

DANILO RASKOVIĆ (BELGRAD)

WŁASNOŚCI FUNKCJI WŁASNYCH DLA DRGAŃ
POPZECZNYCH BELEK JEDNORODNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM
WPŁYWU ŚCINANIA I BEZWŁADNOŚCI OBROTOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XCVI

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Oznaczenia	205
2. Wstęp	206
3. Równanie ruchu	206
4. Równania częstości	209
5. Kilka cech przypadku Rayleigha	215

1. Oznaczenia

l	długość belki,
A	pole przekroju,
z	odcięta,
φ, Z'	pochylenie linii ugięcia,
Z	funkcja własna,
v	składowa przemieszczenia,
m	masa,
ρ	gęstość,
$F_T = -BZ'''$	siła poprzeczna,
$M = -BZ''$	moment gnący,
E_k	energia kinetyczna,
E_p	energia potencjalna,
W	operator H a m i l t o n a,
E	moduł Y o u n g a,
G	moduł sprężystości postaciowej,
I_x	moment bezwładności,
i_x	promień bezwładności,
$B = EI_x$	szywność na zginanie,
$C = GA$	szywność na skręcanie,
c_1	szywność podpory sprężystej,
$c = \sqrt{B/\rho A}$	prędkość fali,
Ω, ω	częstość,
κ	współczynnik ścinania,
k, p, q	wartości własne.

Współczynniki

α	$i_x^2,$	θ	$\varepsilon + q^2,$
β	$B/C,$	ν	$\kappa\beta/(1 + \kappa\beta\varepsilon),$
γ	$\rho I_x/C,$	σ	$\nu p^3 - p,$
δ	$\gamma\Omega^2 = \rho\Omega^2 a/G,$	τ	$\nu q^3 + q,$
a	$(\Omega^2/c^2)(\alpha + \kappa\beta) = \varepsilon + (\Omega^2 \rho A a/B),$	u	$c_1/B,$
b	$\Omega^2(1 - \kappa\delta)/c^2,$	w	$u(1 - \varepsilon a),$
ε	$\kappa\rho\Omega^2/G,$	μ	$m\omega^2/Bk^3.$
ψ	$\varepsilon - p^2,$		

2. Wstęp

Zagadnienie drgań poprzecznych belek jednorodnych z uwzględnieniem wpływu ścinania i bezwładności obrotowej przekroju poprzecznego należy w chwili obecnej do bardzo ważnych. Timoszenko wyprowadził (w r. 1921) równanie różniczkowe cząstkowe ruchu belki przy pomocy równań ruchu płaskiego i zastosował je do przypadku belki swobodnie podpartej na końcach, [1].

W artykule niniejszym podano analizę tego samego problemu przy pomocy rachunku wariacyjnego. Równanie ruchu zastosowane zostało do 25 przypadków zamocowania końców belki i najogólniejszych warunków brzegowych.

Dla tych przypadków podane zostały równania częstości i funkcje własne określające ich własności. Pierwiastki równań częstości dla 16 przypadków drgań swobodnych (zagadnienie Rayleigha) dążą asymptotycznie poprzez wartości wymierne do liczby $k\pi$.

Tablica całek Kryłowa, [2], dla ruchu ustalonego została rozszerzona na wszystkie rozważane przypadki.

3. Równanie ruchu

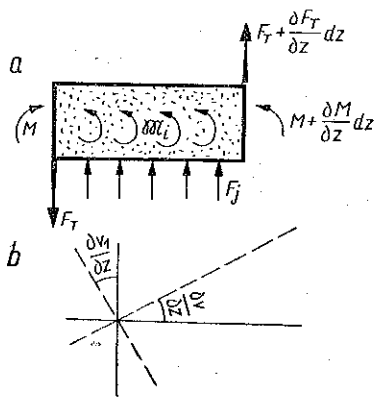
Zakładamy, że drgania belki o stałym przekroju poprzecznym odbywają się w głównej płaszczyźnie zginania. Materiał belki jest jednorodny i izotropowy według zasad teorii sprężystości.

Całkowite pochylenie linii ugięcia (rys. 1) składa się z dwu części: pochylenia spowodowanego przez zginanie $\varphi_1 = \partial v_1 / \partial z$ i pochylenia spowodowanego przez ścinanie $\varphi_2 = \partial v_2 / \partial z$. Ponieważ pochylenie spowodowane przez ścinanie wynosi $\varphi_2 = \kappa F_T / C$, pochylenie całkowite równa się

$$(1) \quad \varphi = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\kappa}{C} F_T.$$

Prędkość kątowna i przyspieszenie kątowe przekroju poprzecznego dokoła głównej osi bezwładności Cx wynoszą

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}.$$



Rys. 1

Z równania ruchu postępowego elementu dz belki

$$(2) \quad \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz = \frac{\partial F_T}{\partial z} dz$$

i ze względu na równanie (1) mamy

$$(3) \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \frac{\kappa \rho A}{C} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\kappa \rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Energia kinetyczna i potencjalna są równe

$$(4) \quad \begin{cases} E_k = \int \left[\frac{\rho A}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho I_x}{2} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} \right)^2 \right] dz, \\ E_p = \int \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} dz. \end{cases}$$

Według zasady Hamiltona następująca całka podwójna dla rozpatrywanego ruchu powinna zachować wartość stałą:

$$(5) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (E_k - E_p) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\frac{\rho A}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho I_x}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial t} \right)^2 - \frac{B}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) \right] dz dt.$$

Według metod rachunku wariacyjnego, [3], wprowadzamy rodzinę funkcji

$$(6) \quad V(z, t) = v(z, t) + \varepsilon \eta(z, t),$$

gdzie $v(z, t)$ oznacza funkcję ekstremalną, ε parametr i $\eta(z, t)$ funkcję dowolną spełniającą warunki $\eta(z, t_1) = \eta(z, t_2) = 0$. Różniczkując funkcję (6) i wstawiając otrzymane wartości do równania (5) otrzymujemy

$$(7) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} (\rho A Q^2 + \rho I_x S^2 - B R^2) dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l F(z, t, Q, R, S) dz dt,$$

gdzie

$$Q = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad R = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad S = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial t}.$$

Pierwsza wariacja tej całki względem parametru ε powinna dać

$$(8) \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} \right) dz dt,$$

przy $\varepsilon = 0$, to znaczy $V(z, t) \equiv v(z, t)$ dla ruchu rzeczywistego, gdzie

$$(9) \quad f = \frac{1}{2} (\rho A q^2 - B r^2 + \rho I_x s^2),$$

zaś q, r i s są oznaczeniami Monge'a.

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \right]_0^t - \int_0^t \eta \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \right] dz \right\} dt = 0.$$

Ponieważ $\eta(z, t_1) = \eta(z, t_2) = 0$, pierwszy nawias jest zerem, ale ponieważ $\eta(z, t) \neq 0$, powinno być spełnione równanie rachunku wariacyjnego Eulera-Lagrange'a, [4],

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) = 0, \quad 0 \leq z \leq l,$$

przy warunkach brzegowych

$$(11) \quad \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Podstawiając funkcję (9) w równaniu (10) otrzymujemy równanie o pochodnych cząstkowych opisujące ruch belki

$$eA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (v - v_2) \right] - eI_x \frac{\partial^3}{\partial z \partial t} \left[\frac{\partial^3}{\partial z \partial t} (v - v_2) \right] = 0,$$

skąd, uwzględniając równanie (3), mamy

$$(12) \quad eA \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - e \left(I_x + \frac{\kappa BA}{C} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + B \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + e^2 \frac{\kappa AI_x}{C} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0$$

albo

$$(13) \quad c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (a + \beta \kappa) \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \gamma \kappa \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania dla drgań swobodnych o postaci $v(z, t) = Z(z)T(t)$. Otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(14) \quad Z^{IV} + aZ'' - bZ = 0,$$

którego równaniem charakterystycznym jest $(\lambda^2 + p^2)(\lambda^2 - q^2) = 0$, gdzie $p^2 - q^2 = a$, $p^2 q^2 = b$ i $p^2 > 0$, $q^2 \geq 0$ zależnie od wartości $1 - \kappa \delta \geq 0$. Pierwiastkami równania są $\pm pi$ i $\pm q$, skąd wynika

$$(15) \quad p^2 = \frac{1}{2} a \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} \right), \quad q^2 = -\frac{1}{2} a \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} \right).$$

Rozważając te pierwiastki rozróżniamy trzy przypadki charakterystyczne:

$$(16.1) \quad \begin{cases} \kappa \delta < 1, & \kappa \gamma \Omega^2 < 1, & p^2 > 0, & q^2 > 0, \\ Z = C_1 \cos pz + C_2 \sin pz + C_3 \operatorname{ch} qz + C_4 \operatorname{sh} qz, \end{cases}$$

$$(16.2) \quad \begin{cases} \kappa\delta > 1, & p^2 > 0, & q^2 < 0, & q^2 \equiv -r^2, \\ Z = C_1 \cos pz + C_2 \sin pz + C_3 \cos rz + C_4 \sin rz, \end{cases}$$

$$(16.3) \quad \begin{cases} \kappa\delta = 1, & C/\kappa = \rho I_x \Omega^2, & q = 0, & b = 0, \\ Z = C_1 + C_2 z + C_3 \cos \sqrt{a} z + C_4 \sin \sqrt{a} z. \end{cases}$$

W ostatnim przypadku siła tnąca i siła bezwładności są w równowadze i dla ruchu poprzecznego mamy $v = 0$; jest to przypadek «czystych drgań ścinających».

4. Równania częstości

Uwzględniając wpływ momentu gnącego i siły poprzecznej na odkształcenia przy założeniu, że moment gnący i siła poprzeczna wynoszą $M(z, t) = M_0(z) T(t)$, $F_T(z, t) = F_0(z) T(t)$ i uwzględniając równania

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{C} \frac{\partial F_T}{\partial z} = -\frac{M}{B} + \frac{\kappa \rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \rho I_x \frac{\partial^3 v_1}{\partial z \partial t^2} = F_T - \frac{\partial M}{\partial z},$$

otrzymamy

$$(17) \quad M_0(z) = -B(Z'' + \varepsilon Z), \quad F_0(1 - a\varepsilon) = -B(Z''' + aZ').$$

Niech $v_1 = Z_1(z) T(t)$ będzie składową przemieszczenia określoną przez moment gnący. Ze wzoru (1) otrzymujemy pochylenie linii ugięcia odpowiadającej temu momentowi $Z'_1 = Z' - (\kappa F_0/C)$. Wprowadzając tę wartość do (17) mamy

$$(18) \quad Z'_1(1 - a\varepsilon) = \kappa\beta Z''' + (1 + \kappa\beta\varepsilon) Z'.$$

Warunkami brzegowymi są (rys. 2):

$$(19.1) \quad \begin{cases} Z = 0, \\ C_1 \cos pz + C_2 \sin pz + C_3 \operatorname{ch} qz + C_4 \operatorname{sh} qz = 0, \end{cases}$$

$$(19.2) \quad \begin{cases} Z' = 0, \\ -p(C_1 \sin pz - C_2 \cos pz) + q(C_3 \operatorname{sh} qz + C_4 \operatorname{ch} qz) = 0, \end{cases}$$

$$(19.3) \quad \begin{cases} Z'_1 = 0, & Z''' + Z' = 0, \\ \sigma(C_1 \sin pz - C_2 \cos pz) + \tau(C_3 \operatorname{sh} qz + C_4 \operatorname{ch} qz) = 0, \end{cases}$$

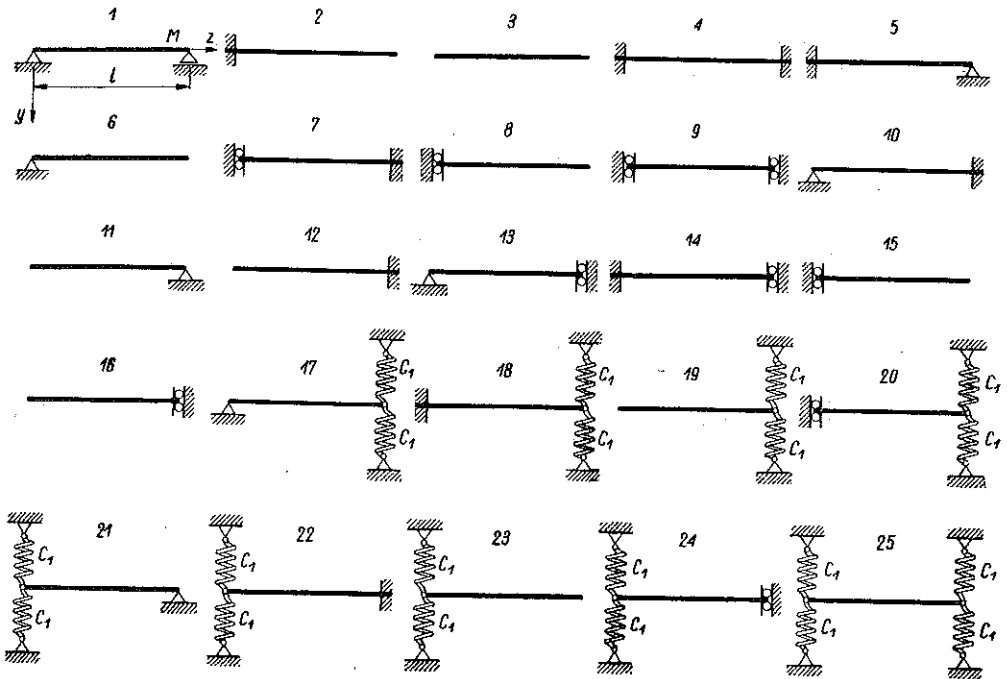
$$(19.4) \quad \begin{cases} M_0 = 0, & Z'' + \varepsilon Z = 0, \\ \Psi(C_1 \cos pz + C_2 \sin pz) + \Theta(C_3 \operatorname{ch} qz + C_4 \operatorname{sh} qz) = 0, \end{cases}$$

$$(19.5) \quad \begin{cases} F_0 = 0, & Z''' + aZ' = 0, \\ q(C_1 \sin pz - C_2 \cos pz) + p(C_3 \operatorname{sh} qz + C_4 \operatorname{ch} qz) = 0. \end{cases}$$

Dla podpór sprężystych należy dodać warunek

$$(20) \quad \begin{cases} Z''' + aZ' = \mp wZ, \\ q(C_1 \sin pz - C_2 \cos pz) + p(C_3 \operatorname{sh} qz + C_4 \operatorname{ch} qz) = \\ = \mp w(C_1 \cos pz + C_2 \sin pz + C_3 \operatorname{ch} qz + C_4 \operatorname{sh} qz) = 0, \end{cases}$$

gdzie znak minus odnosi się do podpory sprężystej na prawym końcu, zaś plus na lewym.



Rys. 2

Równania częstości podane są w tablicy 1, a funkcje własne w tablicy 2.

Są one najogólniejsze, ponieważ równania i funkcje dla innych przypadków warunków brzegowych lub dla innych przypadków szczególnych mogą być otrzymane przy pomocy pierwszych.

Dla belki stalowej i przekroju okrągłego mamy $\varepsilon = 0,123 \cdot 10^{-10} \Omega^2$ i jej wpływ przy trzecim znaku dziesiętnym pojawia się zaledwie wtedy, gdy $\Omega = 7536$, tzn. częstość wynosi $f = 1200$. Dzięki temu warunki brzegowe odnoszą się do drgań o bardzo wysokich częstościach. Przypadki te są ważne dla konstrukcji płatowców.

Tablica 1. $u = pl, v = ql$

	$z = 0$		$z = l$		
1	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$(p^2 + q^2) \operatorname{sh} v \sin u = 0, \quad \sin u = 0$
9	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	
2	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$-q^2 \tau \psi - p^2 \sigma \Theta + pq (\tau \psi - \sigma \Theta, \operatorname{sh} u \sin v +$ $+ (q^2 \tau \Theta + p^2 \sigma \psi) \operatorname{ch} u \cos v = 0$
12	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	
3		$M_0 = 0$		$F_0 = 0$	$-2pq\psi\Theta(1 - \operatorname{ch} v \cos u) +$ $+ (p^2\psi^2 - q^2\Theta^2) \operatorname{sh} v \sin u = 0$
4		$Z = 0$		$Z'_1 = 0$	$2\sigma\tau \operatorname{ch} v \cos u + (\tau^2 - \sigma^2) \operatorname{sh} v \sin u = 2\sigma\tau$
8	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$\cos u = 0$
13	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	
5	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$p\sigma \operatorname{th} v + q\tau \operatorname{tg} u = 0$
10	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	
6	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$q\Theta \operatorname{th} v + p\psi \operatorname{tg} u = 0$
11	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$Z = 0$	$M_0 = 0$	
7	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	$q\tau \operatorname{th} v - p\sigma \operatorname{tg} u = 0$
14	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	
15	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$p\psi \operatorname{th} v - q\Theta \operatorname{tg} u = 0$
16	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	
17	$Z = 0$	$M_0 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = c_1 Z$	$w(\psi - \Theta) + (q\Theta \operatorname{ctg} u + p\psi \operatorname{cth} v) = 0$
21	$M_0 = 0$	$F_0 = -c_1 Z$	$Z = 0$	$M_0 = 0$	
18	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = c_1 Z$	$-q^2 \tau \epsilon - p^2 \sigma \Theta + (q^2 \tau \Theta + p^2 \sigma \psi) \operatorname{ch} v \cos u +$ $+ pq (\tau \epsilon - \sigma \Theta) \operatorname{sh} v \sin u + wq\tau (\psi -$ $- \Theta) \operatorname{ch} v \sin u + wp\sigma (\psi - \Theta) \operatorname{sh} v \cos u = 0$
22	$M_0 = 0$	$F_0 = -c_1 Z$	$Z = 0$	$Z'_1 = 0$	
19	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = c_1 Z$	$-pq\psi(\Theta - 1) + (p^2\psi^2 - q^2\Theta^2) \operatorname{sh} v \sin u +$ $+ q\psi\Theta(p + 1) \operatorname{ch} v \cos u + w(\psi - 1) \times$ $\times (p\psi \operatorname{ch} v \sin u + q\Theta \operatorname{sh} v \cos u) = 0$
23	$M_0 = 0$	$F_0 = -c_1 Z$	$M_0 = 0$	$F_0 = 0$	
20	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	$M_0 = 0$	$F_0 = c_1 Z$	$p\psi \operatorname{th} v - q\Theta \operatorname{tg} u = w(\Theta - \psi)$
24	$M_0 = 0$	$F_0 = -c_1 Z$	$Z' = 0$	$F_0 = 0$	
25	$M_0 = 0$	$F_0 = -c_1 Z$	$M_0 = 0$	$F_0 = c_1 Z$	$-2pq\psi\Theta(1 - \operatorname{ch} v \cos u) + 2w(\Theta - \psi) \times$ $\times (p\psi \operatorname{ch} v \sin u + q\Theta \operatorname{sh} v \cos u) + [2w^2\Theta \times$ $\times (\Theta - \psi) + (p^2\psi^2 - q^2\Theta^2)] \operatorname{sh} v \sin u = 0$

Tablica 2. $pz = \xi$, $qz = \eta$, $pl = u$, $ql = v$

	$Z_n^{(1)}$	$Z_n^{(2)}$
1	$\frac{\sin \xi}{\sin u} \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } v}$	$\frac{\sin \xi}{\psi \sin u} \frac{\text{sh } \eta}{\theta \text{sh } v}$
2	$\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{\theta \text{ch } v - \psi \cos u} + \frac{qr \sin \xi + pr \text{sh } \eta}{\psi qr \sin u + p\theta \sigma \text{sh } v}$	$\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{p \text{sh } v - q \sin v} + \frac{qr \sin \xi + p\sigma \text{sh } \eta}{p^2 \sigma \text{ch } v - q^2 \tau \cos u}$
3	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ch } \eta}{\psi \theta (\text{ch } v - \cos u)} + \frac{p \sin \xi + q \text{sh } \eta}{p\psi \sin u + q\theta \text{sh } v}$	$\frac{\theta \cos \xi - \text{ch } \eta}{q\theta \sin u - p\psi \text{sh } v} + \frac{p \sin \xi + q \text{sh } \eta}{pq (\text{ch } v - \cos u)}$
4	$\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{\text{ch } v - \cos v} + \frac{\tau \sin \xi + \sigma \text{sh } \eta}{\tau \sin u + \sigma \text{sh } v}$	$\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{\sigma \sin u - \tau \text{sh } v} + \frac{\tau \sin \xi + \sigma \text{sh } \eta}{\sigma (\text{ch } v - \cos u)}$
5	$\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{\text{ch } v - \cos u} + \frac{qr \sin \xi + p\sigma \text{sh } \eta}{qr \sin u + p\sigma \text{sh } v}$	$\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{\theta \text{ch } v - \psi \cos u} + \frac{qr \sin \xi + p\sigma \text{sh } \eta}{qr \psi \sin u + p\sigma \theta \text{sh } v}$
6	$\frac{\sin \xi}{\psi \sin u} \frac{\text{sh } \eta}{\theta \text{sh } v}$	$\frac{\sin \xi}{q \cos u} + \frac{\text{sh } \eta}{p \text{ch } v}$
7	$\frac{\cos \xi}{\cos u} \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } v}$	$\frac{\cos \xi}{p\sigma \sin u} \frac{\text{ch } \eta}{qr \text{sh } v}$
8	$\frac{\cos \xi}{\cos u} \frac{\text{ch } \eta}{\text{ch } v}$	$\frac{\cos \xi}{\psi \cos u} \frac{\text{ch } \eta}{\theta \text{ch } v}$
9	$\frac{\cos \xi}{p} + \frac{\text{ch } \eta}{q}$	$\frac{\cos \xi}{\psi} \frac{\text{ch } \eta}{\theta}$
10	$\frac{\sin \xi}{\sin u} \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } v}$	$\frac{\sin \xi}{p\sigma \cos u} + \frac{\text{sh } \eta}{qr \text{ch } v}$
11	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ch } \eta}{\psi \text{ch } v - \theta \cos u} + \frac{p \sin \xi + q \text{sh } \eta}{p \sin u + q \text{sh } v}$	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ch } \eta}{\psi \theta (\text{ch } v - \cos u)} + \frac{p \sin \xi + q \text{sh } \eta}{p\psi \sin u + q\theta \text{sh } v}$

Tablica 2

Z_n⁽¹⁾

Z_n⁽²⁾

12 jak 11 $\frac{\sin \xi}{p \cos u} - \frac{\text{sh } \eta}{q \text{ ch } v}$

13 $\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{p \sin u - q \text{ sh } v} + \frac{qr \sin \xi + pr \text{ sh } \eta}{pq (q \text{ ch } v + r \cos u)}$

14 jak 8(2) $\frac{\cos \xi}{q \sin u} - \frac{\text{ch } \eta}{p \text{ sh } v}$

15 jak 6 $\frac{\sin \xi}{q \cos u} - w \sin u + \frac{\text{sh } \eta}{p \text{ ch } v + w \text{ sh } v}$

16 jak 2 $\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ ch } \eta}{p \theta \sin u + q \psi \text{ sh } v} + \frac{p \sin \xi + q \text{ sh } \eta}{p^2 \cos u + q^2 \text{ ch } v}$

17 jak 2 $\frac{\cos \xi - \text{ch } \eta}{q \sin u - q \text{ sh } v - w (\text{ch } u - \cos v)} + \frac{qr \sin \xi + pr \text{ sh } \eta}{p \sigma (p \text{ ch } v + w \text{ sh } v) + qr (w \sin u - q \cos v)}$

18 jak 11 $\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ ch } \eta}{q \theta \sin u - p \psi \text{ sh } v + w (\theta \cos u - \psi \text{ ch } v)} + \frac{p \sin \xi + q \text{ sh } \eta}{pq (\text{ch } v - \cos u) - w (p \sin u + q \text{ sh } v)}$

19 jak 8(2) $\frac{\cos \xi}{q \sin u + w \cos u} - \frac{\text{ch } \eta}{p \text{ sh } v + w \text{ ch } v}$

20 $\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ ch } \eta}{\theta} - \frac{\psi \text{ sh } \eta}{\theta (p \sin u + q \text{ sh } v)}$

21 $\frac{\theta \cos \xi - \psi \text{ ch } \eta}{\cos u} - \frac{\psi \text{ sh } \eta}{\sin u} + \frac{q (\theta \cos u - \psi \text{ ch } v) + w (\theta - \psi) \text{ sh } v}{\theta} \sin \xi - \frac{w (\theta - \psi) \sin u \text{ sh } \eta}{\theta (q \text{ sh } v + p \sin u)}$

Tablica 2

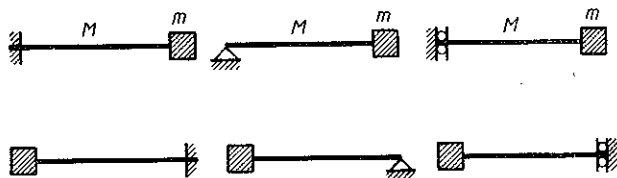
(c. d.)

	$Z_n^{(1)}$	$Z_n^{(2)}$
22	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} - \frac{w(\theta - \psi) \operatorname{sh} v + p(\theta \cos u - \psi \operatorname{ch} v)}{\theta(q \sin u + p \operatorname{sh} v)} \frac{\sin \xi +}{\theta} + \frac{w(\theta - \psi) \sin u - q(\theta \cos u - \psi \operatorname{ch} v)}{\theta(p \sin u + q \operatorname{sh} v)} \operatorname{sh} \eta$	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} \frac{wq\tau(\theta - \psi) \operatorname{ch} v + p(p\sigma\theta \sin u - q\tau\psi \operatorname{sh} v)}{q^2 \operatorname{ch} v - p^2 \cos u} \sin \xi + \frac{wpx(\theta - \psi) \cos u + q(p\sigma\theta \cos u - q\tau\psi \operatorname{sh} v)}{q^2 \operatorname{ch} v - p^2 \cos u} \operatorname{sh} \eta$
23	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} - \frac{w(\theta - \psi) \operatorname{sh} v - p\psi(\operatorname{ch} v - \cos u)}{q\theta \operatorname{sh} v + p\psi \sin u} \frac{\sin \xi +}{\theta} + \frac{\psi w(\theta - \psi) \sin u + q\theta(\operatorname{ch} v - \cos u)}{p\psi \sin u + q\theta \operatorname{sh} v} \operatorname{sh} \eta$	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} + \frac{w(\theta - \psi) \operatorname{ch} v + (q\theta \sin u - p\psi \operatorname{sh} v)}{q\theta(1 - \operatorname{ch} v)} \sin \xi + \frac{w(\theta - \psi) + q\theta \sin u - p\psi \operatorname{sh} v}{p\theta(1 - \operatorname{ch} v)} \operatorname{sh} \eta$
24	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} - \frac{wq(\theta - \psi) \operatorname{ch} v - p(p\theta \sin u + q\psi \operatorname{sh} v)}{\theta(p^2 \cos u + q^2 \operatorname{ch} v)} \frac{\sin \xi +}{\theta} + \frac{wpx(\theta - \psi) \cos u + q(p\theta \sin u + q\psi \operatorname{sh} v)}{\theta(p^2 \cos u + q^2 \operatorname{ch} v)} \operatorname{sh} \eta$	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} \frac{w(\theta - \psi) \operatorname{ch} v + q\theta \sin u - p\psi \operatorname{sh} v}{\theta q(\operatorname{ch} v - \cos u)} \sin \xi - \frac{w(\theta - \psi) \cos u + q\theta \sin u - p\psi \operatorname{sh} v}{p\theta(\operatorname{ch} v - \cos u)} \operatorname{sh} \eta$
25	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} + \frac{w(\theta - \psi) \operatorname{sh} v + p\psi(\operatorname{ch} v - \cos u)}{q\theta \operatorname{sh} v + p\psi \sin u} \frac{\sin \xi -}{\theta} + \frac{\psi w(\theta - \psi) \sin u - q\theta(\operatorname{ch} v - \cos u)}{p\psi \sin u + q\theta \operatorname{sh} v} \operatorname{sh} \eta$	$\frac{\theta \cos \xi - \psi \operatorname{ch} \eta}{\theta} - \frac{w(\theta - \psi)(p \operatorname{ch} v - w \operatorname{sh} v) - p(q\theta \sin u - p\psi \operatorname{sh} v) - pw(\psi \operatorname{ch} v - \theta \cos u)}{p\theta(q \cos v + w \sin u)} \sin \xi - \frac{w(\theta - \psi)(q \cos u + w \sin u) + q(p\psi \operatorname{sh} v - q\theta \sin u) + w(\psi \operatorname{ch} v - \theta \cos u)}{\theta[p(q \cos u + w \sin u) - q(p \operatorname{ch} v - w \operatorname{sh} v)]} \operatorname{sh} \eta$

5. Kilka cech przypadku Rayleigha

Dla $a=0$, tzn. $\alpha=0$, $\varkappa=0$, otrzymujemy równanie częstości dla przypadku Rayleigha, [5]. Tak więc mamy również $\varepsilon = \nu = 0$ i warunki brzegowe są proste, co wskazane jest na tablicy 3.

Pierwiastki pierwszych 16 przypadków (bez sprężyn) dają asymptotycznie do przybliżonych wartości wymiernych $k\pi$, gdzie k zależy od numeru harmonicznej. Różnice pierwszego rzędu są w przybliżeniu równe liczbie π i dzięki temu różnice drugiego rzędu są w przybliżeniu równe zeru.



Rys. 3

Jeżeli w przypadkach 17 - 25 zamiast podpór sprężystych mamy masy skupione m (rys. 3), wówczas zastępując $u = c_1/B$ przez $\mu = m\omega^2/Bk^3$ otrzymujemy równania częstości i funkcje własne dla tych przypadków.

W przypadku ruchu ustalonego korzystnie jest zastosować współrzędne uogólnione $q = q(t)$, [1]. Wtedy energie są równe

$$(21) \quad E_k = \frac{1}{2} \rho A \sum_1^{\infty} \dot{q}_n^2 \int_0^l Z_n^2 dz, \quad E_p = \frac{1}{2} B \sum_1^{\infty} q_n^2 \int_0^l (Z_n'')^2 dz.$$

Korzystając z własności ortogonalności funkcji własnych Z_n i warunków brzegowych Kryłow wykazał, [2], że wartości całek wynoszą

$$(22) \quad \begin{cases} \int_0^l Z_n^2 dz = \frac{1}{4} l [Z_n^2 - 2Z_n' Z_n'' + (Z_n'')^2]_{z=l}, \\ \int_0^l (Z_n'')^2 dz = k_n^4 \int_0^l Z_n^2 dz. \end{cases}$$

W ten sam sposób otrzymujemy dla przypadku belek na podporach sprężystych (przypadki 17 - 25)

$$(23) \quad \int_0^l Z_n^2 dz = (4k_n^3)^{-1} [3k_n^2 Z_n Z_n''' + k_n^3 z (Z_n'')^2 - k_n^2 Z_n' Z_n'' - 2k_n^3 z Z_n''' + k_n^3 z Z_n^2]_0^l.$$

Wartości całek podane są w tablicy 4.

Tablica 3. $\lambda = kl$

	$z = 0$	$z = l$		λ
1	$Z = 0$	$Z'' = 0$		
9	$Z' = 0$	$Z''' = 0$	$\sin \lambda = 0$	$n\pi$
2	$Z = 0$	$Z'' = 0$		
12	$Z' = 0$	$Z''' = 0$	$1 + \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 0$	$\sim \frac{2n-1}{2}\pi$
3	$Z'' = 0$	$Z''' = 0$		
4	$Z = 0$	$Z' = 0$	$1 - \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 0$	$\sim \frac{2n-1}{2}\pi$
8	$Z' = 0$	$Z''' = 0$		
13	$Z = 0$	$Z'' = 0$	$\cos \lambda = 0$	$\frac{2n-1}{2}\pi$
5	$Z = 0$	$Z' = 0$		
10	$Z = 0$	$Z'' = 0$		
6	$Z = 0$	$Z'' = 0$	$\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{th} \lambda$	$\sim \frac{4n+1}{4}\pi$
11	$Z'' = 0$	$Z''' = 0$		
7	$Z' = 0$	$Z''' = 0$		
14	$Z = 0$	$Z' = 0$		
15	$Z' = 0$	$Z''' = 0$	$\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{th} \lambda$	$\frac{4n-1}{4}$
16	$Z'' = 0$	$Z''' = 0$		
17	$Z = 0$	$Z'' = 0$	$Z''' = uZ$	
21	$Z'' = 0$	$Z''' = -uZ$	$Z = 0$	$\operatorname{cth} \lambda - \operatorname{ctg} \lambda = 2uk^{-3}$
18	$Z = 0$	$Z' = 0$	$Z'' = 0$	
22	$Z'' = 0$	$Z''' = -uZ$	$Z = 0$	$\frac{1 + \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda} = -\frac{u}{k^3}$
19	$Z'' = 0$	$Z''' = 0$	$Z'' = 0$	
23	$Z'' = 0$	$Z''' = -uZ$	$Z'' = 0$	$\frac{1 - \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda} = -\frac{u}{k^3}$
20	$Z' = 0$	$Z''' = 0$	$Z'' = 0$	
24	$Z'' = 0$	$Z''' = -uZ$	$Z' = 0$	$\operatorname{th} \lambda + \operatorname{tg} \lambda = 2uk^{-3}$
25	$Z'' = 0$	$Z''' = -uZ$	$Z'' = 0$	$2u^2 \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda - 2uk^3 (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) - k^3 (\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - 1) = 0$

Tablica 4

	$\int_0^l Z^2 dz$
4, 7, 10, 12	$\frac{1}{4} l [(Z'')^2]_l$
1, 5, 8, 11	$-\frac{1}{2} l [Z' Z''']_l$
2, 3, 6, 15	$\frac{1}{4} l [Z^2]_l$
9, 13, 14, 16	$\frac{1}{4} l [Z^2 + (Z'')^2]_l$
17, 18, 19, 20	$\frac{1}{4} l [Z^2]_l + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_l - \frac{1}{2} ul [ZZ']_l$
21	$-\frac{1}{2} l [Z' Z''']_l + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_0$
22	$\frac{1}{4} l [(Z'')^2]_l + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_0$
23	$\frac{1}{4} l [Z^2]_l + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_0$
24	$\frac{1}{4} l [Z^2 + (Z'')^2] + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_0$
25	$\frac{1}{4} l [Z^2]_l + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_l - \frac{1}{2} ul [ZZ']_l + \frac{3}{4} uk^{-1} [Z^2]_0$

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. Timoshenko, *Vibrations Problems in Engineering*, New York 1955.
- [2] А. Н. Крылов, *О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики*, Leningrad 1933.
- [3] R. Weinstock, *Calculus of Variations*, New York 1952.
- [4] W. S. Kimball, *Calculus of Variations*, London 1952.
- [5] Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, New York 1945.

Резюме

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ СРЕЗА И ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ИНЕРЦИИ

В работе приводится анализ поперечных колебаний однородных балок с учетом влияния среза и вращательной инерции поперечного сечения при помощи вариационного исчисления. Уравнение движения

применялось в 25 случаях заземления концов балки и для наиболее общих краевых условий.

Для этих случаев даются уравнения частоты и собственные функции и их свойства. Корни уравнений частоты для 16 случаев свободного режима (задача Рэлея) стремятся асимптотически к размерным значениям числа $k\pi$.

Таблица интегралов Крылова, [2], касающаяся исследования постоянного режима, расширена на все случаи.

Summary

THE PROPERTIES OF EIGENFUNCTIONS FOR TRANSVERSE VIBRATIONS OF HOMOGENEOUS BEAMS, TAKING INTO CONSIDERATION THE INFLUENCE OF SHEARING AND ROTATIONAL INERTIA

This paper contains an analysis of transverse vibrations of homogeneous beams, taking into consideration the influence of shearing and rotational inertia of a cross-section. The method used is that of the calculus of variations. The equation of motion is applied to 25 cases of end support and to most general boundary conditions.

For these cases, frequency equations and the properties of the eigenfunctions are discussed. For 16 cases of the free regime (Rayleigh's problem), the roots of the frequency equations tend asymptotically to rational values of the number $k\pi$.

Krylov's table of integrals, [2], for steady-state regimes is extended to cover all cases.

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 maja 1957 r.