamy momenty utwierdzenia dla obciążenia siłami wzdłuż linii o odciętej $x = l/2$:

$$M = -\frac{Pl}{2\pi} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^3}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = -\frac{Pl}{8}$$

W przypadku obciążenia ciągłego $q = \text{const}$

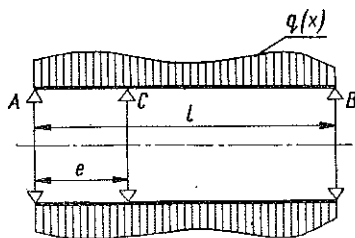
$$M = -\frac{ql}{\pi^2} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = -\frac{ql^2}{12}$$

4. Inne przypadki podparcia powłoki. Niech będzie dana powłoka obciążona dowolnie i podparta swobodnie na brzegach oraz na obwodzie odległym o e od brzegu. Ugięcie złożymy z ugięcia rury podpartej na brzegach, poddanej obciążeniu zewnętrznemu $q(x)$ oraz z ugięcia wywołanego reakcjami podpory R , traktowanymi jako siły zewnętrzne działające na obwodzie e :

$$(4.1) \quad w = w_q + w_R.$$

Wstawiamy do (4.1) wyrażenia (2.4) i (2.7). Wtedy

$$w = \sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{2R}{l} \sum_1^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi e}{l}}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$



Rys. 5

Z warunku wymagającego, żeby na podporze ugięcie równało się zeru, otrzymujemy

$$\sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi e}{l} - \frac{2R}{l} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi e}{l}}{\Delta_n} = 0,$$

skąd

$$(4.2) \quad R = \frac{l}{2} \frac{\sum_1^{\infty} \frac{q_n}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi e}{l}}{\sum_1^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sin^2 \frac{n\pi e}{l}}.$$

Gdy $e = l/2$ oraz $q = \text{const}$, to

$$R = \frac{2lq}{\pi} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\Delta_n}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n}}.$$

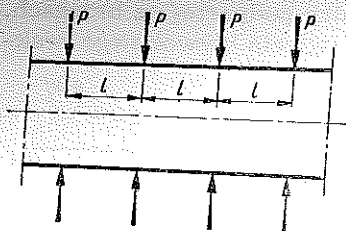
Dla pasma płytowego z podporą liniową wzdłuż w odległości $l/2$

$$R = \frac{2lq}{\pi} \frac{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4}}.$$

W przypadku $q = \text{const}$ ugięcie rury przedstawia wzór

$$(4.3) \quad w(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[\frac{1}{n} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\Delta_k}}{\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\Delta_k}} \right].$$

Rozpatrzmy rurę bardzo długą obciążoną siłami działającymi na wielu obwodach w równej odległości l . Takie obciążenie rozwinąć możemy



Rys. 6

w szereg kosinusowy

$$(4.4) \quad q(x) = \frac{2P}{l} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2m\pi x}{l} \right).$$

Poszukiwać będziemy ugięcia w postaci

$$(4.5) \quad w(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \frac{2m\pi x}{l}.$$

Szereg ten wstawiamy do równania różniczkowego (1.1)

$$\begin{aligned} \sum_m \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^4 A_m \cos \frac{2m\pi x}{l} + 4\beta^4 \left[A_0 + \sum_m A_m \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] = \\ = \frac{2P}{lD} \left(\frac{1}{2} + \sum_m \cos \frac{2m\pi x}{l} \right). \end{aligned}$$

Z porównania otrzymujemy

$$A_0 = \frac{P}{4\beta^4 D l},$$

a dla $m \geq 1$

$$A_m = \frac{2P}{lD \left[\left(\frac{2m\pi}{l} \right)^4 + 4\beta^4 \right]} = \frac{2P}{l \Delta_m}.$$

Po podstawieniu do (4.5) znajdziemy

$$(4.6) \quad w(x) = \frac{P}{4D\beta^4 l} + \frac{2P}{l} \sum_{1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\Delta_m} \cos \frac{2\pi m x}{l}.$$

Rozwiązanie to spełnia warunki geometryczne zadania: dla $x=0$, $x=\pm l/2$ mamy $w'(x)=0$.

Po przesunięciu układu współrzędnych o e w lewo znajdziemy

$$w(x) = \frac{P}{4D\beta^4 l} + \frac{2P}{l} \sum_{1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{\Delta_m} \cos \frac{2\pi m(x-e)}{l}.$$

Przypuśćmy, że oprócz sił P działają przeciwnie skierowane siły R w odległości również l . Otrzymujemy wtedy ugięcie

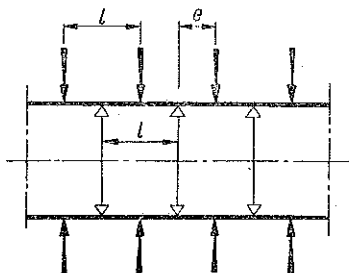
$$(4.7) \quad w(x) = \frac{P-R}{4D\beta^4 l} + \frac{2P}{l} \sum_m \frac{1}{\Delta_m} \cos \frac{2\pi m(x-e)}{l} - \frac{2R}{l} \sum_m \frac{1}{\Delta_m} \cos \frac{2\pi m x}{l}.$$

Niech ugięcie pod siłą R równa się zero; stąd

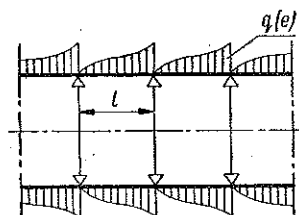
$$(4.8) \quad R = P \frac{\frac{1}{4D\beta^4} + 2 \sum_m \frac{1}{\Delta_m} \cos \frac{2\pi m e}{l}}{\frac{1}{4D\beta^4} + 2 \sum_m \frac{1}{\Delta_m}}$$

Otrzymaliśmy tutaj wartość reakcji w przypadku, gdy rura bardzo długa obciążona jest siłami obwodowymi w odstępach l . Jeżeli przyjmiemy, że $P=1$ i otrzymaną linię wpływową pomnożymy przez obciążenie oraz scałkujemy, to otrzymamy reakcję na podporach, gdy działa dowolne obciążenie:

$$R = \int_0^l \frac{\frac{1}{4D\beta^4} + 2 \sum_m \frac{1}{\Delta_m} \cos \frac{2\pi m e}{l}}{\frac{1}{4D\beta^4} + 2 \sum_m \frac{1}{\Delta_m}} q(e) de.$$



Rys. 7



Rys. 8

Znając wartość reakcji z łatwością wyznaczamy ugięcie ze wzoru (2.4) traktując R jako obciążenie, a następnie obliczamy wielkości statyczne (2.10).

5. Zmiany grubości i promienia rury. Równanie (1.1) możemy wykorzystać również w przypadku rury o zmiennej grubości lub o stałej grubości, a zmiennym promieniu albo zmiennej zarówno grubości jak i promieniu. Zmiana zarówno promienia powłoki jak i jej grubości nie może być jednak znaczna, gdyż przy dużych zmianach wyniki byłyby mało dokładne. Powodem tego jest fakt, że równanie różniczkowe zostało wyprowadzone przy założeniu stałej grubości i promienia rury. Równanie (1.1) przyjmie postać

$$(5.1) \quad \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\beta^4(x)w(x) = \frac{q(x)}{D(x)}$$

Tutaj współczynniki β i D zależą od x . W przypadku, gdy zmienny jest tylko promień, współczynnik D jest stały. Natomiast zarówno w przypadku zmieniającej się grubości jak i promienia zmienne są D i β .

Równanie (5.1) przepiszemy w postaci

$$(5.2) \quad \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{D(x)} - 4\beta^4(x)w(x) = \frac{z(x)}{D(x)}.$$

Przypuśćmy, że powłoka jest podparta na obu brzegach. Prawą stronę równania potraktujemy jako obciążenie działające na pasmo płytowe swobodnie podparte o rozpiętości l . O ile $D(x) = \text{const}$, otrzymujemy ugięcie pasma płytowego

$$(5.3) \quad w(x) = \int_0^l \bar{w}(x, e) z(e) de,$$

gdzie

$$\bar{w}(x, e) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi e}{l}}{D \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

jest linią wpływową ugięcia pasma płytowego swobodnie podpartego. Wstawiając $z(e)$ ze wzoru (5.2) do (5.3) otrzymujemy

$$(5.4) \quad w(x) = \int_0^l \bar{w}(x, e) q(e) de - 4 D \int_0^l \bar{w}(x, e) w(e) \beta^4(e) de.$$

Powyższe równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju możemy rozwiązać w sposób przybliżony. Możemy również poszukiwać rozwiązania w postaci szeregu sinusowego

$$(5.5) \quad w(x) = \sum_k A_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Otrzymujemy nieskończony układ równań, z którego wyznaczamy nieznane współczynniki A_n . Mianowicie wstawiamy (5.4) i (5.3) do (5.5):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} &= \frac{2l^3}{\pi^4 D} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi e}{l} q(e) de - \\ &- 8 \frac{l^3}{\pi^4} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi e}{l} \beta^4(e) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi e}{l} de. \end{aligned}$$

Вprowadźmy następujące oznaczenia

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi e}{l} q(e) de = a_n, \quad \int_0^l \sin \frac{n\pi e}{l} \sin \frac{k\pi e}{l} \beta^4(e) de = b_{nk}.$$

Wtedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{2l^3}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \frac{a_n}{n} - \frac{8l^3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sum_{k=1}^{\infty} A_k b_{nk}.$$

Zamieniamy wskaźniki sumowania i otrzymujemy nieskończony układ równań

$$A_k = \frac{2l^3 a_k}{\pi^4 D k^4} - \frac{8l^3}{\pi^4 k^4} \sum_n A_n b_{nk} \quad (n, k = 1, 2, \dots).$$

Rozwiązanie powyższego układu równań (w praktyce rozwiązanie układu kilku równań $n, k = 1, 2, \dots$) wyznacza współczynniki A_k i co za tym idzie ugięcie rury oraz momenty gnące i siły poprzeczne:

$$w(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Rozwiązanie dla powłoki o zmiennej grubości otrzymujemy w podobny sposób, lecz musimy wpieryw znać ugięcie pasma płytowego o szerokości l i zmiennej grubości.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Nowacki, *Mechanika budowli*, t. 2, PWN, Warszawa 1955.
 [2] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York, Londyn 1940.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ К РАСЧЕТАМ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается применение широко распространенного метода тригонометрических рядов к расчету цилиндрических оболочек небольшой толщины. Даются решения трубы конечной длины, опертой или защемленной на краях и находящейся под действием произвольных нагрузок, симметричных по отношению к оси трубы. Приводится также решение задачи трубы, опертой на трех окружностях и трубы очень большой длины, опертой на многих окружностях, находящихся на расстоянии l и нагруженной периодически. Формулы, данные для труб, применяются также в случае пластинчатой полосы,

в случае, когда радиус трубы увеличивается неограниченно. Дается также способ решения для трубы с переменным радиусом путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и определения коэффициентов разложения прогиба в ряд. Приводятся примеры в случае более простых нагрузок, как напр. постоянной нагрузки и нагрузки силой сосредоточенной на окружности трубы.

Summary

APPLICATION OF TRIGONOMETRIC SERIES TO THE COMPUTATION OF CLOSED CYLINDRICAL SHELLS

This paper is concerned with the application of the common method of trigonometric series to the computation of cylindrical shells of small thickness. Solutions are given for a tube of finite length simply supported or clamped along the edges, and acted on by any load symmetric in relation to the axis of the tube. Solutions are given for the problem of a tube supported along three circles and the problem of a very long tube supported along many circles spaced by the distance l and loaded in a periodic manner. The equations for tubes apply also to a plate strip, if the radius of the tube increases indefinitely. A method is also given for solving the problem of a tube of variable thickness by reducing it to a Fredholm integral equation of the second kind and determining the expansion coefficients of the deflection. Examples are included for simple loads such as a constant load or a concentrated load on the periphery.

ZARŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 grudnia 1957 r.