

FRANCISZEK SZELAŃGOWSKI

TARCZA KOŁOWA
POD WPLYWEM DZIAŁANIA SIŁY SKUPIONEJ
I OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO

PIERŚCIEN KOŁOWY
POD WPLYWEM DZIAŁANIA DANEGO OBCIĄŻENIA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXXVII-LXXXVIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Tarcza kołowa pod wpływem działania siły skupionej i obciążenia ciągłego	5
2. Pierścień kołowy pod wpływem działania danego obciążenia	12

Politechnika Poznańska
Katedra Mechaniki
i Automatów Sprzętowych
Poznań, ul. Strzelecka 11
tel. 88-77

TARCZA KOŁOWA POD WPLYWEM DZIAŁANIA SIŁY SKUPIONEJ I OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO

Określenie stanu napięcia tarczy kołowej, poddanej działaniu siły skupionej Q i obciążenia ciągłego p działającego na część powierzchni bocznej (rys. 1), zostanie poprzedzone rozwiązaniem pewnego pomocniczego zagadnienia polegającego na określeniu naprężeń w dowolnym punkcie powyższej tarczy kołowej, lecz obciążonej w sposób uwidoczniiony na rys. 2, tj. obciążonej na jednej części obwodu obciążeniem ciągłym p , a na innej obciążeniem ciągłym q .

Zagadnienie to zostanie rozwiązane w zasadzie przy użyciu całki Poissona.

Podstawowe równania teorii sprężystości w funkcjach zmiennych zespolonych mają, jak wiadomo, postać następującą, [1]:

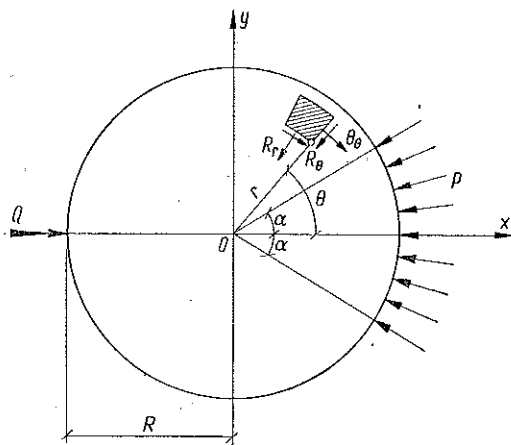
$$2R_{\theta} + i(R_r - \Theta_{\theta}) = -\frac{iz}{2} \Phi'(z) + \frac{z^2}{r^2} F(z),$$

$$R_r + \Theta_{\theta} = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

gdzie $\Phi(z)$ i $F(z)$ są to funkcje holomorficzne w obszarze położonym wewnątrz koła o promieniu R , zaś funkcja $\Phi_1(z_1)$ ma ten sam kształt co funkcja $\Phi(z)$, tylko zmienna zespolona z została w niej zastąpiona przez zmienną zespoloną z_1 . Wprowadzając do tych równań zmienną $\zeta = \xi + i\eta = \ln z = \ln r + i\theta$ znajdujemy:

$$r^2 [2R_{\theta} + i(R_r - \Theta_{\theta})] = -\frac{i}{2} r^3 \Phi'(\zeta) + e^{2\zeta} F(\zeta),$$

$$R_r + \Theta_{\theta} = \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)].$$



Rys. 1

Z równań tych otrzymujemy

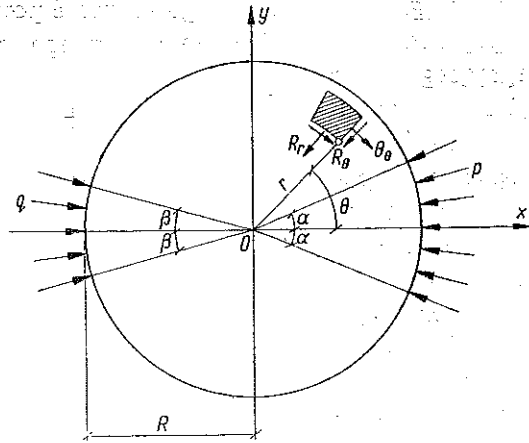
$$(1) \quad 2R_{\theta} r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \varphi,$$

$$(2) \quad (R_r - \Theta_{\theta}) r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \psi,$$

$$(3) \quad R_r + \Theta_{\theta} = \Omega,$$

gdzie

$$\varphi + i\psi = e^{2\xi} F(\zeta).$$



Rys. 2

W rozpatrywanym zagadnieniu na obwodzie koła o promieniu $r = R$ mamy $R_{\theta} = 0$. Zatem z równania (1) powstanie zależność

$$(4) \quad -\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \varphi = 0,$$

zaś na podstawie równania (2) część zespolona przyjmie wtedy wartość

$$(5) \quad -\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \psi = C.$$

Ponadto z równań (2) i (3) otrzymujemy zależność następującą:

$$(6) \quad 2R_r r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \Omega r^2 + \psi.$$

Ponieważ na obwodzie tarczy kołowej panuje znane naprężenie R_R , to na podstawie zależności (6) można napisać

$$-\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \Omega R^2 + \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2R^2 p (R^2 - r^2) dt}{R^2 - 2Rr \cos(t - \Theta) + r^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \beta}^{\pi + \beta} \frac{2R^2 q (R^2 - r^2) dt}{R^2 - 2Rr \cos(t - \Theta) + r^2}$$

Uwzględniając w powyższej równości związek (5), otrzymamy ostatecznie

$$(7) \quad \Omega = \frac{R^2 - r^2}{\pi} \left[p \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{R^2 - 2Rr \cos(t - \Theta) + r^2} + q \int_{\pi - \beta}^{\pi + \beta} \frac{dt}{R^2 - 2Rr \cos(t - \Theta) + r^2} \right] - \frac{C}{R^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ p \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \Theta}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \Theta}{2} \right) \right] + q \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta - \Theta}{2} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\pi - \beta - \Theta}{2} \right) \right] \right\} - \frac{C}{R^2}$$

Mając w ten sposób określoną wartość sumy naprężeń $R_r + \Theta_\Theta = \Omega$, można z kolei określić wartość naprężenia R_Θ korzystając z zależności (1) oraz (4).

Zatem będzie

$$2R_\Theta r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \Theta} + \varphi = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \Theta},$$

skąd otrzymujemy

$$(8) \quad R_\Theta = \frac{R^2 - r^2}{4r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \Theta},$$

gdzie

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Theta} = \frac{R^2 - r^2}{\pi} \left\{ p \left[\frac{1}{(R+r)^2 \sin^2 \frac{\alpha - \Theta}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\alpha - \Theta}{2}} + \frac{1}{(R+r)^2 \sin^2 \frac{\alpha + \Theta}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\alpha + \Theta}{2}} \right] + q \left[\frac{1}{(R+r)^2 \sin^2 \frac{\pi + \beta - \Theta}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\pi + \beta - \Theta}{2}} + \frac{1}{(R+r)^2 \sin^2 \frac{\pi - \beta - \Theta}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\pi - \beta - \Theta}{2}} \right] \right\}$$

Analizując powyższy wzór można zauważyć, że na obwodzie tarczy, tj. dla $r=R$ mamy $R_\theta=0$, zaś dla $r=0$ naprężenie R_θ posiada wartość skończoną.

Należy dodać, że z równania rzutów sił (działających na tarczę) na oś poziomą wynika równość

$$\int_0^a p R d a \cos a = \int_0^\beta q R d \beta \cos \beta,$$

z której wynika zależność

$$p \sin a = q \sin \beta.$$

Wartość naprężenia R_r można określić z równości (6) przy jednoczesnym uwzględnieniu związku (5).

Tak więc wzór określający wartość naprężenia R_r ma tutaj następującą postać:

$$(9) \quad R_r = \frac{R^2 - r^2}{4r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\Omega}{2} + \frac{C}{2r^2} = \frac{(R^2 - r^2)}{\pi} \frac{R}{r} \times$$

$$\times \left\{ p \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{a - \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a - \theta}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{a + \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a + \theta}{2}} \right] + \right.$$

$$\left. + q \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi + \beta - \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi + \beta - \theta}{2}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi - \beta - \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \beta - \theta}{2}} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ p \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{a - \theta}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{a + \theta}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + q \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta - \theta}{2} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\pi - \beta - \theta}{2} \right) \right] \right\},$$

przy czym stała C musi mieć wartość równą zero, gdyż dla $r=0$ naprężenie R_r nie może osiągać wartości nieskończenie wielkiej.

Z powyżej wyprowadzonego wzoru określającego wartość naprężenia R_r można zauważyć, że na obwodzie tarczy kołowej, tj. dla $r=R$ i $-a < \theta < a$, mamy $R_r = p$, zaś dla $\pi - \beta < \theta < \pi + \beta$ naprężenie $R_r = q$, a dla $r=R$ i $a < \theta < \pi - \beta$ oraz $\pi + \beta < \theta < 2\pi - a$ naprężenie $R_r = 0$.

Ponadto dla $r=0$ posiada R_r wartość skończoną.

Co się tyczy wartości naprężenia θ_θ , to wartość powyższego naprężenia można określić ze wzoru

$$\theta_\theta = \Omega - R_r,$$

gdzie Ω oraz R_r zostały określone już uprzednio wzorami (7) i (9).

Zatem będzie

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \Theta_\theta = & \frac{1}{\pi} \left\{ p \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha+\theta}{2} \right) \right] + \right. \\
 & + q \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\pi+\beta-\theta}{2} \right) - \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\pi-\beta-\theta}{2} \right) \right] \right\} - \frac{(R^2-r^2)}{\pi} \frac{R}{r} \times \\
 & \times \left\{ p \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2}}{(R-r)^2 + (R+r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha-\theta}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\theta}{2}}{(R-r)^2 + (R+r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha+\theta}{2}} \right] + \right. \\
 & \left. + q \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi+\beta-\theta}{2}}{(R-r)^2 + (R+r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi+\beta-\theta}{2}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi-\beta-\theta}{2}}{(R-r)^2 + (R+r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi-\beta-\theta}{2}} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Mając w ten sposób rozwiązane pomocnicze zagadnienie można rozwiązać zagadnienie wymienione na wstępie, a polegające na zastąpieniu częściowego obciążenia ciągłego q siłą skupioną Q , przy czym wartość powyższej siły musi wynosić $Q = 2qR \sin \beta = 2pR \sin \alpha$.

Aby otrzymać ze wzorów (8), (9) i (10) wartości odpowiednich naprężeń, należy w wyrazach zawierających kąt β zastąpić wielkość q wartością $Q/2R \sin \beta$ i zmniejszać wartość kąta β do zera, obliczając przy tym w znany sposób powstające nieokreśloności.

Zatem po wykonaniu odpowiednich działań otrzymamy następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 R_\theta = & \frac{(R^2-r^2)^2}{4\pi r^2} \left\{ p \left[\frac{1}{(R+r)^2 \sin^2 \frac{\alpha-\theta}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\alpha-\theta}{2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{(R+r)^2 \sin^2 \frac{\alpha+\theta}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\alpha+\theta}{2}} \right] + \right. \\
 & \left. + 2Q \frac{r \sin \theta}{\left[(R-r)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + (R+r)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$R_r = \frac{(R^2 - r^2) R}{\pi r} \times$$

$$\times \left\{ p \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha - \theta}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \theta}{2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{Q}{2R} \frac{(R - r)^2 - (R + r)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \left[(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right]^2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ p \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \theta}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{Q}{2R} \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + (R + r)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\}$$

$$\theta_\theta = \frac{1}{\pi} \left\{ p \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \theta}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{Q}{2R} \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + (R + r)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} -$$

$$\frac{R^2 - r^2}{\pi} \frac{R}{r} \left\{ p \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha - \theta}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \theta}{2}}{(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \theta}{2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{Q}{2R} \frac{(R - r)^2 - (R + r)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \left[(R - r)^2 + (R + r)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right]^2} \right\}$$

W podobny sposób można będzie otrzymać rozwiązanie stanu napiecia tarczy kołowej, obciążonej na obwodzie dowolną ilością sił skupionych oraz częściowych obciążeń ciągłych, tworzących jednakże układ sił pozostających w równowadze.

Literatura cytowana w tekście

[1] Г. В. Колосов, *Применение комплексной переменной к теории упругости*, Moskwa-Leningrad 1935.

Резюме

КРУГОВОЙ ДИСК ПОД ВЛИЯНИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ И НАГРУЗКИ

В настоящей работе выводятся формулы определяющие значения напряжений R_{θ} , R_r и Θ_{θ} в произвольной точке кругового диска, находящейся под действием частичной сплошной нагрузки q , расположенной по окружности и частичной сплошной нагрузки p .

Затем выводятся формулы, определяющие значения соответствующих напряжений R_{θ} , R_r и Θ_{θ} , в случае нагрузки этого тела сосредоточенной силой Q и под действием частичной сплошной нагрузки p .

Summary

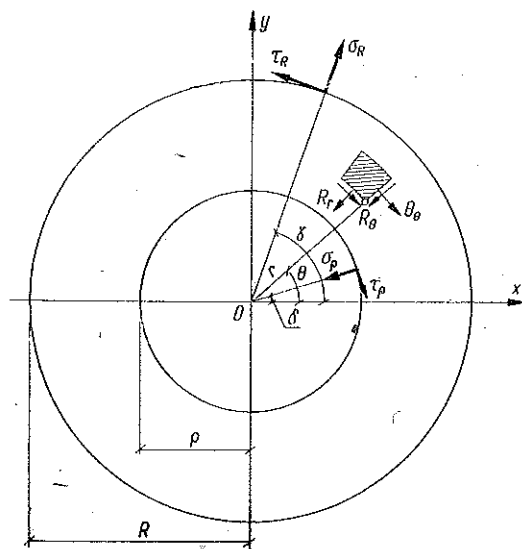
CIRCULAR DISC UNDER CONCENTRATED AND DISTRIBUTED LOAD

This paper contains first the derivation of equations determining the stresses R_{θ} , R_r and Θ_{θ} at any point of a circular disc with two continuously distributed loads q and p acting on the periphery and then — the derivation of the analogous equations for a concentrated load Q and a continuously distributed load p .

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 lutego 1957 r.

PIERŚCIEN KOŁOWY POD WPLYWEM DZIAŁANIA DANEGO OBCIĄŻENIA

Rozwiązanie zagadnienia dotyczącego stanu napięcia izotropowego pierścienia kołowego pod wpływem działania danego obciążenia sprowadza się w zasadzie do wyznaczenia wartości naprężeń R_θ , R_r i Θ_θ (rys. 1) oraz przemieszczeń u_r i u_θ dla dowolnego punktu tego pierścienia.



Rys. 1

Wartości powyższych naprężeń i przemieszczeń przy użyciu zmiennych zespolonych określają, jak wiadomo, następujące wzory, [1]:

$$(1) \quad 2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta) = -\frac{iz}{2} \Phi'(z) + \frac{z^3}{r^2} F(z),$$

$$(2) \quad R_r + \Theta_\theta = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z)],$$

$$(u_\theta + iu_r) e^{-i\theta} = -\frac{i}{8\mu} z_1 \Phi(z) + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(z) dz,$$

gdzie, jak widać, występują tylko dwie niewiadome funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$. Istotą więc takiego zagadnienia będą właściwie sprawy związane z określeniem głównie tych funkcji.

Jednak przed przystąpieniem do rozwiązania tak postawionego zagadnienia zostaną najpierw ustalone związki, zachodzące pomiędzy wartością funkcji holomorficznej $f(z)$ w pewnym punkcie obszaru pierścieniowego, a wartością części rzeczywistej jak również i części urojonej, jakie przybiera ta funkcja na kole zewnętrznym o promieniu R i na kole wewnętrznym o promieniu ϱ tego obszaru pierścieniowego. Wyprowadzone wzory znajdują w pracy zastosowanie.

Jak wiadomo, funkcję holomorficzną $f(z)$ w obszarze pierścieniowym można przedstawić w postaci szeregu Laurenta

$$(3) \quad f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n z^n + b_n z^{-n}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n e^{in\theta} + b_n r^{-n} e^{-in\theta}).$$

Dla pewnego punktu $\mu = Re^{i\gamma}$ koła zewnętrznego funkcja ta przybiera wartość

$$f(\mu) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R^n e^{in\gamma} + b_n R^{-n} e^{-in\gamma}),$$

co można napisać też w postaci następującej:

$$(4) \quad f(\mu) = \varphi_R(\gamma) + i\psi_R(\gamma) = a_0 + ia'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + ia'_n)R^n (\cos n\gamma + i \sin n\gamma) + (\beta_n + i\beta'_n)R^{-n} (\cos n\gamma - i \sin n\gamma)],$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$(5) \quad a_0 = a_0 + ia'_0, \quad a_n = a_n + ia'_n, \quad b_n = \beta_n + i\beta'_n.$$

Zc wzoru (4) otrzymujemy zatem

$$\varphi_R(\gamma) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n R^n + \beta_n R^{-n}) \cos n\gamma - (a'_n R^n - \beta'_n R^{-n}) \sin n\gamma],$$

$$\psi_R(\gamma) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n R^n + \beta'_n R^{-n}) \cos n\gamma + (a_n R^n - \beta_n R^{-n}) \sin n\gamma];$$

stąd wynikają związki

$$(6) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) d\gamma, & a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) d\gamma, \\ a_n R^n + \beta_n R^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \cos n\gamma d\gamma, & a'_n R^n + \beta'_n R^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) \cos n\gamma d\gamma, \\ a'_n R^n - \beta'_n R^{-n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \sin n\gamma d\gamma, & a_n R^n - \beta_n R^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) \sin n\gamma d\gamma. \end{cases}$$

Podobnie dla pewnego punktu $w = \rho e^{i\delta}$ wewnętrznego koła obszaru pierścieniowego funkcja $f(z)$ przybiera postać:

$$f(w) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n e^{in\delta} + b_n \rho^{-n} e^{-in\delta}) = a_0 + i\alpha'_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n + i\alpha'_n) \rho^n (\cos n\delta + i \sin n\delta) + (\beta_n + i\beta'_n) \rho^{-n} (\cos n\delta - i \sin n\delta)] = \\ = \varphi_\rho(\delta) + i\psi_\rho(\delta),$$

skąd mamy

$$\varphi_\rho(\delta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \rho^n + \beta_n \rho^{-n}) \cos n\delta - (\alpha'_n \rho^n - \beta'_n \rho^{-n}) \sin n\delta],$$

$$\psi_\rho(\delta) = \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha'_n \rho^n + \beta'_n \rho^{-n}) \cos n\delta + (\alpha_n \rho^n - \beta_n \rho^{-n}) \sin n\delta]$$

oraz

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) d\delta, & \alpha'_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) d\delta, \\ a_n \rho^n + \beta_n \rho^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) \cos n\delta d\delta, & \alpha'_n \rho^n + \beta'_n \rho^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) \cos n\delta d\delta, \\ \alpha'_n \rho^n - \beta'_n \rho^{-n} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) \sin n\delta d\delta, & \alpha_n \rho^n - \beta_n \rho^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) \sin n\delta d\delta. \end{aligned} \right.$$

Ze wzorów (6) i (7) otrzymujemy

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) d\delta, \\ a_n &= \frac{1}{\pi(R^{2n} - \rho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \cos n\gamma d\gamma - \rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) \cos n\delta d\delta \right], \\ \beta_n &= \frac{\rho^n R^n}{\pi(\rho^{2n} - R^{2n})} \left[\rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \cos n\gamma d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) \cos n\delta d\delta \right], \\ \alpha'_n &= \frac{1}{\pi(\rho^{2n} - R^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \sin n\gamma d\gamma - \rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) \sin n\delta d\delta \right], \\ \beta'_n &= \frac{\rho^n R^n}{\pi(\rho^{2n} - R^{2n})} \left[\rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \sin n\gamma d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) \sin n\delta d\delta \right], \end{aligned} \right.$$

oraz ponadto

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) d\delta, \\ \alpha_n = \frac{1}{\pi(R^{2n} - \rho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) \sin n\gamma d\gamma - \rho^n \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) \sin n\delta d\delta \right], \\ \beta_n = \frac{\rho^n R^n}{\pi(R^{2n} - \rho^{2n})} \left[\rho^n \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) \sin n\gamma d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) \sin n\delta d\delta \right], \\ \alpha'_n = \frac{1}{\pi(R^{2n} - \rho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) \cos n\gamma d\gamma - \rho^n \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) \cos n\delta d\delta \right], \\ \beta'_n = \frac{\rho^n R^n}{\pi(\rho^{2n} - R^{2n})} \left[\rho^n \int_0^{2\pi} \psi_R(\gamma) \cos n\gamma d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} \psi_\rho(\delta) \cos n\delta d\delta \right]. \end{cases}$$

Uwzględniając wyniki (8) i (9) we wzorach (5) znajdujemy:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) d\gamma + i\alpha'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) d\delta + i\alpha'_0, \\ \alpha_n = \frac{1}{\pi(R^{2n} - \rho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) e^{-in\gamma} d\gamma - \rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) e^{-in\delta} d\delta \right], \\ \beta_n = \frac{\rho^n R^n}{\pi(\rho^{2n} - R^{2n})} \left[\rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) e^{in\gamma} d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} \varphi_\rho(\delta) e^{in\delta} d\delta \right] \end{cases}$$

oraz

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \alpha_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) d\gamma = \alpha_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_\rho(\delta) d\delta, \\ \alpha_n = \frac{1}{\pi(R^{2n} - \rho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) e^{-in\gamma} d\gamma - \rho^n \int_0^{2\pi} i\psi_\rho(\delta) e^{-in\delta} d\delta \right], \\ \beta_n = \frac{\rho^n R^n}{\pi(\rho^{2n} - R^{2n})} \left[\rho^n \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) e^{in\gamma} d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} i\psi_\rho(\delta) e^{in\delta} d\delta \right]. \end{cases}$$

Wprowadzając wyżej otrzymane wartości współczynników (10) i (11) do wzoru (3) można napisać:

$$(12) \quad f(z) = ia'_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) d\gamma + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} \frac{1}{\pi(R^{2n} - \varrho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) e^{-in\gamma} d\gamma - \varrho^n \int_0^{2\pi} \varphi_\varrho(\delta) e^{-in\delta} d\delta \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} e^{-in\theta} \frac{\varrho^n R^n}{\pi(\varrho^{2n} - R^{2n})} \left[\varrho^n \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) e^{in\gamma} d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} \varphi_\varrho(\delta) e^{in\delta} d\delta \right],$$

jak również

$$(13) \quad f(z) = a_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) d\gamma + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} \frac{1}{\pi(R^{2n} - \varrho^{2n})} \left[R^n \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) e^{-in\gamma} d\gamma - \varrho^n \int_0^{2\pi} i\psi_\varrho(\delta) e^{-in\delta} d\delta \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} e^{-in\theta} \frac{\varrho^n R^n}{\pi(\varrho^{2n} - R^{2n})} \left[\varrho^n \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) e^{in\gamma} d\gamma - R^n \int_0^{2\pi} i\psi_\varrho(\delta) e^{in\delta} d\delta \right].$$

Wzory (12) i (13) można napisać również w postaci:

$$(14) \quad f(z) = ia'_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{R^{2n} - \varrho^{2n}} (z^n e^{-in\gamma} - \\ - z^{-n} e^{in\gamma} \varrho^{2n}) d\gamma - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\varrho(\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^{2n} - \varrho^{2n}} (z^n e^{-in\delta} - z^{-n} e^{in\delta} R^{2n}) d\delta = \\ = ia'_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_R(\gamma) M d\gamma - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\varrho(\delta) N d\delta,$$

$$(15) \quad f(z) = a_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{R^{2n} - \varrho^{2n}} (z^n e^{-in\gamma} - \\ - z^{-n} e^{in\gamma} \varrho^{2n}) d\gamma - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_\varrho(\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^{2n} - \varrho^{2n}} (z^n e^{-in\delta} - z^{-n} e^{in\delta} R^{2n}) d\delta = \\ = a_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_R(\gamma) M d\gamma - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i\psi_\varrho(\delta) N d\delta,$$

gdzie oznaczono

$$(16) \quad M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{R^{2n} - \varrho^{2n}} (z^n e^{-in\gamma} - z^{-n} e^{in\gamma} \varrho^{2n}),$$

$$(17) \quad N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^{2n} - \varrho^{2n}} (z^n e^{-in\delta} - z^{-n} e^{in\delta} R^{2n}).$$

Tak więc wzór (14) określa funkcję holomorficzną $f(z)$ w dowolnym punkcie obszaru pierścieniowego, gdy dana jest jej część rzeczywista $\varphi_R(\gamma)$ na kole zewnętrznym oraz jej część rzeczywista $\varphi_\varrho(\delta)$ na kole wewnętrznym, zaś wzór (15) określa również tę samą funkcję holomorficzną $f(z)$ w dowolnym punkcie obszaru pierścieniowego, lecz gdy dana jest jej część urojona $i\psi_R(\gamma)$ na kole zewnętrznym oraz jej część urojona $i\psi_\varrho(\delta)$ na kole wewnętrznym.

Ponadto dodając stronami wzory (14) i (15) otrzymamy

$$(18) \quad 2f(z) = a_0 + ia'_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_R(\gamma) + i\psi_R(\gamma)] d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_R(\gamma) + i\psi_R(\gamma)] M d\gamma - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_\varrho(\delta) + i\psi_\varrho(\delta)] N d\delta,$$

zaś odejmując stronami wzory (14) i (15)

$$(19) \quad ia'_0 - a_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_R(\gamma) - i\psi_R(\gamma)] d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_R(\gamma) - i\psi_R(\gamma)] M d\gamma - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_\varrho(\delta) - i\psi_\varrho(\delta)] N d\delta = 0.$$

Wzór (18) określa funkcję holomorficzną $f(z)$ w dowolnym punkcie obszaru pierścieniowego, gdy dana jest jej wartość $\varphi_R(\gamma) + i\psi_R(\gamma)$ na kole zewnętrznym oraz $\varphi_\varrho(\delta) + i\psi_\varrho(\delta)$ na kole wewnętrznym, zaś wzór (19) daje zależność w przypadku wprowadzenia funkcji z nią sprzężonej.

Następnie zajmiemy się sprawą przekształcenia wzorów (16) i (17), określających wielkości M i N .

Otóż wielkości te można napisać w postaciach następujących:

$$(20) \quad M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n}} \left[z^n e^{-in\gamma} R^{-n} - z^{-n} e^{in\gamma} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n} R^n \right],$$

$$(21) \quad N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n}{1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n}} \left[z^n e^{-in\delta} R^{-n} - z^{-n} e^{in\delta} R^n \right].$$

Ponieważ

$$\frac{q}{R} = q < 1$$

oraz

$$\frac{1}{1 - q^{2n}} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} q^{2nh},$$

więc wzory (20) i (21) przyjmą postać odpowiednio zmienioną, mianowicie

$$\begin{aligned} (22) \quad M &= \sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-iny} R^{-n} - z^{-n} e^{iny} R^n q^{2n}) + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-iny} R^{-n} - q^{2n} z^{-n} e^{iny} R^n) q^{2nh} = \frac{ze^{-iy} R^{-1}}{1 - ze^{-iy} R^{-1}} - \\ &- \frac{q^2 z^{-1} e^{iy} R}{1 - q^2 z^{-1} e^{iy} R} + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2h} z R^{-1} e^{-iy}}{1 - q^{2h} z R^{-1} e^{-iy}} - \frac{q^{2h+2} z^{-1} R e^{iy}}{1 - q^{2h+2} z^{-1} R e^{iy}} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1} \left(\frac{z}{q R e^{iy}} - \frac{q R e^{iy}}{z} \right)}{1 - q^{2k-1} \left(\frac{z}{q R e^{iy}} + \frac{q R e^{iy}}{z} \right) + q^{4k-2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23) \quad N &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n (z^n e^{-in\delta} R^{-n} - z^{-n} e^{in\delta} R^n) + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-in\delta} R^{-n} - z^{-n} e^{in\delta} R^n) q^{n(1+2h)} = \frac{qzR^{-1}e^{-i\delta}}{1 - qzR^{-1}e^{-i\delta}} - \\ &- \frac{qz^{-1}Re^{i\delta}}{1 - qz^{-1}Re^{i\delta}} + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2h+1}zR^{-1}e^{-i\delta}}{1 - q^{2h+1}zR^{-1}e^{-i\delta}} - \frac{q^{2h+1}z^{-1}Re^{i\delta}}{1 - q^{2h+1}z^{-1}Re^{i\delta}} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1} \left(\frac{z}{Re^{i\delta}} - \frac{Re^{i\delta}}{z} \right)}{1 - q^{2k-1} \left(\frac{z}{Re^{i\delta}} + \frac{Re^{i\delta}}{z} \right) + q^{4k-2}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$k = h + 1.$$

Wprowadźmy jeszcze do wzoru (22) zmienną

$$t = \frac{K}{i\pi} \ln \frac{z}{qR} - \frac{K\gamma}{\pi},$$

zaś do wzoru (23) zmienną

$$v = \frac{K}{i\pi} \ln \frac{z}{R} - \frac{K\delta}{\pi},$$

gdzie K oznacza połowę okresu funkcji eliptycznych. Znajdziemy wówczas

$$M = 2i \sin \frac{\pi t}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1 - 2q^{2k-1} \cos \frac{\pi t}{K} + q^{4k-2}} = \frac{iK}{\pi} \frac{\vartheta_4'(t)}{\vartheta_4(t)},$$

$$N = 2i \sin \frac{\pi v}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1 - 2q^{2k-1} \cos \frac{\pi v}{K} + q^{4k-2}} = \frac{iK}{\pi} \frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)},$$

gdzie $\vartheta_4(t)$ lub $\vartheta_4(v)$ są to funkcje Jacobi'ego.

Powyższe zagadnienie w nieco odmiennym ujęciu zostało podane przez H. Villata, [2].

Teraz wróćmy do naszego właściwego zagadnienia postawionego na wstępie i oznaczmy naprężenia normalne i styczne, działające na zewnętrznym okręgu koła obszaru pierścieniowego, przez σ_R i τ_R , zaś naprężenia normalne i styczne, działające na wewnętrznym okręgu koła powyższego obszaru, odpowiednio przez σ_ρ i τ_ρ (rys. 1).

Dla dowolnego punktu obszaru pierścieniowego, jak łatwo stwierdzić, ma miejsce następująca zależność:

$$(R_r + \Theta_\Theta) = 2(R_r + iR_\Theta) - i[2R_\Theta - i(R_r - \Theta_\Theta)].$$

Zatem dla $r = R$, jak również dla $r = \rho$ można napisać

$$(R_r + \Theta_\Theta)_{r=R} = 2(\sigma_R + i\tau_R) - i[2R_\Theta - i(R_r - \Theta_\Theta)]_{r=R},$$

$$(R_r + \Theta_\Theta)_{r=\rho} = 2(\sigma_\rho + i\tau_\rho) - i[2R_\Theta - i(R_r - \Theta_\Theta)]_{r=\rho}.$$

Mając na względzie zależności (1) i (2) oraz stosując do wyrazów pierwszych wzór (14), do wyrazów drugich wzór (18), zaś do wyrazów trzecich wzór (19), znajdziemy

$$(24) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(\sigma_R + i\tau_R) d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2(\sigma_R + i\tau_R) M d\gamma - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2(\sigma_\rho + i\tau_\rho) N d\delta + C,$$

gdzie C oznacza pewną wielkość zespoloną stałą.

Z zależności

$$2(R_\Theta + iR_r) = [2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta)] + i(R_r + \Theta_\Theta) =$$

$$= \frac{iz}{2} \Phi'(z) + \frac{z^2}{r^2} F(z) + \frac{i}{2} \left[\Phi(z) + \Phi\left(\frac{r^2}{z}\right) \right],$$

отрzymujemy

$$F(z) = \frac{r^3}{z^2} \left\{ 2(R_\theta + iR_r) + \frac{iz}{2} \Phi'(z) - \frac{i}{2} \left[\Phi(z) + \Phi\left(\frac{r^2}{z}\right) \right] \right\},$$

przy czym dla $r = R$ oraz dla $r = \rho$ mamy odpowiednio

$$F(\mu) = \frac{R^3}{\mu^2} \left\{ 2(\tau_R + i\sigma_R) + \frac{i\mu}{2} \Phi'(\mu) - \frac{i}{2} \left[\Phi(\mu) + \Phi\left(\frac{R^2}{\mu}\right) \right] \right\},$$

$$F(w) = \frac{\rho^3}{w^2} \left\{ 2(\tau_\rho + i\sigma_\rho) + \frac{iw}{2} \Phi'(w) - \frac{i}{2} \left[\Phi(w) + \Phi\left(\frac{\rho^2}{w}\right) \right] \right\}.$$

Tutaj stosując wzór (18) otrzymamy ostatecznie

$$(25) \quad F(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \bar{F}(\mu) d\gamma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{F}(\mu) M d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(w) N d\delta + D,$$

gdzie D oznacza pewną stałą zespoloną.

Zatem funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$, określone wzorami (24) i (25), rozwiązują całość postawionego na wstępie zagadnienia.

W końcu należy nadmienić, że powyższy sposób jest dlatego dogodny, ponieważ umożliwia również rozwiązywanie innych zagadnień, w których obszary dwuspójne dają się odwzorować konforemnie na pierścieniu kołowy.

Literatura cytowana w tekście

[1] Г. В. Колосов, *Применение комплексной переменной к теории упругости*, Leningrad-Moskwa 1935.

[2] H. Villat, *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire*, Rendiconti del Circolo Mathem. di Palermo, t. 33, 1912.

Резюме

КРУГОВОЕ КОЛЬЦО ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАННОЙ НАГРУЗКИ

В настоящей работе дается решение вопроса, касающегося изотропного кругового кольца, подверженного действию данной нагрузки на внешней и внутренней окружностях. В принципе вопрос сводится к определению двух неизвестных голоморфных функций $\Phi(z)$ и $F(z)$, выступающих в формулах, определяющих значения напряжений R_θ , R_r и Θ_θ (рис. 1), а также принадлежащих перемещений u_r , u_θ для произвольной точки круговой области. Используя зависимости, существующие между значением голоморфной функции круговой об-

ласти и действительной частью, а также и мнимой частью, которые принимает эта функция на наружной, равно как и на внутренней окружностях этого кругового пространства, выводятся окончательные формулы (24) и (25), определяющие искомые функции $\Phi(z)$ и $F(z)$.

Summary

A CIRCULAR RING UNDER THE ACTION OF A GIVEN LOAD

A solution of the problem of an isotropic circular ring subjected to an arbitrary load on the inner and the outer circle. This problem reduces essentially to the determination of two unknown analytic functions, $\Phi(z)$ and $F(z)$, appearing in the equations for the stresses R_θ , R_r and Θ_θ (Fig. 1), and the corresponding displacements u_r , u_θ for any point of the region. Using the relations between the value of an analytic function at any point of a ring region, and its real and imaginary part on the inner and the outer circle, final equations (24) and (25) are derived for the functions $\Phi(z)$ and $F(z)$.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 września 1957 r.