

ANDRZEJ BRANDT i JÓZEF IGNACZAK

KSZTAŁTOWANIE WYTRZYMAŁOŚCIOWE BELKI
WSPORNIKOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XCIV

WYKONANIE PRACY WYKONAWCZYCH
W ZAKŁADACH PRACOWNI
WYKONAWCZYCH

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp i warunki kształtowania	169
2. Oznaczenia	170
3. Wyrównanie naprężeń na górnej krawędzi	171
4. Wyrównanie naprężeń na obu krawędziach	176
5. Wnioski	178

WYKONANIE PRACY WYKONAWCZYCH
W ZAKŁADACH PRACOWNI
WYKONAWCZYCH

1. Wstęp i warunki kształtowania

Zagadnienia kształtowania zginanych belek o przekroju prostokątnym były rozwiązywane już przed kilkoma stuleciami. Pierwsze rozwiązanie ogłosił w roku 1638 Galileusz. Wkrótce potem w roku 1661 F. Blondel i P. Wurtz wyznaczyli zmienną wysokość belki przy obciążeniu ruchomym. W roku 1733 Daniel Bernoulli rozwiązał zagadnienie belki równej wytrzymałości pod działaniem ciężaru własnego, a Tomasz Young w r. 1807 zauważył sprzeczność w kształtach belki równej wytrzymałości przy uwzględnieniu jedynie momentów zginających, ponieważ skrajne przekroje tych belek posiadają zerowe wysokości.

W latach późniejszych poszukiwano nadal właściwych kształtów konstrukcji, jednak główne zainteresowanie przeniosło się na zagadnienia analizy statycznej ustrojów i metod sprawdzania wytrzymałości, co było zapewne związane z rozwojem konstrukcji metalowych prętowych o małym ciężarze własnym.

Obecnie wobec rozwoju budownictwa z betonu i betonu sprężonego, gdy ciężar własny elementu jest kilkakrotnie większy od obciążenia użytkowego, właściwe rozłożenie materiału w konstrukcji decyduje niejednokrotnie o jej opłacalności. Zagadnienie to powstaje szczególnie często w budownictwie mostowym i przemysłowym przy dużych rozpiętościach i obciążeniach.

Przedstawione rozwiązanie jest próbą kształtowania belki wspornikowej o przekroju pełnym, przy czym belka jest sprężona kablem wewnętrznym zakotwionym na płaszczyźnie czołowej. Mając prostą górną krawędź belki oraz daną wysokość w skrajnym przekroju należy wyznaczyć taki kształt belki, aby

- 1) energia sprężysta odkształcenia stanowiła minimum,
- 2) objętość tworzywa belki była wartością daną.

W tym sformułowaniu jest to więc zagadnienie izoperymetryczne rachunku wariacyjnego. Korzystając z ogólnych twierdzeń kształtowania wytrzymałościowego, [7], [8], rozwiązujemy to zagadnienie zastępując warunek ekstremum potencjału przy stałej objętości tworzywa przez warunki wyrównania skrajnych wartości naprężeń. W tym przypadku otrzymujemy prostsze zależności matematyczne, a otrzymane rozwiązanie pozostaje w ścisłym związku z rozwiązaniem w pierwszym sformułowaniu.

W rozpatrywanym przypadku pominiemy tę część energii sprężystej (wobec energii odkształcenia objętościowego), która zależy od odkształcenia postaciowego.

Celem tego założenia jest znaczne uproszczenie rachunku. Założenie jest dopuszczalne, ponieważ w belce zginanej o przekroju pełnym decydujący wpływ będą miały naprężenia normalne. Poza szczególnymi stanami obciążenia można tu nie uwzględniać wpływu naprężeń stycznych na rozkład sił wewnętrznych, przeto wydaje się rzeczą słuszną pominięcie tego wpływu przy wyznaczaniu kształtu.

Rozpatrywany problem sprowadza się więc do wyrównania skrajnych naprężeń normalnych wzdłuż rozpiętości. Tak postawione zagadnienie musi mieć dodatkowe warunki wynikające z przeznaczenia i sposobu wytwarzania kształtowanego elementu. Takim ograniczeniem będzie tu przyjęcie pełnego przekroju prostokątnego oraz wartości skrajnego naprężenia.

Z ogólnej teorii zginania belek wynika, że w takim elemencie wytrzymałościowym wyrównanie naprężeń w całym przekroju poprzecznym jest niemożliwe. Wobec tego będziemy dążyli do wyrównania skrajnych wartości naprężeń. Równocześnie w ukształtowanym elemencie otrzymujemy równomierne wyteżenie materiału w skrajnych punktach i wyrównanie w tych punktach współczynników pewności na przekroczenie obszaru sprężystego. Po osiągnięciu takiego stanu ilość energii sprężystej w elemencie będzie najmniejsza ze wszystkich możliwych elementów odpowiadających założonym warunkom.

W pierwszym przypadku zajmiemy się kształtowaniem belki, gdy trasa siły wewnętrznej jest prosta, równoległa do górnej krawędzi, a jedynie wysokość belki jest zmienna wzdłuż rozpiętości. Wówczas posiadając jeden warunek wyrównujemy naprężenia na górnej krawędzi belki.

Następnie rozpatrzmy belkę, w której występują dwie niewiadome funkcje określające wysokość belki i trasę siły wewnętrznej. W tym przypadku wyrównamy naprężenia na obu krawędziach.

2. Oznaczenia

Przyjęte zostały następujące oznaczenia:

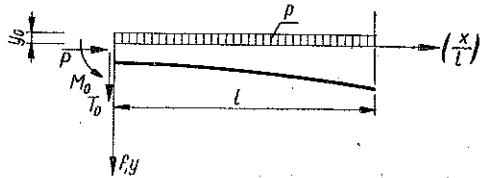
c	stała wartość naprężenia,
$f = f(x/l)$	wysokość belki,
$f(0)$	wysokość belki w punkcie $x/l = 0$,
l	rozpiętość belki,
p	obciążenie użytkowe równomiernie rozłożone,
$y = y(x/l)$	rzędna siły wewnętrznej,
y_0	rzędna siły wewnętrznej przy $x/l = 0$,

$(x/l), (\xi/l), y$	współrzędne prostokątne,
$u(f), \varphi(f)$	funkcje pomocnicze,
γ	ciężar objętościowy betonu,
M_0	moment zginający w przekroju początkowym,
P	siła wewnętrzna,
T_0	siła poprzeczna w przekroju początkowym,
σ^s	naprężenie normalne na krawędzi górnej,
σ^d	naprężenie normalne na krawędzi dolnej.

3. Wyrównanie naprężeń na górnej krawędzi

3.1. Wyprowadzenie równań podstawowych i rozwiązanie ogólne. Rozpatrzmy belkę wspornikową wykonaną z materiału izotropowego i jednorodnego, poddaną działaniu obciążenia użytkowego i ciężaru własnego (rys. 1). Skrajny przekrój belki obciążony jest siłą normalną P , siłą styczną T_0 oraz momentem zginającym M_0 .

Przyjmujemy jednostkową szerokość belki w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Krawędź górna belki jest prosta, natomiast kształt krawędzi dolnej wyznaczymy z warunku wyrównania naprężeń normalnych na górnej krawędzi przekroju podłużnego.



Rys. 1

Rzędna y_0 siły wewnętrznej P jest stała wzdłuż rozpiętości belki. Naprężenia wyrównujemy tylko na jednej krawędzi, ponieważ mamy do dyspozycji tylko jedną funkcję — wysokość belki. Taka sytuacja powstaje często w praktyce, gdy ze względów na wykonanie czy innych nie chcemy dawać krzywoliniowych kabli. Wówczas kształtowanie polega tylko na wyznaczaniu zmiennej wysokości belki lub płyty. Wyrównanie naprężeń na górnej krawędzi w belce wspornikowej ma na celu zabezpieczenie się przed powstaniem naprężeń rozciągających w betonie, dlatego też wartość tego naprężenia może być niewielka. Wobec tego pozostawienie na drugiej krawędzi naprężeń ściskających o wartościach wielokrotnie większych od naprężeń na górnej krawędzi jest rzeczą całkowicie bezpieczną.

Wartości naprężeń normalnych na górnej krawędzi wyrażają się zależnością

$$(3.1) \quad \sigma^s = \left\{ -M_0 - T_0 \left(\frac{x}{l} \right) l + P \left[\frac{1}{2} f \left(\frac{x}{l} \right) - y_0 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} p \left(\frac{x}{l} \right)^2 l^2 - \gamma l^3 \int_0^{x/l} f \left(\frac{\xi}{l} \right) \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l} \right) d \left(\frac{\xi}{l} \right) \right\} : \frac{1}{6} f^2 \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{P}{f \left(\frac{x}{l} \right)}$$

Przy założeniu $\sigma^s = \text{const} = c$ otrzymujemy równanie całkowe na niewiadomą funkcję $f(x/l)$

$$(3.2) \quad cf^2\left(\frac{x}{l}\right) = -6M_0 - 6T_0\left(\frac{x}{l}\right)l + 4Pf\left(\frac{x}{l}\right) - \\ - 6Py_0 - 3p\left(\frac{x}{l}\right)^2l^2 - 6\gamma l^2 \int_0^{x/l} f\left(\frac{\xi}{l}\right)\left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l}\right)d\left(\frac{\xi}{l}\right).$$

Równanie całkowe (3.2) jest w ogólności nieliniowe; zmienia ono swój typ w przypadku, gdy znikają parametry c i γ . Jeżeli $c=0$ i $\gamma \neq 0$, to otrzymamy równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju, gdy natomiast $\gamma=0$, wówczas otrzymuje się równanie algebraiczne na niewiadomą funkcję.

Cechą zasadniczą nieliniowego równania (3.2) jest to, że występująca całka ma postać splotu funkcji niewiadomej z funkcją $y=x/l$. Ponieważ taki splot jest równoważny dwukrotnej kwadraturze funkcji niewiadomej, przeto istnieje możliwość rozwiązania równania (3.2) metodami równań różniczkowych zwyczajnych.

Rozwiązanie równania (3.2) można sprowadzić do rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego nieliniowego, rzędu drugiego w postaci:

$$(3.3) \quad \frac{1}{3}c\left[f'^2\left(\frac{x}{l}\right) + f'\left(\frac{x}{l}\right)f''\left(\frac{x}{l}\right)\right] - \frac{2}{3}Pf''\left(\frac{x}{l}\right) + pl^2 + \gamma l^2 f\left(\frac{x}{l}\right) = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$(3.4) \quad \begin{cases} cf^2(0) = -6M_0 + 4Pf(0) - 6Py_0, \\ cf(0)f'(0) = -3T_0l + 2Pf'(0). \end{cases}$$

Warunki (3.4) są typowymi warunkami Cauchy'ego dla równania różniczkowego (3.3).

Można udowodnić równoważność rozwiązania równania całkowego (3.2) i rozwiązania równania różniczkowego (3.3) z warunkami (3.4).

Ponieważ w równaniu (3.3) nie występuje jawnie zmienna (x/l) , przeto można obniżyć rząd tego równania przyjmując nową funkcję

$$u(f) = \frac{df}{dx};$$

otrzymamy wówczas

$$(3.5) \quad \frac{1}{3}cu(f)\frac{d}{df}\left[u(f)f\left(\frac{x}{l}\right)\right] - \frac{2}{3}Pu(f)\frac{du(f)}{df} + pl^2 + \gamma l^2 f\left(\frac{x}{l}\right) = 0.$$

Następnie wprowadzamy nową funkcję $\varphi = \varphi(f)$ taką, że

$$(3.6) \quad l^2(p + \gamma f) \equiv u(f)\frac{d\varphi}{df}.$$

Jeżeli funkcja $f(x/l)$ jest ściśle monotoniczna, to $u(f) \neq 0$ i wstawiając (3.6) do równania (3.5) otrzymamy

$$\frac{1}{3} c \frac{d}{df}(uf) - \frac{2}{3} P \frac{du}{df} + \frac{d\varphi}{df} = 0$$

lub

$$\frac{1}{3} cuf - \frac{2}{3} Pu + \varphi + c_1 = 0 \quad [c_1 \neq c_1(f)].$$

Stąd

$$(3.7) \quad u = -\frac{3(\varphi + c_1)}{cf - 2P} \quad [cf - 2P \neq 0].$$

Korzystając ponownie z równania (3.6) oraz (3.7) otrzymamy

$$(3.8) \quad l^2(p + \gamma f) = -\frac{3(\varphi + c_1)}{cf - 2P} \frac{d\varphi}{df}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych na niewiadomą funkcję pomocniczą $\varphi = \varphi(f)$, które posiada rozwiązanie:

$$(3.9) \quad (\varphi + c_1)^2 = -\frac{2}{3} l^2 \left[\frac{\gamma c}{3} f^3 + f^2 \left(\frac{1}{2} pc - \gamma P \right) - 2pPf - \bar{c} \right],$$

gdzie \bar{c} jest stałą całkowania.

Korzystając z równania (3.7) otrzymujemy

$$(3.10) \quad \frac{df}{d\frac{x}{l}} = \pm \frac{3}{cf - 2P} \sqrt{-\frac{2}{3} l^2 \left[\frac{\gamma c}{3} f^3 + \left(\frac{1}{2} pc - \gamma P \right) f^2 - 2pPf - \bar{c} \right]}.$$

Zakładamy, że funkcja $f = f(x/l)$ jest funkcją rosnącą oraz że dla każdej wartości f zachodzi nierówność

$$cf < 2P,$$

przeto należy przyjmować przed pierwiastkiem znak minus, aby pochodna miała wartość dodatnią.

Przyjęcie ostatniego warunku oznacza, że przyjmujemy spośród dwóch gałęzi rozwiązania (3.10) tę, która odpowiada warunkom fizycznym zadania (np. zwiększanie się wysokości belki zgodnie z dodatnim zwrotem osi x).

Korzystając z przyjętego założenia otrzymamy następujący wzór na niewiadomą funkcję równania (3.3):

$$(3.11) \quad \frac{x}{l} = \frac{x}{l}(f) = \bar{c} - \frac{1}{l\sqrt{6}} \int \frac{(cf - 2P) df}{\sqrt{-\frac{\gamma c}{3} f^3 - \left(\frac{1}{2} pc - \gamma P \right) f^2 + 2pPf + \bar{c}}},$$

gdzie \bar{c} i \bar{c} są stałymi dowolnymi.

Stałą \bar{c} określimy z warunków (3.4):

$$(3.12) \quad \bar{c} = \frac{3}{2} T_0^2 + \frac{\gamma c}{3} [f(0)]^3 + \left(\frac{1}{2} p c - \gamma P \right) [f(0)]^2 - 2 p P f(0),$$

przy czym wartość funkcji $f(x/l)$ w punkcie $x/l=0$ określimy z pierwszego warunku (3.4)

$$(3.13) \quad f(0) = \frac{1}{c} [2 P - \sqrt{4 P^2 - 6 c (M_0 + P y_0)}] > 0.$$

Stałą \bar{c} wyznaczyć można z warunku zgodności w punkcie początkowym:

$$\frac{x}{l} [f(0)] = 0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie równania (3.3) w postaci całki eliptycznej. Rozwiązanie powyższe może posłużyć do numerycznego wyznaczenia zmiennej wysokości belki przez wykonanie całkowania w sposób przybliżony. W niektórych szczególnych przypadkach, których nie będziemy tu rozważać, można wyrazić funkcję (3.11) w postaci funkcji elementarnych. Np. równanie całkowe (3.2) posiada, oprócz rozwiązania ogólnego (3.10), także rozwiązanie szczególne w postaci paraboli, jednak otrzymana w ten sposób funkcja nie odpowiada warunkom zadania.

Zauważmy także, że założenie $c=0$ prowadzi do liniowego równania całkowego, które posiada rozwiązanie w postaci funkcji hiperbolicznych. Tego założenia również nie przyjmujemy w rozpatrywanym problemie kształtowania.

3.2. Rozwiązanie przybliżone. W rozwiązaniach przybliżonych posługiwać się można metodą kollokacji. Ponieważ poszukiwana funkcja $f = f(x/l)$ jest symetryczna względem osi $x/l=0$, na co wskazuje wzór (3.10) dający rozwiązanie ściśle, zatem dostatecznie dokładne rozwiązanie dla celów praktycznych otrzymamy przy założeniu, że funkcja ma postać szeregu potęgowego parzystego o nieoznaczonych współczynnikach i przy uwzględnieniu w rachunku kilku pierwszych wyrazów:

$$(3.14) \quad f\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_0^{\infty} a_k \left(\frac{x}{l}\right)^{2k}.$$

Współczynniki a_0, a_1, \dots wyznaczamy z układu równań otrzymanego przez podstawienie do równania (3.1) wartości funkcji w punktach

$$0, \quad \frac{x_1}{l}, \quad \frac{x_2}{l}, \dots$$

Równanie (3.1) ma w tym przypadku postać następującą:

$$(3.15) \quad \sigma^s = \left\{ -M_0 - T_0 \left(\frac{x}{l} \right) l + P \left[\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} a_k \left(\frac{x}{l} \right)^{2k} - y_0 \right] - \frac{1}{2} P \left(\frac{x}{l} \right)^2 l^2 - \right. \\ \left. - \gamma l^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} a_k \left(\frac{x}{l} \right)^{2k+2} \right\} : \frac{1}{6} \left[\sum_0^{\infty} a_k \left(\frac{x}{l} \right)^{2k} \right]^2 + \frac{P}{\sum_0^{\infty} a_k \left(\frac{x}{l} \right)^{2k}}$$

Wykonane przykłady liczbowe wskazują na szybką zbieżność szeregu oraz bardzo niewielkie różnice w stosunku do rozwiązania ścisłego.

3.3. Przykłady liczbowe. *Przykład 1.* Wszystkie parametry odnoszące się do obciążenia belki są rozpatrywane jako funkcje siły wewnętrznej P oraz rozpiętości l :

$$p = 0,01 \frac{P}{l}, \quad \gamma = 0,2 \frac{P}{l^2}, \quad \sigma^s = 5 \frac{P}{l}, \\ y_0 = 0,05 l, \quad M_0 = 0,01 Pl, \quad T_0 = 0,005 P.$$

Otrzymana funkcja ma następującą postać:

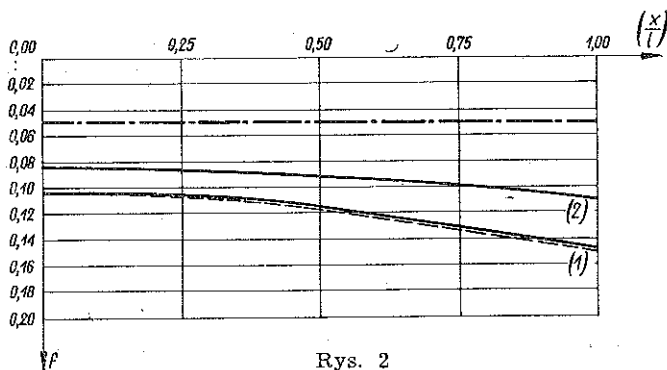
$$f \left(\frac{x}{l} \right) = 0,1040 l + 0,0516 l \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 0,0070 l \left(\frac{x}{l} \right)^4.$$

Przykład 2. Przyjęto moment zginający i siłę poprzeczną w skrajnym przekroju równe zeru:

$$M_0 = 0, \quad T_0 = 0,$$

pozostałe zaś parametry jak w poprzednim przykładzie. Otrzymano funkcję

$$f \left(\frac{x}{l} \right) = 0,0840 l + 0,02445 l \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 0,00280 l \left(\frac{x}{l} \right)^4.$$



Rys. 2

W powyższych przykładach posłużono się szeregiem potęgowym, przy czym uwzględniono pierwsze trzy wyrazy. Na rysunku 2 pokazano wy-

kresy otrzymanych funkcji. Przykład 1 rozwiązano również za pomocą całkowania rozwiązania ścisłego i ogólnego, (3.11). Całkowanie wykonano metodą Rungego, a otrzymane wartości oznaczono na rys. 2 linią przerywaną. Linia ciągła dotyczy rozwiązania za pomocą szeregu potęgowego, trasę siły sprzężającej oznaczono kropkami i kreskami.

4. Wyrównanie naprężeń na obu krawędziach

4.1. Wyprowadzenie wzorów podstawowych. Rozpatrzmy belkę podpartą i obciążoną podobnie jak w poprzednim przypadku, przy czym przyjmujemy za zmienną odległość siły wewnętrznej od górnej krawędzi. W ten sposób występują tu dwie niewiadome funkcje $f(x/l)$ i $y(x/l)$, określające wysokość belki oraz położenie siły P w każdym przekroju poprzecznym. Funkcje niewiadome wyznaczmy z warunków wyrównania skrajnych naprężeń normalnych na górnej i dolnej krawędzi wzdłuż rozpiętości belki.

W rozpatrywanej belce wspornikowej skrajne wartości naprężeń normalnych występują na górnej krawędzi przekroju σ^s przy obciążeniu ciężarem własnym i siłą wewnętrzną, oraz na dolnej krawędzi σ^d w przypadku działania również obciążenia użytkowego. Naprężenie na górnej krawędzi przyrównujemy do zera, zaś naprężenia na dolnej krawędzi do stałej wartości c , przy czym

$$(4.1) \quad \sigma^s = \left\{ -M_0 - T_0 \left(\frac{x}{l} \right) l + P \left[\frac{1}{2} f \left(\frac{x}{l} \right) - y \left(\frac{x}{l} \right) \right] - \right. \\ \left. - \gamma l^2 \int_0^{x/l} f \left(\frac{\xi}{l} \right) \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l} \right) d \frac{\xi}{l} \right\} : \frac{1}{6} f^2 \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{P}{f \left(\frac{x}{l} \right)}$$

$$(4.2) \quad \sigma^d = \left\{ M_0 + T_0 \left(\frac{x}{l} \right) l - P \left[\frac{1}{2} f \left(\frac{x}{l} \right) - y \left(\frac{x}{l} \right) \right] + \frac{1}{2} p l^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \right. \\ \left. + \gamma l^2 \int_0^{x/l} f \left(\frac{\xi}{l} \right) \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l} \right) d \frac{\xi}{l} \right\} : \frac{1}{6} f^2 \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{P}{f \left(\frac{x}{l} \right)}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymamy

$$(4.3) \quad f \left(\frac{x}{l} \right) = \frac{P}{c} + \sqrt{\left(\frac{P}{c} \right)^2 + \frac{3 p l^2}{c} \left(\frac{x}{l} \right)^2}$$

$$(4.4) \quad y \left(\frac{x}{l} \right) = \frac{1}{12} \frac{c}{P} f^2 \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{1}{2} f \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{M_0}{P} - \frac{T_0(x)}{P} l - \frac{1}{4} \frac{p}{P} l^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \\ - \frac{\gamma l^2}{P} \int_0^{x/l} f \left(\frac{\xi}{l} \right) \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l} \right) d \frac{\xi}{l}$$

Po podstawieniu wartości funkcji $f(x/l)$ do równania (4.4) i wykonania całkowania otrzymamy funkcję

$$(4.5) \quad y\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{12} \frac{c}{P} f^2\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{M_0}{P} - \frac{T_0}{P} \left(\frac{x}{l}\right) l - \frac{1}{4} \frac{p}{P} l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{\gamma}{2c} l^3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \\ - \frac{\gamma}{P} l^3 \left(\frac{x}{l}\right) \sqrt{\frac{3p}{c} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right) \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{P}{3cpl^2}} + \frac{P^2}{6cpl^2} \ln \frac{\frac{x}{l} + \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{P^2}{3cpl^2}}}{\sqrt{\frac{P^2}{3cpl^2}}} \right]} + \\ + \frac{\gamma}{P} l^3 \sqrt{\frac{p}{3c} \left[\frac{P^2}{3cpl^2} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]^3} - \frac{\gamma P^2}{9c^2 p}$$

Jest to ogólna postać ścisłego rozwiązania zagadnienia. Obok tego rozwiązania można podobnie jak poprzednio przyjąć funkcję $f(x/l)$ w postaci szeregu potęgowego parzystego, przy czym współczynniki nieoznaczone można określić z równania (4.3). Po wyznaczeniu kilku pierwszych wyrazów szeregu i podstawieniu do równania (4.4) otrzymamy prostą postać funkcji $y(x/l)$.

Następnie przedstawimy dwa przykłady, w których wyznaczono obie poszukiwane funkcje przy różnych parametrach. Wartość funkcji obliczono ze wzorów ścisłych, po czym porównano je z wynikami rachunku przybliżonego, który wykonano przyjmując trzy pierwsze wyrazy szeregu potęgowego o postaci (3.14). Największa różnica rzędnych wynosiła 0,9% wartości obliczonej w sposób ścisły.

4.2. Przykłady liczbowe. Przykład 3.

$$p = 0,02 \frac{P}{l}, \quad \gamma = 0,2 \frac{P}{l^2}, \quad c = 50 \frac{P}{l},$$

$$M_0 = 0,01 Pl, \quad T_0 = 0,005 P.$$

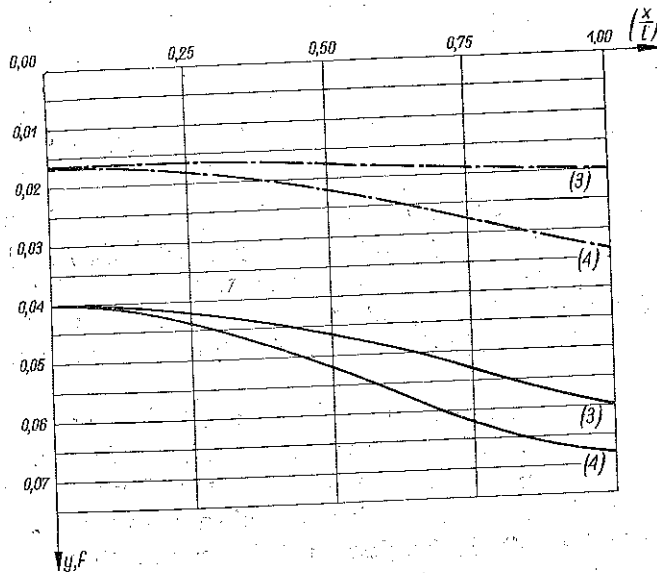
Otrzymane funkcje posiadają następującą postać:

$$f\left(\frac{x}{l}\right) = 0,04 l + 0,02623 \left(\frac{x}{l}\right)^2 l - 0,00623 \left(\frac{x}{l}\right)^4 l, \\ y\left(\frac{x}{l}\right) = 4,167 f^2\left(\frac{x}{l}\right) \frac{1}{l} + 0,5 f\left(\frac{x}{l}\right) - 0,01 l - 0,005 \left(\frac{x}{l}\right) l - \\ - 0,009 \left(\frac{x}{l}\right)^2 l - 0,0004372 \left(\frac{x}{l}\right)^4 l + 0,0000417 \left(\frac{x}{l}\right)^6 l.$$

Przykład 4. $p = 0,04 P/l$, pozostałe parametry jak w przykładzie poprzednim; otrzymane funkcje posiadają postać

$$f\left(\frac{x}{l}\right) = 0,04l + 0,04738\left(\frac{x}{l}\right)^2 l - 0,01446\left(\frac{x}{l}\right)^4 l,$$

$$y\left(\frac{x}{l}\right) = 4,167 f^2\left(\frac{x}{l}\right) \frac{1}{l} + 0,5 f\left(\frac{x}{l}\right) - 0,01 l - 0,005\left(\frac{x}{l}\right) l - \\ - 0,009\left(\frac{x}{l}\right)^2 l - 0,0007897\left(\frac{x}{l}\right)^4 l + 0,0000964\left(\frac{x}{l}\right)^6 l.$$



Rys. 3

Na rysunku 3 pokazano wykresy otrzymanych funkcji, przy czym cyframi oznaczono numery przykładów.

5. Wnioski

Przeprowadzone rozwiązania wstępne i próby kształtowania wytrzymałościowego belek pozwalają na wyciągnięcie kilku wniosków dotyczących sposobu traktowania tego zagadnienia.

1. Otrzymane rozwiązania mogą być w praktyce wykorzystane do kształtowania betonowych belek sprężonych.

2. Omówioną metodą można uzyskiwać znaczne zmniejszenie ilości materiałów (betonu i stali kablowej) oraz wielkości momentów zginających od ciężaru własnego. Oszczędności te mają znaczenie w elementach o dużych rozpiętościach i obciążeniach.

3. Otrzymane rozwiązania są w ogólnych zarysach zgodne z intuicyjnym doborem kształtu belek wspornikowych i trasy kabli.

4. Kształt belki jest dany przez całą eliptyczną, która pozostaje w określonym związku z łukiem pewnej elipsy.

5. W przypadku niewielkiego obciążenia użytkowego trasa kabli powinna niewiele odbiegać od linii prostej.

6. Dalsze poszukiwania najbardziej celowych kształtów należy prowadzić rozpatrując belki o teowych lub skrzynkowych przekrojach poprzecznych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Galileo Galilei, *Discorsi e dimonstrazioni matematiche interno a due scienze attenenti alla mecanica et i movimenti locali*, 1638.
- [2] F. Blondel, *Epistula ad P. Wurtius...*, Data Parisiis 1661.
- [3] P. S. Girard, *Traité analitique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance*, 1798.
- [4] T. Young, *Course of Lectures on Natural Philisophy*, 1807.
- [5] W. Swida, *Über die Form eines Pfeiters gleicher Festigkeit bei gleichzeitiger Druck- und Biegebeanspruchung*, Zeitschr. Ang. Math. Mech., 1934.
- [6] K. Ludwig, *Über Fräger mit Eigengewicht und gleichem Widerstand gegen Biegung*, ZAMM, 1936.
- [7] Z. Wasiutyński, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, cz. I, II, III, Warszawa 1939.
- [8] Z. Wasiutyński, *Podstawowe wiadomości o kształtowaniu wytrzymałościowym*, Arch. Inżyn. Łąd. 1 (1956).
- [9] Z. Wasiutyński, *O formach budowlanych i ich kształtowaniu*, Podst. Probl. Współcz. Techn., t. 1, PWN, Warszawa 1956.
- [10] A. Brandt i Z. Wasiutyński, *Kształtowanie wytrzymałościowe płyt z betonu sprężonego*, Inżyn. Bud. 2 (1957).
- [11] A. Brandt, *Kształtowanie belek sprężonych*, Inżyn. Bud. 1 (1958).

Резюме

ОФОРМЛЕНИЕ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ УЧЕТЕ МЕХАНИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

В работе определяется высота предварительно напряженной консольной балки, находящейся под влиянием собственного веса и полезной нагрузки. Относительно предварительно напряженной конструкции вводится вопрос оформления. Подобные проблемы обсуждались уже Галилеем и его преемниками. Целью рассуждений является оформление балки, которое отвечает минимуму потенциала упругой энергии, при сохранении постоянного объема материала. Этот вопрос заменяем проблемой, в которой предполагается, что напряжения в определенных сечениях балки являются постоянными.

В первом случае оформляется балка при прямой трассе арматуры, параллельной к верхнему краю балки и при переменной высоте балки по ее длине.

Во втором случае рассматривается балка, в которой выступают две неизвестные функции, определяющие высоту балки и направление, по которому действует внутренняя сила.

Пользуясь этим методом, можно сэкономить значительное количество материала, как напр. бетона и арматуры, а также уменьшить значения изгибающих моментов, вызываемых собственным весом. Эта экономия имеет значение при крупных элементах и элементах, подвергающихся большой нагрузке. Полученные решения, в общих чертах, согласовываются с интуитивным подбором формы консольных балок и трассы арматуры.

В работе дается точное математическое решение в виде эллиптического интеграла, равно как и приближенные методы, позволяющие без труда определить искомые функции.

Summary

THE FORM OF A CANTILEVER BEAM

The object of this paper is the determination of the height of a cantilever beam subjected to its own weight and a useful load. The paper is a generalization to prestressed structures of the problem stated by Galileo and his successors. The aim of the present consideration is to obtain the form of a beam having minimum elastic potential for the same material volume, which is connected with obtaining uniform extremum normal stresses along the beam.

In the first case, the form of the beam is determined for a straight cable parallel to the upper surface of the beam, the beam height being variable along the beam span.

The second case concerns a beam with two unknown functions determining the beam height and the line of the internal force.

The method described enables us to obtain considerable reduction of material (concrete and cable) and bending moments due to the weight of the beam itself. These economies are important for large-span beams and high loads. The solutions obtained are in general in agreement with the intuitive choice of the form of a cantilever beam and that of cable axis.

The accurate solution in the form of an elliptic integral and approximate methods enabling easy determination of the functions required are described.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 września 1957 r.