FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

# TARCZA KSZTAŁTU PÓŁPŁASZCZYZNY POD WPŁYWEM DZIAŁANIA OBCIĄŻENIA WEWNĘTRZNEGO

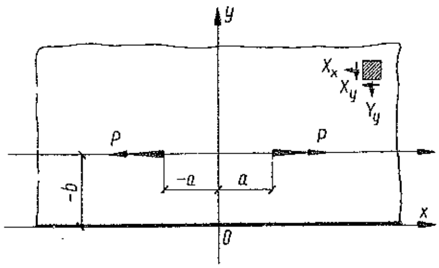
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXXVI

Sprawa określenia stanu napięcia tarczy kształtu półpłaszczyzny pod wpływem działania wewnętrznych sił skupionych oraz momentów będzie się sprowadzała w zasadzie do wyznaczenia naprężeń $X_y$, $X_x$, $Y_y$, panujących w dowolnym punkcie tej tarczy.

Wzory określające wartości wymienionych naprężeń przy wprowadzeniu zmiennych zespolonych $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ mają, jak wiadomo, [1], następującą postać:

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2}\,[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z),$$



Rys. 1

przy czym funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$ zostaną wyznaczone tutaj za pomocą wzoru S c h w a r z a.

Obciążenie wewnętrzne będą stanowiły dwie siły skupione, równoległe do prostolinijnego zarysu omawianej tarczy (rys. 1).

W przypadku tarczy nieograniczonej, obciążonej dwiema siłami $P$, działającymi w punktach położonych w odległości $a$ od początku układu współrzędnych, funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ będą miały zgodnie z pracą [2] postać następującą:

$$\Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right),$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a}\right),$$

$$F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)}\left\{-a\left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2}\right] + k\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)\right\},$$

gdzie

$$k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Powyższe funkcje po przeniesieniu początku układu współrzędnych (rys. 1) do punktu $(0, -b)$ przyjmą kształt odpowiednio zmieniony, mianowicie:

$$\Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z-a-ib} - \frac{1}{z+a-ib}\right),$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z_1-a+ib} - \frac{1}{z_1+a+ib}\right),$$

$$F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)}\left[-\frac{a+ib}{(z+a-ib)^2} - \frac{a-ib}{(z-a-ib)^2} + k\left(\frac{1}{z-a-ib} - \frac{1}{z+a-ib}\right)\right].$$

Na prostej $y=0$ tarczy nieograniczonej panują naprężenia $X_y, Y_y$, których wartości można będzie określić ze wzorów następujących:

$$(1) \qquad 2(Y_y+iX_y) = i[2X_y+i(X_x-Y_y)]+X_x+Y_y = i\left[-\frac{i}{2}z_1\Phi'(z)+F(z)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)] = \frac{P}{\pi(1+k)}z_1\left[\frac{1}{(z+a-ib)^2} - \frac{1}{(z-a-ib)^2}\right]+$$
$$+\frac{P}{\pi(1+k)}\left[\frac{a+ib}{(z+a-ib)^2} + \frac{a-ib}{(z-a-ib)^2} - k\left(\frac{1}{z-a-ib} - \frac{1}{z+a-ib}\right)\right]+$$
$$+\frac{P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z-a-ib} - \frac{1}{z+a-ib} + \frac{1}{z_1-a+ib} - \frac{1}{z_1+a+ib}\right).$$

Przykładając do prostej $y=0$ naprężenia $X_y, Y_y$ określone wzorem (1), lecz ze znakiem przeciwnym, i dodając powstałe przy tym naprężenia do naprężeń wyznaczonych uprzednio w tarczy nieograniczonej, otrzymamy w wyniku działań naprężenia panujące w dowolnym punkcie tarczy kształtu półpłaszczyzny, powstałe pod działaniem dwóch sił skupionych $P$ (rys. 1).

Lecz określenie naprężeń w tarczy kształtu półpłaszczyzny będzie możliwe dopiero po wyznaczeniu odnośnych funkcji $\Phi(z)$ i $F(z)$.

W tym celu zostanie zużytkowany wzór Schwarza

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{dt}{t-z} + ib_0,$$

określający funkcję holomorficzną $f(z)$ w obszarze ograniczonym górną półpłaszczyzną, gdy znana jest wartość rzeczywista $\varphi(t)$ tej funkcji na brzegu obszaru, a więc na prostej $y=0$, czyli na osi $x$.

Podobny kształt ma również wzór

$$(3) \qquad f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} i\psi(t)\frac{dt}{t-z}+a_0,$$

określający funkcję holomorficzną $f(z)$ w obszarze ograniczonym górną półpłaszczyzną, gdy znana jest wartość urojona $i\psi(t)$ tej funkcji na brzegu tego obszaru, tj. na prostej $y=0$, czyli na osi $x$.

Dodając stronami wzór (2) i (3) otrzymujemy

$$(4) \qquad 2f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t)+i\psi(t)]\frac{dt}{t-z}+ib_0+a_0,$$

zaś odejmując wzór (3) od wzoru (2) mamy

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t)-i\psi(t)]\frac{dt}{t-z}+ib_0-a_0=0.$$

Wzór (4) określa funkcję holomorficzną w górnej półpłaszczyźnie, gdy znana jest część rzeczywista i część urojona tej funkcji na brzegu powyższego obszaru. Natomiast wzór (5) wskazuje na to, że w przypadku wiadomej funkcji sprzężonej na brzegu półpłaszczyzny otrzymujemy w wyniku określonych działań tylko wielkość stałą.

Przechodząc do sprawy określenia funkcji $\Phi(z)$ napiszemy w tym celu równość następującą:

$$(6) \qquad 2(Y_y-iX_y)=-i[2X_y-i(X_x-Y_y)]+X_x+Y_y.$$

Ponieważ jest

$$X_x+Y_y=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)]=\mathrm{Re}[\Phi(z)],$$

oraz

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i}{2}z_1\Phi'(z)+F(z)=$$

$$=-\frac{i}{2}(x+iy-2iy)\Phi'(z)+F(z)=-y\Phi'(z)-\frac{i}{2}z\Phi'(z)+F(z),$$

więc na brzegu półpłaszczyzny, tj. dla $y=0$, będzie

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i}{2}z\Phi'(z)+F(z),$$

$$2X_y-i(X_x-Y_y)=\frac{i}{2}z_1\Phi_1'(z_1)+F_1(z_1).$$

Wobec powyższego stosując do pierwszego wyrazu prawej strony równości (6) wzór (5), zaś do drugiego wyrazu prawej strony tejże równości wzór (2), otrzymamy w wyniku działań

$$\Phi(z) = \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (Y_y - iX_y) \frac{dt}{t-z} + C. \tag{7}$$

Wartość $2(Y_y - iX_y)$ dla $y=0$ można otrzymać z równości (1) zmieniając jej znak na przeciwny oraz zmieniając $i$ na $-i$, i wykonując jednocześnie przekształcenie za pomocą zależności $z = z_1$ w ten sposób, ażeby otrzymana funkcja $\Phi(z)$ dawała skończone wartości naprężeń w obszarze objętym półpłaszczyzną.

Po wykonaniu odnośnych działań funkcja $2(Y_y - iX_y)$, występująca pod znakiem całki, ma następującą postać:

$$2(Y_y - iX_y) = -\frac{P}{\pi(1+k)}\left[\frac{t+a-ib}{(t+a+ib)^2} - \frac{t-a-ib}{(t-a+ib)^2} - \right.$$
$$\left. -(k-1)\left(\frac{1}{t-a+ib} - \frac{1}{t+a+ib}\right) + \frac{1}{t_1-a-ib} - \frac{1}{t_1+a-ib}\right].$$

Następnie przyjmując pod uwagę wzór (5) oraz ponadto w przypadku funkcji meromorficznej wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k),$$

[gdzie res $f(a_k)$ oznacza residuum omawianej funkcji w punkcie $a_k$] otrzymamy ze wzoru (7) po wykonaniu odpowiednich działań

$$\Phi(z) = -\frac{2P}{\pi(1+k)}\left[\frac{z+a-ib}{(z+a+ib)^2} - \frac{z-a-ib}{(z-a+ib)^2} - \right.$$
$$\left. -(k-1)\left(\frac{1}{z-a+ib} - \frac{1}{z+a+ib}\right)\right] + C_1.$$

Natomiast funkcję $F(z)$ określimy z równości $2(Y_y + iX_y) = i[2X_y + i(X_x - Y_y)] + X_x + Y_y$ stosując do pierwszego wyrazu prawej strony wzór (4), zaś do drugiego wyrazu tejże strony wzór (2).

Wówczas znajdziemy

$$\frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (Y_y + iX_y) \frac{dt}{t-z} = z\Phi'(z) + 2iF(z) + \Phi(z),$$

skąd otrzymujemy

$$F(z) = \frac{1}{2i}\left[\frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (Y_y + iX_y) \frac{dt}{t-z} - z\Phi'(z) - \Phi(z)\right]. \tag{8}$$

Tutaj funkcja $2(Y_y+iX_y)$ znajdująca się pod znakiem całki, na podstawie wzoru (1) i po przekształceniu przy pomocy zależności $z=z_1$ oraz zmianie znaku na odwrotny, posiada następującą postać:

$$2(Y_y+iX_y)=-\frac{P}{\pi(1+k)}\left[\frac{t_1+a+ib}{(t_1+a-ib)^2}-\frac{t_1-a+ib}{(t_1-a-ib)^2}-\right.$$

$$\left.-(k-1)\left(\frac{1}{t_1-a-ib}-\frac{1}{t_1+a-ib}\right)+\frac{1}{t-a+ib}-\frac{1}{t+a+ib}\right].$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymujemy ze wzoru (8)

$$F(z)=i\frac{P}{\pi(1+k)}\left\{z\left[\frac{z+a-3ib}{(z+a+ib)^3}-\frac{z-a-3ib}{(z-a+ib)^3}+\frac{k-1}{(z+a+ib)^2}-\frac{k-1}{(z-a+ib)^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{z+a-ib}{(z+a+ib)^2}+\frac{z-a-ib}{(z-a+ib)^2}+k\left(\frac{1}{z-a+ib}-\frac{1}{z+a+ib}\right)\right\}+C_2.$$

Ponieważ dla $x=y=\infty$ naprężenia w półpłaszczyźnie powinny być równe zeru, wobec powyższego stałe $C_1$ i $C_2$ muszą być równe zeru.

Zatem odnośne funkcje $\Phi(z), \Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ odpowiadające stanowi napięcia tarczy kształtu półpłaszczyzny, obciążonej dwiema siłami skupionymi równoległymi do prostolinijnego zarysu tej tarczy wynoszą:

$$\Phi(z)=\frac{2P}{\pi(1+k)}\left[\frac{1}{z-a-ib}-\frac{1}{z+a-ib}+\right.$$

$$\left.+(k-1)\left(\frac{1}{z-a+ib}-\frac{1}{z+a+ib}\right)-\frac{z+a-ib}{(z+a+ib)^2}+\frac{z-a-ib}{(z-a+ib)^2}\right],$$

$$\Phi_1(z_1)=\frac{2P}{\pi(1+k)}\left[\frac{1}{z_1-a+ib}-\frac{1}{z_1+a+ib}+\right.$$

$$\left.+(k-1)\left(\frac{1}{z_1-a-ib}-\frac{1}{z_1+a-ib}\right)-\frac{z_1+a+ib}{(z_1+a-ib)^2}+\frac{z_1-a+ib}{(z_1-a-ib)^2}\right],$$

$$F(z)=\frac{iP}{\pi(1+k)}\left\{-\frac{a+ib}{(z+a-ib)^2}-\frac{a-ib}{(z-a-ib)^2}+k\left(\frac{1}{z-a-ib}-\frac{1}{z+a-ib}\right)+\right.$$

$$+z\left[\frac{z+a-3ib}{(z+a+ib)^3}-\frac{z-a-3ib}{(z-a+ib)^3}+\frac{k-1}{(z+a+ib)^2}-\frac{k-1}{(z-a+ib)^2}\right]-$$

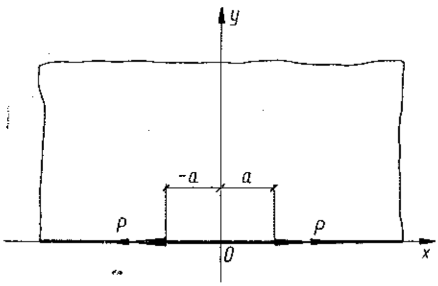
$$\left.-\frac{z+a-ib}{(z+a+ib)^2}+\frac{z-a-ib}{(z-a+ib)^2}+k\left(\frac{1}{z-a+ib}-\frac{1}{z+a+ib}\right)\right\}.$$

Wobec powyższego wartości naprężeń $X_y, X_x, Y_y$, panujących w dowolnym punkcie półpłaszczyzny, obciążonej dwiema siłami skupionymi, równoległymi do jej prostolinijnego zarysu, można będzie określić z następujących równań:

$$
\begin{aligned}
X_x+Y_y=\frac{1}{2}\left[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)\right]=\frac{P}{\pi(1+k)}\Bigg[&\frac{1}{z-a-ib}-\frac{1}{z+a-ib}+\\
&+(k-1)\left(\frac{1}{z-a+ib}-\frac{1}{z+a+ib}\right)-\frac{z+a-ib}{(z+a+ib)^2}+\frac{z-a-ib}{(z-a+ib)^2}+\\
&+\frac{1}{z_1-a+ib}-\frac{1}{z_1+a+ib}+(k-1)\left(\frac{1}{z_1-a-ib}-\frac{1}{z_1+a-ib}\right)-\\
&-\frac{z_1+a+ib}{(z_1+a-ib)^2}+\frac{z_1-a+ib}{(z_1-a-ib)^2}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i}{2}z_1\Phi'(z)+F(z)=-\frac{iP}{\pi(1+k)}z_1\Bigg\{&\frac{1}{(z+a-ib)^2}-\\
&-\frac{1}{(z-a-ib)^2}+(k-1)\left[\frac{1}{(z+a+ib)^2}-\frac{1}{(z-a+ib)^2}\right]+\frac{z+a-3ib}{(z+a+ib)^3}-\\
&-\frac{z-a-3ib}{(z-a+ib)^3}\Bigg\}+\frac{iP}{\pi(1+k)}\Bigg\{-\frac{a+ib}{(z+a-ib)^2}-\frac{a-ib}{(z-a-ib)^2}+\\
+k\left(\frac{1}{z-a-ib}-\frac{1}{z+a-ib}\right)+z\Bigg[&\frac{z+a-3ib}{(z+a+ib)^3}-\frac{z-a-3ib}{(z-a+ib)^3}+\frac{k-1}{(z+a+ib)^2}-\\
-\frac{k-1}{(z-a+ib)^2}\Bigg]-&\frac{z+a-ib}{(z+a+ib)^2}+\frac{z-a-ib}{(z-a+ib)^2}+k\left(\frac{1}{z-a+ib}-\frac{1}{z+a+ib}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

W przypadku $b=0$ ma miejsce działanie dwóch sił skupionych $P$ na prostolinijnym zarysie półpłaszczyzny (rys. 2).




Rys. 2

Wtedy wartość naprężenia $X_x$ w punkcie $x=y=0$ omawianej tarczy wynosi

$$X_x=-\frac{4P}{\pi a}.$$

Stosując prawo niezależności działania sił i odkształceń można będzie rozwiązać w podobny sposób każde zagadnienie dotyczące stanu napięcia tarczy kształtu półpłaszczyzny, obciążonej w dowolny sposób wewnętrznymi siłami skupionymi jak również i momentami.

Ponadto wyżej przedstawiony sposób umożliwia określenie stanu napięcia tarczy, której obszar daje się odwzorować na górną półpłaszczyznę za pomocą przekształcenia konforemnego.

## Literatura cytowana w tekście

[1] G. W. Kolosov, *Application of the Complex Variable to the Theory of Elasticity* (in Russian), Moskwa 1935.

[2] F. Szelągowski, *Zagadnienie płaskie teorii sprężystości w funkcjach zmiennych zespolonych*, Arch. Mech. stos., Gdańsk 1951.

[3] F. Szelągowski, *The Tension with Concentrated Forces of an Infinite Plate with a Rigid Circular Inclusion*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 4 (1956), 145.

Резюме

ПЛАСТИНКА ОПРЕДЕЛЕННАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНУТРЕННЕЙ НАГРУЗКИ

Выводятся формулы, дающие возможность определить значения напряжений $X_y$, $X_x$, $Y_y$ — существующих в любой точке пластинки в форме полуплоскости под влиянием двух внутренних, сосредоточенных сил, параллельных к прямолинейному краю пластинки.

Приведенная выше задача решается в функциях комплексных переменных при использовании формулы Шварца.

Summary

A SEMI-INFINITE PLATE ACTED ON BY AN INTERNAL LOAD

Equations are derived enabling the determination of the stresses $X_y, X_x, Y_y$ at any point of a semi-infinite plate acted on by two concentrated internal forces parallel to the edge of the plate.

This problem is solved in functions of complex variables using Schwarz's formula.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 maja 1959 r.*