

MIŁOSZ WNUK I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

WPLYW OSŁABIENIA PRĘTA NA SIŁĘ KRYTYCZNA
W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXVIII

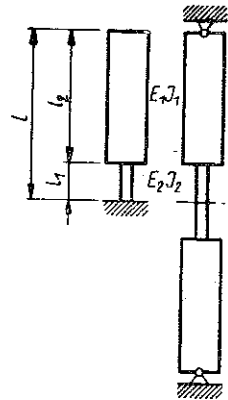
SPIS TREŚCI

1. Sformułowanie zagadnienia	313
2. Rozwiązanie zagadnienia w zakresie sprężystym metodą małego parametru	315
3. Wyprowadzenie równania określającego siłę krytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym	322
4. Oszacowanie siły krytycznej w zakresie sprężysto plastycznym	325
5. Przykłady liczbowe	331
6. Uwagi końcowe	332

1. Sformułowanie zagadnienia

Dotychczas stosunkowo niewiele uwagi poświęcono wpływowi lokalnego osłabienia pręta, podyktowanego zazwyczaj względami konstrukcyjnymi (np. koniecznością wykonania otworów na nity, sworznie itp.) lub uszkodzeniem powierzchni pręta, na siłę krytyczną przy osiowym ściskaniu. A. N. Dinnik, [1] i [2], wyprowadził jedynie przybliżony wzór na siłę krytyczną metodą energetyczną, a więc dającą błąd na niekorzyść pewności. Wzór ten ma zastosowanie tylko w zakresie sprężystym. Ponieważ wynika z niego, że wpływ osłabienia jest na ogół niewielki, przeto często pomija się ten wpływ w obliczeniach, a np. Polskie Normy PN/B-03200 polecają jedynie porównanie naprężenia w przekroju osłabionym z naprężeniem dopuszczalnym. Okazuje się jednak, że w zakresie sprężysto-plastycznym, w przypadku prętów stosunkowo krótkich, gdzie wzór Dinnika nie ma zastosowania, wpływ ten rośnie i przy dokładniejszych obliczeniach powinien być uwzględniony. Wyprowadzeniu wzoru, określającego siłę krytyczną dla osłabionego pręta w zakresie sprężysto-plastycznym, poświęcona jest właśnie niniejsza praca.

Zasadniczo będziemy zajmować się prętem jednostronnie utwierdzonym, przedstawionym na rys. 1a. Oczywiście, wyniki będzie można bez większych zmian stosować i do pręta dwuprzegubowego, osłabionego w środku, przeliczając odpowiednio długość, ponieważ siły krytyczne dla takich prętów są równe. Nie będziemy się tu natomiast zajmować prętami dwustronnie utwierdzonymi, chociaż korzystając z równania wyjściowego, przytoczonego np. w pracy A. Pflügera, [10], można by otrzymać odnośne wzory całkiem analogicznie. Ograniczymy się ponadto do rozpatrywania osłabienia w pobliżu przekroju niebezpiecznego (przekrój utwierdzony dla prętów jednostronnie utwierdzonych, przekrój środkowy dla dwuprzegubowych). W ten sposób upraszczamy rozważania redukując ilość parametrów, a zarazem szacujemy wpływ



Rys. 1. Schematy rozpatrywanych prętów

osłabienia pręta w innych przekrojach, ponieważ odnośna siła krytyczna będzie zawarta pomiędzy siłą dla pręta osłabionego w przekroju niebezpiecznym a siłą dla pręta nieosłabionego.

W zakresie sprężystym równaniem wyjściowym jest równanie przestępne, określające ściśle siłę krytyczną dla pręta o nieciągłej zmianie momentu bezwładności (mianowicie o dwóch różnych momentach bezwładności). Równanie to ogólnie znane (A. Pflüger, [10], S. D. Ponomarijew i inni, [11], S. P. Timoshenko, [16], C. T. Wang, [18]) przystosujemy do możliwości zmiany nie tylko momentu bezwładności I , lecz i modułu sprężystości E i zapiszemy w postaci

$$(1.1) \quad \operatorname{tg} \left(l_1 \sqrt{\frac{P}{E_1 I_1}} \right) \operatorname{tg} \left(l_2 \sqrt{\frac{P}{E_2 I_2}} \right) = \sqrt{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}},$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do części nieosłabionej i osłabionej (rys. 1). W ten sposób dopuścimy, z jednej strony, możliwość nieciągłej niejednorodności podłużnej pręta (pręt złożony z dwóch części wykonanych z różnych materiałów), a z drugiej strony, dla rozważań naszych ważniejszej, uzyskamy również równanie wyjściowe dla zakresu sprężysto-plastycznego.

Warto wspomnieć, że opracowano tablice pierwiastków równania (1.1): można je znaleźć np. w pracach A. N. Dinnika, [1] i [2], S. P. Timoshenki, [16]; dokładniejszą tablicę podającą ponad 100 pierwiastków tego równania z dokładnością czterech cyfr znaczących przytacza według A. P. Korobowa, [6], S. D. Ponomarijew, [11]); A. Pflüger ujmuje odnośną zależność wykreślnie. Wszystkie jednak wspomniane tablice obejmują jedynie zakres $E_2 I_2 \geq E_1 I_1$, a więc przypadek wzmocnienia przekroju utwierdzonego, co oczywiście wytrzymałościowo jest niezwykle korzystne i wskazane, ale ze względów konstrukcyjnych nie zawsze daje się zrealizować. Tak więc dla naszych celów tablice te nie są przydatne. Wyprowadzimy z równania (1.1) wzór przybliżony metodą małego parametru, stosowaną na przykład przez K. Gałkiewicza, [4], do prętów o przekroju zmiennym w sposób ciągły, a następnie sprawdzimy go, rozwiązując równanie ściśle (1.1) w kilku przypadkach szczególnych. Wykażemy również, że już pierwsze przybliżenie uzyskane metodą małego parametru jest dokładniejsze od wzoru Dinnika.

Spro uwagi poświęcono przypadkowi nieciągłej wielokrotnej zmianie przekroju (S. Falk, [3], W. P. Manżałowski, [8], A. R. Rżanicyń, [12], W. T. Thomson, [17]; A. N. Dinnik, [1] i [2], metodą energetyczną). Do odnośnych układów równań przestępnych, określających obciążenie krytyczne w zakresie sprężystym w sposób ścisły, można by również zastosować użyte w tej pracy metody, jednak nakład pracy obliczeniowej uległby znacznemu zwiększeniu.

2. Rozwiązanie zagadnienia w zakresie sprężystym metodą małego parametru

Przed rozwiązaniem równania (1.1) metodą małego parametru sprowadzimy je do postaci bezwymiarowej. Wprowadzimy w tym celu oznaczenia dwóch wielkości znanych

$$(2.1) \quad \gamma = \frac{l_2}{l},$$

$$(2.2) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}} - 1,$$

oraz wielkości niewiadomej

$$(2.3) \quad \kappa = l \sqrt{\frac{P}{E_1 I_1}}$$

otrzymując

$$(2.4) \quad \operatorname{tg} [(1 - \gamma) \kappa] \operatorname{tg} [\gamma \kappa (1 + \varepsilon)] = \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Związek ten określa funkcję dwóch zmiennych $k = k(\gamma, \varepsilon)$. Dla pręta nieznacznie odbiegającego od pryzmatycznego obie te zmienne są małe, co nasuwa myśl rozwiązania równania (2.4) metodą małego parametru (szeregów potęgowych). W istocie, przyjmując $\varepsilon = 0$ otrzymujemy pręt pryzmatyczny dla dowolnego γ ; przyjmując $\gamma = 0$ przy ustalonym ε otrzymujemy pręt «z nieskończenie krótkim osłabieniem», które, w myśl teorii elementarnej, w zakresie sprężystym nie posiada wpływu, a wprowadza jedynie pewne trudności pojęciowe w zakresie sprężysto-plastycznym, czym zajmujemy się później.

Metodą małego parametru (małych zakłóceń) nazywa się zazwyczaj metodę rozwiązywania równania różniczkowego przez rozwinięcie rozwiązania na szereg potęgowy stosownie dobranego parametru. Nazwę tę można jednak zastosować i do podobnego rozwiązywania równań algebraicznych lub przestępnych, [23]. W naszym przypadku można jako mały parametr obrać bądź γ i poszukiwać rozwiązania równania (2.4) w postaci

$$(2.5) \quad \kappa = \kappa_0 + \kappa_1(\varepsilon)\gamma + \kappa_2(\varepsilon)\gamma^2 + \dots,$$

bądź też ε pisząc

$$(2.6) \quad \kappa = \kappa_0 + \kappa_1(\gamma)\varepsilon + \kappa_2(\gamma)\varepsilon^2 + \dots$$

Funkcje $\kappa_i(\gamma)$ i $\kappa_i(\varepsilon)$ są oczywiście różne, mimo to zachowamy dla obu funkcji wspólny symbol κ_i .

Rozważymy obie możliwości określenia małego parametru. Przed przedstawieniem do równania (2.4) szeregu (2.5) lub (2.6) wygodniej jest zapisać je w innej formie, upraszczającej późniejsze rozwijanie na szeregi potęg-

gowe. Wyrażając funkcję tangens przez sinus i cosinus otrzymujemy mianowicie

$$(2.7) \quad (1 + \varepsilon) \sin [(1 - \gamma) \kappa] \sin [\gamma \kappa (1 + \varepsilon)] = \cos [(1 - \gamma) \kappa] \cos [\gamma \kappa (1 + \varepsilon)],$$

czyli, po zastosowaniu wzoru na cosinus sumy argumentów,

$$(2.8) \quad \varepsilon \sin [(1 - \gamma) \kappa] \sin [\gamma \kappa (1 + \varepsilon)] = \cos [\kappa (1 + \gamma \varepsilon)].$$

Obierzemy najpierw za mały parametr γ czyli przyjmiemy, że stosunek długości części osłabionej do całkowitej długości pręta jest mały. Podstawienie szeregu (2.5) do równania (2.8) daje

$$(2.9) \quad \varepsilon \sin [\kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0) \gamma + \dots] \sin [\gamma (1 + \varepsilon) (\kappa_0 + \kappa_1 \gamma + \dots)] = \\ = \cos [\kappa_0 + (\varepsilon \kappa_0 + \kappa_1) \gamma + (\varepsilon \kappa_1 + \kappa_2) \gamma^2 + \dots],$$

a po rozwinięciu ze względu na zmienną γ sinusów i cosinusa na szeregi potęgowe Maclaurina otrzymujemy

$$(2.10) \quad \varepsilon [\sin \kappa_0 + (\kappa_1 - \kappa_0) \gamma \cos \kappa_0 + \dots] [(1 + \varepsilon) \kappa_0 \gamma + (1 + \varepsilon) \kappa_1 \gamma^2 + \dots] = \\ = \cos \kappa_0 - (\varepsilon \kappa_0 + \kappa_1) \gamma \sin \kappa_0 - (\varepsilon \kappa_1 + \kappa_2) \gamma^2 \sin \kappa_0 - \\ - \frac{(\varepsilon \kappa_0 + \kappa_1)^2}{2} \gamma^2 \cos \kappa_0 + \dots$$

Przyrównując do siebie współczynniki przy kolejnych potęgach γ po obu stronach tego równania, uzyskujemy układ równań

$$(2.11) \quad \begin{cases} \cos \kappa_0 = 0, \\ \varepsilon (1 + \varepsilon) \kappa_0 \sin \kappa_0 = -(\varepsilon \kappa_0 + \kappa_1) \sin \kappa_0, \\ \varepsilon (1 + \varepsilon) \kappa_1 \sin \kappa_0 + \varepsilon (1 + \varepsilon) (\kappa_1 - \kappa_0) \kappa_0 \cos \kappa_0 = \\ = -(\varepsilon \kappa_1 + \kappa_2) \sin \kappa_0 - \frac{(\varepsilon \kappa_0 + \kappa_1)^2}{2} \cos \kappa_0, \\ \dots \end{cases}$$

skąd przy ograniczeniu się do pierwszej siły krytycznej wynika

$$(2.12) \quad \begin{cases} \kappa_0 = \frac{\pi}{2}, \\ \kappa_1 = -\varepsilon \pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \kappa_2 = 2\varepsilon^2 \pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2. \\ \dots \end{cases}$$

Znając bezwymiarową wielkość κ , określoną szeregiem (2.5) i wzorami (2.12); możemy przejść do obliczenia samej siły krytycznej. Ze wzoru (2.3) wynika

$$(2.13) \quad P = P_k = \kappa^2 \frac{E_1 I_1}{l^2} = \frac{E_1 I_1}{l^2} [\kappa_0^2 + 2\kappa_0 \kappa_1 \gamma + (\kappa_1^2 + 2\kappa_0 \kappa_2) \gamma^2 + \dots].$$

Wygodnie jest teraz wprowadzić oznaczenie

$$(2.14) \quad \mu = \frac{4}{\pi^2} \kappa^2 = \frac{4Pl^2}{\pi^2 E_1 I_1},$$

przy czym

$$(2.15) \quad \mu = 1 + \mu_1(\varepsilon)\gamma + \mu_2(\varepsilon)\gamma^2 + \dots$$

Jak widać ze wzoru (2.14), μ jest współczynnikiem poprawkowym do wzoru Eulera dla pręta pryzmatycznego, bowiem

$$(2.16) \quad P = P_k = \mu \frac{\pi^2 E_1 I_1}{4l^2} = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{4l^2} (1 + \mu_1 \gamma + \mu_2 \gamma^2 + \dots).$$

Porównując szeregi (2.13 i (2.16) określimy współczynniki $\mu_i(\varepsilon)$ wzorami

$$(2.17) \quad \begin{cases} \mu_1 = -4\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \mu_2 = 12\varepsilon^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ \dots \end{cases}$$

i ostatecznie

$$(2.18) \quad \mu = 1 - 4\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma + 12\varepsilon^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \gamma^2 + \dots$$

Przejdziemy teraz do rozwiązania równania wyjściowego (2.4), przekształconego do postaci (2.8), przez rozwinięcie go na szereg potęgowy drugiego parametru, mianowicie ε . Założymy tym samym, że różnica sztywności części osłabionej i nieosłabionej jest niewielka. Postępujemy analogicznie jak w przypadku poprzednim podstawiając do (2.8) szereg (2.6):

$$(2.19) \quad \varepsilon \sin [(1 - \gamma)(\kappa_0 + \kappa_1 \varepsilon + \dots)] \sin [\gamma \kappa_0 + \gamma(\kappa_0 + \kappa_1) \varepsilon + \dots] = \\ = \cos [\kappa_0 + (\gamma \kappa_0 + \kappa_1) \varepsilon + (\gamma \kappa_1 + \kappa_2) \varepsilon^2 + \dots].$$

Po rozwinięciu sinusów i cosinusów na szeregi potęgowe ze względu na zmienną ε otrzymujemy

$$(2.20) \quad \varepsilon \{ \sin [(1 - \gamma)\kappa_0] + (1 - \gamma)\kappa_1 \cos [(1 - \gamma)\kappa_0] \varepsilon + \dots \} \{ \sin (\gamma \kappa_0) + \\ + \gamma(\kappa_0 + \kappa_1) \cos (\gamma \kappa_0) \varepsilon + \dots \} = \cos \kappa_0 - \\ - (\gamma \kappa_0 + \kappa_1) \varepsilon \sin \kappa_0 - (\gamma \kappa_1 + \kappa_2) \varepsilon^2 \sin \kappa_0 - \frac{(\gamma \kappa_0 + \kappa_1)^2}{2} \varepsilon^2 \cos \kappa_0 + \dots,$$

skąd wynika układ równań

$$(2.21) \quad \begin{cases} \cos \kappa_0 = 0, \\ \sin [(1-\gamma) \kappa_0] \sin (\gamma \kappa_0) = -(\gamma \kappa_0 + \kappa_1) \sin \kappa_0, \\ (1-\gamma) \kappa_1 \sin (\gamma \kappa_0) \cos [(1-\gamma) \kappa_0] + \gamma (\kappa_0 + \kappa_1) \cos (\gamma \kappa_0) \sin [(1-\gamma) \kappa_0] = \\ = -(\gamma \kappa_1 + \kappa_2) \sin \kappa_0 - \frac{(\gamma \kappa_0 + \kappa_1)^2}{2} \cos \kappa_0, \\ \dots \end{cases}$$

Przy ograniczeniu się do pierwszej siły krytycznej otrzymujemy

$$(2.22) \quad \begin{cases} \kappa_0 = \frac{\pi}{2}, \\ \kappa_1 = -\frac{1}{2} \gamma \pi \left(1 + \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \right), \\ \kappa_2 = -\frac{1}{2} \gamma \pi \cos \gamma \pi + \gamma \sin \gamma \pi \cos^2 \gamma \frac{\pi}{2} + \gamma^2 \pi \cos^2 \gamma \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{1}{2} \sin \gamma \pi \sin^2 \gamma \frac{\pi}{2}, \\ \dots \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio wprowadzimy proporcjonalną do siły krytycznej bezwymiarową wielkość μ określoną wzorem (2.14); tym razem będzie ona jednak określona szeregiem potęgowym zmiennej ε mianowicie

$$(2.23) \quad \mu = 1 + \mu_1(\gamma) \varepsilon + \mu_2(\gamma) \varepsilon^2 + \dots$$

Współczynniki $\mu_i(\gamma)$ określą teraz wzory

$$(2.24) \quad \begin{cases} \mu_1 = -2\gamma \left(1 + \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \right), \\ \mu_2 = \gamma^2 (3 + 2 \cos \gamma \pi) + \frac{2}{\pi} \gamma \sin \gamma \pi (2 + \cos \gamma \pi) - 2\gamma \cos \gamma \pi + \\ + \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \gamma \pi + \frac{2}{\pi} \sin \gamma \pi \sin^2 \gamma \frac{\pi}{2}, \\ \dots \end{cases}$$

i ostatecznie

$$(2.25) \quad \mu = 1 - 2\gamma \left(1 + \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \right) \varepsilon + \left[\gamma^2 (3 + 2 \cos \gamma \pi) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \gamma \sin \gamma \pi (2 + \cos \gamma \pi) - 2\gamma \cos \gamma \pi + \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \gamma \pi + \frac{2}{\pi} \sin \gamma \pi \sin^2 \gamma \frac{\pi}{2} \right] \varepsilon^2 + \dots$$

Dla zastosowań praktycznych najważniejsze jest przybliżenie funkcji $\mu = \mu(\gamma, \varepsilon)$ pierwszymi dwoma wyrazami szeregu, mianowicie szeregu (2.18) lub (2.25). Zanim przystąpimy jednak do analizy dokładności odpowiednich wzorów przybliżonych i porównania ich ze wzorem A. N. Dinnika, zauważymy, że podczas gdy parametr γ określony został wzorem (2.1) w sposób «naturalny», to parametr ε został przez nas w pewnym sensie «narzucony», gdyż równie dobrze można było ten parametr, charakteryzujący stosunek sztywności części osłabionej i nieosłabionej, wprowadzić odmiennie. A. Pflüger, [10], uzależnia siłę krytyczną dla dwustopniowego pręta od stosunku $\sqrt{I_1}/\sqrt{I_2}$ lub $\sqrt{I_2}/\sqrt{I_1}$, co odpowiada właśnie wprowadzonemu przez nas parametrowi

$$(2.26) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} - 1} = \frac{\sqrt{E_1 I_1} - \sqrt{E_2 I_2}}{\sqrt{E_2 I_2}}$$

lub parametrowi

$$(2.27) \quad \varepsilon_2 = 1 - \sqrt{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}} = \frac{\sqrt{E_1 I_1} - \sqrt{E_2 I_2}}{\sqrt{E_1 I_1}}$$

Stosunkiem $\sqrt{I_2}/\sqrt{I_1}$ posługuje się również C. T. Wang, [18]. A. N. Dinnik i S. P. Timoshenko uzależniają siłę krytyczną od stosunku I_1/I_2 , co odpowiada parametrowi

$$(2.28) \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} - 1 \right) = \frac{E_1 I_1 - E_2 I_2}{2 E_2 I_2},$$

natomiast S. D. Ponomarew, [11], — od stosunku I_2/I_1 , co odpowiada parametrowi

$$(2.29) \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \right) = \frac{E_1 I_1 - E_2 I_2}{2 E_1 I_1}.$$

Parametry ε_1 zostały przez nas tak dobrane, by były dodatnie dla $E_1 I_1 > E_2 I_2$, a ponadto, by w pierwszym przybliżeniu były wszystkie sobie równe [stąd współczynniki 1/2 we wzorach (2.28) i (2.29)].

Ponieważ wprowadzenie wszystkich wymienionych parametrów ε_i wydaje się być równouprawnione, więc o wyborze tego lub innego parametru zadecyduje uzyskiwana dokładność wzorów przybliżonych. Znając rozwinięcie (2.25) funkcji $\mu = \mu(\varepsilon) = \mu(\varepsilon_1)$ nie musimy osobno wyprowadzać wzorów, określających funkcje $\mu = \mu(\varepsilon_2)$, $\mu = \mu(\varepsilon_3)$ i $\mu = \mu(\varepsilon_4)$. Parametry są bowiem od siebie w bardzo prosty sposób zależne; zależności te zostały zestawione w tablicy 1 w postaci zamkniętej i w postaci rozwinięć na szeregi potęgowe. Wystarczy do wzoru (2.25) podstawić odpowiednie szeregi potęgowe, mianowicie $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_3)$, $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_4)$, by otrzymać poszukiwane rozwinięcia na szeregi potęgowe względem ε_2 , ε_3 i ε_4 . Ponieważ

Tablica 1. Zależności między parametrami ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

ε_1	$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^3 + \dots$	$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1 = \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^3$	$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_4}} - 1 = \frac{3}{2}\varepsilon_4^2 + \frac{5}{2}\varepsilon_4^3 + \dots$
ε_2	$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 + \dots$	$\varepsilon_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_3}} = \frac{3}{2}\varepsilon_3^2 + \frac{5}{2}\varepsilon_3^3 + \dots$	$\varepsilon_2 = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_4} = \frac{1}{2}\varepsilon_4^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_4^3 + \dots$
ε_3	$\frac{1}{2}[(1 + \varepsilon_1)^2 - 1] = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2$	$\varepsilon_3 = \frac{1 - (1 - \varepsilon_2)^2}{2(1 - \varepsilon_2)} = \varepsilon_2 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2^3 + \dots$	$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_4}{1 - 2\varepsilon_4} = \varepsilon_4 + 2\varepsilon_4^2 + 4\varepsilon_4^3 + \dots$
ε_4	$\varepsilon_4 = \frac{(1 + \varepsilon_1)^2 - 1}{2(1 + \varepsilon_1)} = \frac{3}{2}\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1^3 + \dots$	$\varepsilon_4 = \frac{1}{2}[1 - (1 - \varepsilon_2)^2] = \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_2^2$	$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_3}{1 + 2\varepsilon_3} = \varepsilon_3 - 2\varepsilon_3^2 + 4\varepsilon_3^3 + \dots$

w pierwszym przybliżeniu wszystkie te parametry są sobie równe, przeto pierwsze dwa wyrazy szeregu, najważniejsze dla zastosowań praktycznych, będą zawsze miały postać

$$(2.30) \quad \mu \approx 1 - 2\gamma \left(1 + \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \right) \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

W ten krótki sposób zapisaliśmy cztery wzory przybliżone o różnej dokładności. Dokładność ich porównamy jeszcze z dokładnością pierwszych dwóch wyrazów szeregu (2.18), który szczególnie prosto daje się zapisać przy użyciu parametru ε_3 , mianowicie

$$(2.31) \quad \mu \approx 1 - 4\varepsilon_1 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \gamma = 1 - 4\varepsilon_3 \gamma,$$

oraz z dokładnością wzoru Dinnika wyprowadzonego metodą energetyczną, [1], [2]. Wzór ten o postaci

$$(2.32) \quad P_k = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{4l^2} \left\{ 1 - \frac{E_1 I_1 - E_2 I_2}{E_1 I_1} \left[\frac{l_2}{l} - \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi(l_2 - l)}{l} \sin \frac{\pi l_2}{l} \right] \right\},$$

zapiszemy, po wprowadzeniu naszych oznaczeń, następująco:

$$(2.33) \quad \mu = 1 - 2\gamma \left(1 + \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \cos 2\gamma \pi \right) \varepsilon_4.$$

Procentowe błędy wzorów (2.30), (2.31) i (2.33) zestawione są w tablicy 2 dla $E_2 I_2 / E_1 I_1 = 0,7$ i $0,5$ oraz dla $\gamma = 0,1$ i $0,2$. Błędem przez niedomiar przypisano znak (+) (są to błędy na korzyść pewności), błędem przez nadmiar znak (—). Błędy wzorów (2.30) oznaczono przez B_1, B_2, B_3 i B_4 , błąd wzoru (2.31) przez B_γ , błąd wzoru (2.33) przez B_D . Tablica 2 podaje również rozwiązania k odpowiednich równań przestępnych (2.4) i obliczone za pomocą wzoru (2.14) wartości μ z dokładnością pięciu miejsc po przecinku.

Jak widać z zestawienia w tablicy 2, wzór Dinnika (2.33) daje w badanym zakresie największe błędy. Różni się on od czwartego ze wzorów (2.30) tylko czynnikiem $\cos 2\gamma \pi$, jednak ten właśnie czynnik zwiększa błąd i to na niekorzyść pewności (jak zawsze przy korzystaniu z metody energetycznej). Również stosunkowo dużymi błędami obarczony jest wzór (2.31), który jest jednak o tyle lepszy, że posiada postać niezwykle prostą, a błędy są błędami przez niedomiar na korzyść pewności. Wszystkie wzory (2.30) są lepsze od obu wymienionych. W różnych zakresach porównanie ich dokładności wypada różnie: dla bardzo małych γ szczególnie dokładny jest wzór, w którym $\varepsilon = \varepsilon_3$ (jak widać z tablicy 2, błąd w tym przypadku istotnie szczególnie silnie rośnie wraz ze wzrostem γ), natomiast dla bardzo dużych γ najlepszą dokładność posiada wzór, w którym

Tablica 2. Błędy wzorów przybliżonych, określających siłę krytyczną w zakresie sprężystym

$\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} =$	ε	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,2$
0,7	$\varepsilon_1 = 0,19523$	$\alpha = 1,50717, \mu = 0,92063$	$\alpha = 1,45302, \mu = 0,85567$
	$\varepsilon_2 = 0,16334$	$B_1 = -0,2\%$	$B_1 = +0,8\%$
	$\varepsilon_3 = 0,21429$	$B_2 = -1,6\%$	$B_2 = -2,1\%$
	$\varepsilon_4 = 0,15000$	$B_3 = +0,6\%$	$B_3 = +2,5\%$
		$B_4 = -2,2\%$	$B_4 = -3,3\%$
		$B_{\gamma} = +0,7\%$	$B_{\gamma} = +3,2\%$
		$B_D = -2,8\%$	$B_D = -7,8\%$
0,5	$\varepsilon_1 = 0,41421$	$\alpha = 1,43145, \mu = 0,83045$	$\alpha = 1,32773, \mu = 0,71446$
	$\varepsilon_2 = 0,29299$	$B_1 = -0,6\%$	$B_1 = +4,9\%$
	$\varepsilon_3 = 0,50000$	$B_2 = -6,4\%$	$B_2 = -8,2\%$
	$\varepsilon_4 = 0,25000$	$B_3 = -3,5\%$	$B_3 = +14,2\%$
		$B_4 = -8,5\%$	$B_4 = -12,8\%$
		$B_{\gamma} = +3,7\%$	$B_{\gamma} = +16,0\%$
		$B_D = -9,6\%$	$B_D = -21,9\%$

$\varepsilon = \varepsilon_4$, bowiem on jedynie, jak łatwo sprawdzić, daje ścisłą wartość siły krytycznej przy podstawieniu $\gamma = 1$ (gdzie osłabienie rozciąga się na całą długość pręta). Jednak w stosunkowo najszerszym zakresie szczególnie małymi błędami wyróżnia się wzór, w którym $\varepsilon = \varepsilon_1$, czyli

$$(2.34) \quad \mu \approx 1 - 2\gamma \left(1 + \frac{\sin \gamma \pi}{\gamma \pi} \right) \left(\sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}} - 1 \right).$$

Jak widać z tablicy 2, przy $\gamma < 0,2$ i $\varepsilon = \varepsilon_1 < 0,4$ błędy tego wzoru nie przekraczają 5% przez niedomiar (na korzyść pewności), a dla małych γ nie przekraczają 1% na niekorzyść pewności. Uzasadnia to przyjęcie przez nas na początku rozważań małego parametru (2.2) i propozycję posługiwania się tym właśnie parametrem. W dalszym ciągu jak i w początkowych rozważaniach przez ε bez wskaźnika będziemy rozumieli parametr ε_1 .

3. Wyprowadzenie równania określającego siłę krytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym

Powyżej granicy proporcjonalności pochodna $d\sigma/d\varepsilon$ nie jest równa wartości stałej E , lecz jest pewną funkcją naprężenia σ . Funkcję taką należy określić doświadczalnie dla poszczególnych materiałów, jednak w pewnym przybliżeniu można ją ująć wzorem, w którym tylko pewne parametry określa się doświadczalnie. Doborowi takich wzorów specjalnie z uwagi na zastosowanie w teorii wybożenia szczególnie wiele uwagi poświęcił A. Yl i n e n. W swej pracy z r. 1938, [19], zaproponował on wzór słuszny

dla całego zakresu $0 < \sigma < Q$ (gdzie Q oznacza granicę plastyczności przy ściskaniu, naprężenie ściskające uważa się za dodatnie), mianowicie

$$(3.1) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \left[1 - \left(\frac{\sigma}{Q} \right)^n \right].$$

Wzór ten spełnia warunek $d\sigma/d\varepsilon = 0$ dla $\sigma = Q$ i dla małych naprężeń przechodzi w prawo Hooke'a, gdy drugi składnik w nawiasie staje się mały wobec pierwszego. Wzór ten został wykorzystany do badania stateczności prętów niepryzmatycznych o przekroju zmiennym w sposób ciągły w pracy [22]. Parametr n należy dobrać doświadczalnie; wynosi on np. dla stali 10-15, co powoduje pewne trudności rachunkowe i uniemożliwia scałkowanie równania (3.1) przy użyciu funkcji elementarnych. Dla usunięcia tych braków A. Ylinsen zaproponował w r. 1948 znacznie wygodniejszy wzór, [20],

$$(3.2) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \frac{Q - \sigma}{Q - c\sigma},$$

spełniający te same warunki, co wzór poprzedni. Tym razem parametrem, który należy wyznaczyć doświadczalnie, jest c . Wzór (3.2) jest bardzo wygodny rachunkowo, a ponadto bez trudu daje się scałkować. Ponieważ nie jest on jeszcze dostatecznie rozpowszechniony, mimo opublikowania odnośnej proporcji po raz drugi w języku angielskim, [21], więc przytaczamy tablicę stałych Q , E i c według Ylinsena, zaczerpniętą z pracy [21] (tablica 3).

Tablica 3. Wartości stałych we wzorze (3.2) A. Ylinsena

Materiał	E [kGcm ⁻²]	Q lub R [kGcm ⁻²]	c
Sośnina fińska	125 000	450	0,875
Elektron (stop magnezu)	460 000	1000	0,857
Stal St 37	2 100 000	2400	0,977
Stal St 52	2 100 000	3600	0,977
Beton	250 000	280	0

H. Larsson, [7], wykazał w oparciu o teorię wyboczenia sprężysto-plastycznego podaną przez F. R. Shanley'a, [14], [15], że wzór (3.2) może bezpośrednio zastąpić moduł E we wzorach na siłę krytyczną, z niewielkim błędem popełnianym na korzyść pewności. I. Sala, [13], zastosował wzór (3.2) do obliczenia sił krytycznych dla prętów niepryzmatycznych o przekroju zmiennym w sposób ciągły. Posłużymy się teraz tym wzorem dla zbadania wpływu osłabienia prętów na siłę krytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym.

Wyprowadzimy przede wszystkim ogólne równanie przestępne określające siłę krytyczną dla dowolnego dwustopniowego pręta w zakresie sprężysto-plastycznym. Wykorzystamy w tym celu równanie podstawowe (1.1), do którego podstawimy

$$(3.3) \quad E_1 = E \frac{QF_1 - P}{QF_1 - cP}, \quad E_2 = E \frac{QF_2 - P}{QF_2 - cP},$$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają pola powierzchni przekrojów części pręta 1 i 2. (rys. 1). Otrzymujemy najpierw

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \left[l_1 \sqrt{\frac{P}{EI} \frac{QF_1 - P}{QF_1 - cP}} \right] \operatorname{tg} \left[l_2 \sqrt{\frac{P}{EI_2} \frac{QF_2 - P}{QF_2 - cP}} \right] = \\ = \sqrt{\frac{I_2 (QF_2 - P) (QF_1 - cP)}{I_1 (QF_1 - P) (QF_2 - cP)}}$$

Jest to poszukiwane równanie przestępne o jednej niewiadomej — sile krytycznej P . Sprowadzimy je teraz do postaci bezwymiarowej, podobnie jak równanie (1.1). «Rozdzielmy» w tym celu parametr ε uwzględniający jednocześnie wpływ zmiany momentu bezwładności i modułu Younga, wprowadzając oznaczenia

$$(3.5) \quad \varepsilon_I = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} - 1,$$

$$(3.6) \quad \varepsilon_E = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - 1;$$

porównując (3.5), (3.6) i (2.2) otrzymujemy związek

$$(3.7) \quad \varepsilon = \varepsilon_I + \varepsilon_E + \varepsilon_I \varepsilon_E,$$

wskazujący na to, iż w pierwszym przybliżeniu wpływ zmiany sztywności jest sumą wpływów zmiany momentu bezwładności i zmiany modułu Younga z osobna. Wniosek ten jest słuszny w odniesieniu do wszystkich wprowadzonych poprzednio parametrów ε_i , bowiem przy posługiwaniu się parametrami ε_2 , ε_3 lub ε_4 w równaniu typu (3.7) zmienia się jedynie wyraz kwadratowy. Wprowadźmy do równania (3.4) parametry γ (2.1), ε_I (3.5) oraz parametr charakteryzujący smukłość pręta

$$(3.8) \quad s = \frac{l \sqrt{QF_2}}{\sqrt{EI_1}}$$

(dla pręta pryzmatycznego parametr ten jest równy

$$(3.9) \quad s = s_0 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{Q}{E}},$$

gdzie $\lambda = 2l/i$ jest smukłością pręta pryzmatycznego). Wprowadźmy dalej parametr

$$(3.10) \quad \xi = \frac{F_1}{F_2},$$

wreszcie bezwymiarową niewiadomą

$$(3.11) \quad \kappa = l \sqrt{\frac{EI_1}{P}}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy równanie przestępne o postaci

$$(3.12) \quad \operatorname{tg} \left[(1-\gamma)\kappa \sqrt{\frac{\xi s^2 - c\kappa^2}{\xi s^2 - \kappa^2}} \right] \operatorname{tg} \left[\gamma\kappa(1+\varepsilon_I) \sqrt{\frac{s^2 - c\kappa^2}{s^2 - \kappa^2}} \right] = \\ = \frac{1}{1+\varepsilon_I} \sqrt{\frac{(s^2 - \kappa^2)(\xi s^2 - c\kappa^2)}{(\xi s^2 - \kappa^2)(s^2 - c\kappa^2)}}.$$

Niewiadoma κ jest teraz funkcją pięciu zmiennych niezależnych $\kappa = \kappa(\gamma, s, c, \varepsilon_I, \xi)$. Wprowadźmy dla przekrojów geometrycznych podobnych ma zastosowanie związek

$$(3.13) \quad \varepsilon_I = \xi - 1$$

i ilość zmiennych niezależnych można wtedy zredukować do czterech, ale w zastosowaniach praktycznych przekrój osłabiony z reguły nie jest geometrycznie podobny do przekroju nieosłabionego i z tego względu należy rozpatrywać κ jako funkcję pięciu zmiennych. Przy danych wartościach tych zmiennych można każdorazowo, z dowolną dokładnością, obliczyć pierwiastek κ równania (3.12) jedną ze znanych metod przybliżonych rozwiązywania równań przestępnych, ale przedstawienie rozwiązania w postaci szeregu, podobnie jak w przypadku poprzednim (sprężystym), jest tu wielokrotnie trudniejsze. Toteż ograniczymy się jedynie do podania górnej i dolnej granicy obciążenia krytycznego, przy czym zwrócimy uwagę na granicę dolną, szczególnie ważną dla zastosowań praktycznych (błąd na korzyść pewności), i podamy oszacowanie błędu.

4. Oszacowanie siły krytycznej w zakresie sprężysto-plastycznym

Pewne oszacowania siły krytycznej dla pręta osłabionego bardzo łatwo jest podać: jeżeli $I_2 < I_1$ oraz $F_2 < F_1$, to siła krytyczna dla pręta osłabionego jest w każdym razie mniejsza od siły dla pręta pryzmatycznego o przekroju i momencie bezwładności odpowiednio F_1 i I_1 (pręta bez osłabienia), a większa od siły krytycznej dla pręta o przekroju i momencie bezwładności F_2 i I_2 (osłabienie rozciąga się na długość całego pręta). Te oszacowania są jednak z reguły zbyt grube i mogą być stosowane jedynie w mało dokładnych obliczeniach.

Dla zwiększenia dokładności proponujemy inne oszacowania, oparte na wzorach, wyprowadzonych w p. 2. Wpływ zmniejszenia momentu bezwładności i zmniejszenia modułu wybożenia (wskutek zmniejszenia przekroju) można rozdzielić — por. np. wzór (3.7). Rozdzielenie takie jest korzystne, ponieważ wpływ zmiany momentu bezwładności uwzględnia się łatwiej niż wpływ zmiany modułu wybożenia zależnego od obliczanej siły krytycznej. W związku z tym jako dolną granicę siły krytycznej proponujemy siłę dla pręta o stałym module wybożenia $E = E_2$, i «kombinowanym» momencie bezwładności $I = \mu_1 I$, gdzie μ_1 jest określone szeregiem (2.18) lub (2.25), w którym $\varepsilon = \varepsilon_1$ (wpływ zmiany samego tylko momentu bezwładności). Podstawiając ściśle wartość μ_1 (dostateczną ilość wyrazów szeregu) uzyskujemy wtedy ściśle uwzględnienie zmiany momentu bezwładności oraz oszacowanie od dołu z uwagi na zmianę modułu wybożenia. Górna granica, która posłuży nam przede wszystkim do oszacowania błędu granicy dolnej, będzie określona dwoma wzorami. Z jednej strony będzie nią siła krytyczna dla pręta o stałym module wybożenia $E = E_1$, a «kombinowanym» momencie bezwładności $I = \mu_1 I_1$. Z drugiej strony, naprężenie krytyczne w przekroju osłabionym nie może przekroczyć granicy plastyczności Q (rozważania nasze ograniczamy zasadniczo do materiałów, które posiadają rzeczywistą granicę plastyczności; jeżeli granica ta nie istnieje, to — zgodnie z uwagą A. Ylлина, [21] — rolę jej przejmuje wytrzymałość na ściskanie R). Tak więc po wprowadzeniu oznaczenia

$$(4.1) \quad m = \frac{P}{QF_2}$$

drugie oszacowanie od góry stanowi prosta

$$(4.2) \quad \bar{m} = 1.$$

Z obu przytoczonych oszacowań od góry lepsze będzie oczywiście to, które daje mniejszą wartość siły krytycznej: dla prętów o znacznej smukłości będzie to oszacowanie pierwsze, dla prętów krótkich — oszacowanie drugie.

Przejdziemy do wyprowadzenia odpowiednich wzorów. Oszacowanie od dołu będziemy oznaczać jedną kreską u góry: wobec tego zgodnie ze wzorem (2.16), w którym $\mu = \mu_1$ uwzględnia tylko zmianę momentu bezwładności, natomiast $E = E_2$,

$$(4.3) \quad \bar{P} = \mu_1 \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2} \frac{QF_2 - \bar{P}}{QF_2 - c\bar{P}},$$

lub po wprowadzeniu oznaczenia (4.1)

$$(4.4) \quad \bar{m} = \mu_1 \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 QF_2} \frac{1 - \bar{m}}{1 - c\bar{m}}.$$

Wprowadzimy jeszcze oznaczenie stosunku siły krytycznej dla zakresu sprężystego (2.16) do siły na granicy plastyczności w osłabionym przekroju:

$$(4.5) \quad H = \mu_1 \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 QF_2} = \mu_1 \frac{\pi^2}{4s^2}$$

i zapiszemy równanie (4.4) krótko w postaci

$$(4.6) \quad \bar{m} = H \frac{1 - \bar{m}}{1 - c\bar{m}}.$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na \bar{m} , mianowicie

$$(4.7) \quad c\bar{m}^2 - (1 + H)\bar{m} + H = 0.$$

Jego rozwiązanie zapiszemy w postaci

$$(4.8) \quad \bar{m} = \frac{2H}{1 + H + \sqrt{(1 + H)^2 - 4cH}}$$

lub

$$(4.8.1) \quad P = \frac{2H}{1 + H + \sqrt{(1 + H)^2 - 4cH}} QF_2,$$

w której niewymierność przeniesiono do mianownika dla wygody obliczeń; bowiem unika się wtedy odejmowania dwóch niewiele różniących się wielkości. Drugie rozwiązanie równania (4.7) nie posiada sensu fizycznego.

Wzór (4.8) proponujemy jako zasadniczy wzór do obliczenia siły krytycznej dla pręta osłabionego. Jest to wzór uniwersalny obejmujący zakres sprężysty i sprężysto-plastyczny, ponieważ dla prętów o dostatecznie dużej smukłości wartość H jest mała i ze wzoru (4.8) otrzymujemy w przybliżeniu $\bar{m} = H$ lub

$$(4.9) \quad P = \mu_1 \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2},$$

czyli wzór dla zakresu sprężystego. Wykażemy teraz, że w różnych przypadkach szczególnych wzór (4.8) daje wartości poprawne. Gdy podstawimy $c = 1$, to równanie (3.2) daje w granicy materiał idealnie sprężysto-plastyczny typu *P r a n d t l a*: prostą *H o o k e' a* i prostą $\sigma = Q$. W istocie, wtedy wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze (4.8) jest równe $(1 - H)^2$ i dla $H < 1$ mamy $\sqrt{(1 - H)^2} = 1 - H$ oraz $\bar{m} = H$ (wzór dla zakresu sprężystego), a dla $H > 1$ mamy $\sqrt{(1 - H)^2} = H - 1$ oraz $\bar{m} = 1$ (siła krytyczna wywołuje w najmniejszym przekroju naprężenia na granicy plastyczności). Gdy H zmierza do nieskończoności (smukłość pręta do zera), to bez względu na wartość c wartość \bar{m} zmierza do jedności, jak być powinno. Gdy podstawimy $\varepsilon_1 = 0$, to otrzymujemy wzór dla pręta pryzmatycznego, bowiem wtedy

$$(4.10) \quad H = H_0 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 Q}$$

i wzór (4.8) przechodzi we wzór Ylinea. Należy zaznaczyć, że jest to chyba najprostszy i najbardziej dogodny zapis wzoru Ylinea, nie przytaczany przez autora. Wreszcie gdy podstawimy $\gamma=0$, to wzór (4.8) nie przechodzi we wzór Ylinea dla pręta o przekroju F_1 i momencie bezwładności I_1 . Tak jednak być powinno, ponieważ w zakresie sprężysto-plastycznym «nieskończenie małe» osłabienie (np. nadcięcie) musi posiadać znacznie bardziej istotne znaczenie niż w zakresie sprężystym chociażby dlatego, że naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju nie może przekroczyć granicy plastyczności bez względu na to, jaka część pręta posiada ten przekrój. Wzór (4.8) spełnia właśnie ten warunek, ponieważ zawsze $\bar{m} \leq 1$. Tak więc wzór (4.8) spełnia wszystkie warunki, wymagane od wzoru obliczeniowego i daje błędy na korzyść pewności, a ponieważ posiada przy tym prostą budowę, może być z powodzeniem stosowany w praktyce inżynierskiej. Dla obliczenia μ_1 wystarczy przy tym z reguły zastosować pierwsze przybliżenie rozwinięcia na szereg, mianowicie wzór (2.34).

Zajmiemy się jeszcze obliczeniem górnej granicy siły krytycznej dla oszacowania błędu wzoru (4.8). Górną granicę będziemy oznaczać dwiema kreskami u góry. Zgodnie ze wzorem (2.16), w którym $\mu = \mu_1$ uwzględnia tylko zmianę momentu bezwładności, natomiast $E = E_1$, mamy

$$(4.11) \quad \bar{P} = \mu_1 \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2} \frac{QF_1 - \bar{P}}{QF_1 - c\bar{P}},$$

czyli po wprowadzeniu oznaczeń (4.1) oraz (3.10)

$$(4.12) \quad \bar{m} = \mu_1 \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2 QF_2} \frac{\xi - \bar{m}}{\xi - c\bar{m}}.$$

Wprowadzając wielkość H za pomocą wzoru (4.5) otrzymujemy ostatecznie po rozwiązaniu równaniu kwadratowego ze względu na \bar{m} wzór

$$(4.13) \quad \bar{m} = \frac{2H\xi}{\xi + H + \sqrt{(\xi + H)^2 - 4cH\xi}}.$$

Przystąpimy teraz do oszacowania błędu wzoru (4.8). Różnica między górną granicą \bar{m} i dolną granicą \bar{m} zanika dla wielkich s , czyli małych H , bowiem wtedy znajdujemy się w zakresie sprężystym i $E_2 \approx E_1$. Przy wzroście H różnica ta rośnie. Z drugiej strony, oszacowaniem od góry jest również $m=1$, (4.2); różnica między $m=1$ i $m=\bar{m}$ jest równa zeru dla $s=0$, czyli $H=\infty$ i rośnie ze zmniejszaniem się H . Tak więc dokonamy oszacowania błędu dla przypadku $\bar{m}=1$, co odpowiada pewnej smukłości s^* , bowiem dla $s < s^*$ zmniejsza się różnica pomiędzy \bar{m} i 1, a dla $s > s^*$ zmniejsza się różnica pomiędzy \bar{m} i \bar{m} (rys. 2).

Najpierw obliczymy s^* — jest to w pewnym sensie smukłość graniczna. Podstawiając $\bar{m} = 1$ oraz $s = s^*$ do równania (4.12), które zapiszemy w postaci

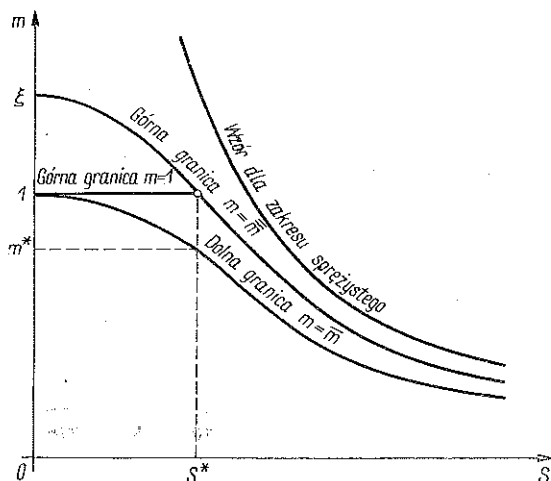
$$(4.14) \quad \bar{m} = \mu_I \frac{\pi^2}{4s^2} \frac{\xi - \bar{m}}{\xi - c\bar{m}},$$

otrzymujemy po rozwiązaniu ze względu na s^*

$$(4.15) \quad s^* = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu_I \frac{\xi - 1}{\xi - c}}.$$

Tej wartości s^* odpowiada pewna wartość \bar{m} , określona wzorem (4.8), którą oznaczymy przez m^* . By obliczyć m^* , najłatwiej jest zapisać (4.4) w postaci

$$(4.16) \quad \bar{m} = \mu_I \frac{\pi^2}{4s^2} \frac{1 - \bar{m}}{1 - c\bar{m}}.$$



Rys. 2. Szacowanie błędu wzoru przybliżonego na siłę krytyczną

Po podstawieniu $s = s^*$ [wzór (4.15)] $\bar{m} = m^*$ otrzymujemy

$$(4.17) \quad m^* = \frac{\xi - c}{\xi - 1} \frac{1 - m^*}{1 - cm^*},$$

a jeżeli wprowadzimy dla uzyskania podobieństwa z równaniem (4.6) oznaczenie

$$(4.18) \quad \frac{\xi - c}{\xi - 1} = H^*,$$

to wtedy

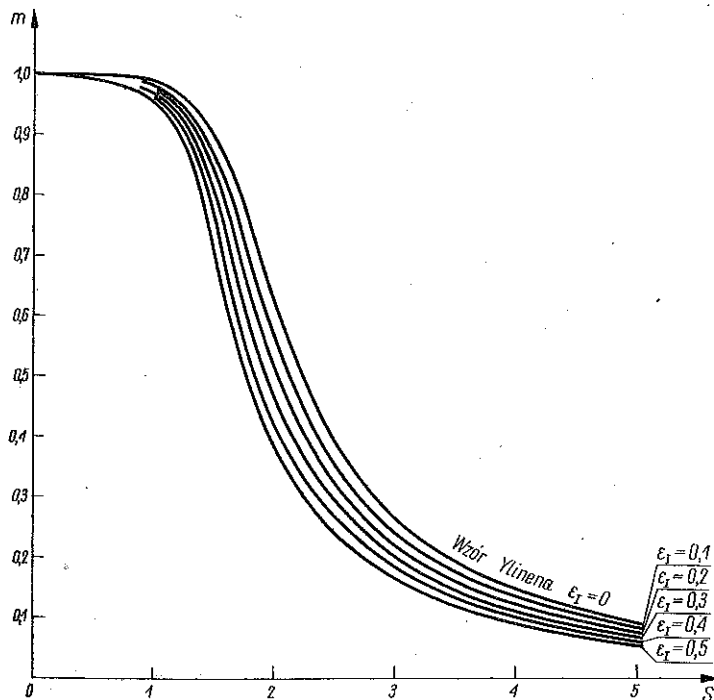
$$(4.19) \quad m^* = \frac{2H^*}{1 + H^* + \sqrt{(1 + H^*)^2 - 4cH^*}}.$$

Ścisła wartość m dla $s = s^*$ zawarta jest pomiędzy m^* i 1. Przyjmując $m = m^*$ (dolna granica siły krytycznej) popełniamy błąd względny nie większy niż

$$(4.20) \quad B \leq \frac{1 - m^*}{1} 100\% = (1 - m^*) 100\%,$$

czyli

$$(4.21) \quad B \leq \frac{1 - H^* + \sqrt{(1 + H^*)^2 - 4cH^*}}{1 + H^* + \sqrt{(1 + H^*)^2 - 4cH^*}} 100\%.$$



Rys. 3. Zależność $m = m(s, \epsilon_1)$ dla $\gamma = l_2/l = 0,2$ oraz $c = 0,977$ (stal)

Jest to poszukiwane ogólne oszacowanie błędu wzoru (4.8). Może ono być zastąpione oszacowaniami mniej dokładnymi, ale posiadającymi prostszą postać. Błąd B jest mianowicie, za pośrednictwem H^* , funkcją dwóch zmiennych ξ i c : $B = B(\xi, c)$. Jest on równy zero dla $\xi = 1$ (pręt o stałym przekroju lub $c = 1$ (materiał idealnie sprężysto-plastyczny), a ponadto, jak można sprawdzić, w rozważanym zakresie $0 \leq c \leq 1$, $1 \leq \xi < \infty$, pochodna $\partial B / \partial \xi$ jest nieujemna, a pochodna $\partial B / \partial c$ jest nie-dodatnia. Tak więc możemy uzależnić oszacowanie błędu tylko od jednej zmiennej, przyjmując we wzorze (4.21) wartości skrajne, najbardziej nie-

korzystne, $\xi = \infty$ lub $c = 0$. Podstawiając $\xi = \infty$ czyli $H^* = 1$ otrzymujemy oszacowanie

$$(4.22) \quad B \leq \frac{\sqrt{1-c}}{1 + \sqrt{1-c}},$$

natomiast gdy $c = 0$ czyli $H^* = \xi/(\xi - 1)$, otrzymujemy

$$(4.23) \quad B \leq \frac{\xi - 1}{2\xi - 1}.$$

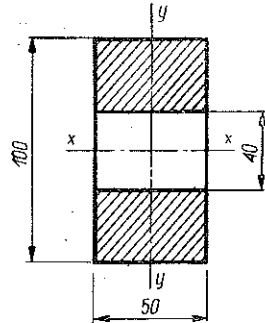
Na przykład gdy $\xi = F_1/F_2 = 1,5$ oraz $c = 0,977$ (stal), to najdokładniejsze oszacowanie (4.21) daje $B \leq 11,4\%$, oszacowanie (4.22) daje $B \leq 13,2\%$, wreszcie z oszacowania (4.23) wynika $B \leq 25\%$ (stosunkowo duża różnica, ponieważ c jest bliskie jedności). W rzeczywistości błędy wzoru (4.8) są z reguły znacznie mniejsze, co można sprawdzić porównując wyniki tego wzoru z pierwiastkami równania ścisłego (3.12).

Rysunek 3 podaje wykresy obliczonych ze wzorów (4.8) i (3.8) zależności $m = m(s)$ dla $\gamma = 0,2$, $c = 0,977$ (stal) oraz $\varepsilon_l = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$. Krzywa $\varepsilon_l = 0$ jest krzywą Y l i n e n a dla pręta pryzmatycznego.

5. Przykłady liczbowe

5.1. W pręcie o przekroju prostokątnym 10×5 cm ze sośniny fińskiej ($c = 0,875$) wykonano otwór kwadratowy 4×4 cm w pobliżu przekroju utwierdzonego (rys. 4). Obliczymy siłę krytyczną dla tego pręta przy założeniu, że jego długość wynosi $l = 25$ cm i $l = 50$ cm.

Obliczamy kolejno $I_1 = 104 \text{ cm}^4$, $I_2 = 62,3 \text{ cm}^4$, $F_1 = 50 \text{ cm}^2$, $F_2 = 30 \text{ cm}^2$. Wobec tego $\varepsilon_l = \sqrt{104 : 62,3} - 1 = 0,291$, $\xi = 50 : 30 = 1,67$. Jeżeli $l = 25$ cm, to $\gamma = 4 : 25 = 0,16$; współczynnik μ_l wynosi w przybliżeniu, zgodnie ze wzorem (2.34), $\mu_l = 0,823$. W dalszym ciągu $H = 3,12$, $m = 0,949$ oraz $P_k = 0,949 \cdot 450 \cdot 30 = 12820 \text{ kG}$. Dla porównania podajemy inne charakterystyczne wartości sił krytycznych dla rozpatrywanego pręta. Gdyby pręt nie był osłabiony, wówczas $H_0 = 2,28$, ze wzoru Y l i n e n a $m = 0,920$, ale wtedy odnosimy siłę krytyczną do siły na granicy plastyczności w przekroju nieosłabionym $QF_1 = 22500 \text{ kG}$, więc $P_y = 0,920 \times 22500 = 20700 \text{ kG}$. Wpływ osłabienia wynosi tu około 38%. Gdyby w rozpatrywanym przypadku naprężenia nie przekraczały granicy sprężystości, wówczas miałyby zastosowanie wzory wyprowadzone w p. 2. Wtedy dla pręta nieosłabionego siła E u l e r a wyniosłaby $P_E = 51300 \text{ kG}$, a dla osłabionego $P_k = \mu_l P_E = 42200 \text{ kG}$. Wpływ osłabienia wyniosłby wtedy tylko 17,3%.

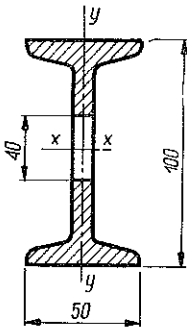


Rys. 4. Prostokątny przekrój pręta z osłabieniem

Jeżeli $l = 50$ cm, to $\gamma = 4 : 50 = 0,08$, $\mu_I = 0,909$, $H = 0,861$, $\bar{m} = 0,683$ oraz $P_k = 0,683 \cdot 450 \cdot 30 = 9200$ kG. Dla pręta nieosłabionego mielibyśmy $H_0 = 0,570$, $m = 0,507$, $P_Y = 11400$ kG. Wpływ osłabienia dla tego pręta wynosi już tylko około 19%, ponieważ smukłość pręta jest większa niż w przypadku poprzednim i wyboczenie niewiele odbiega od sprężystego. Siła eulerowska wyniosłaby tutaj $P_E = 12800$ kG, siła krytyczna przy założeniu sprężystości wyboczenia $P_k = \mu_I P_E = 11620$ kG, a wpływ osłabienia 9,2%. W każdym razie wpływ osłabienia jest w rzeczywistości z reguły znacznie większy niż wynikałoby to z obliczeń przyjmujących sprężystość wyboczenia.

5.2. W pręcie dwuteowym o przekroju znormalizowanym I100 ze stali St 37 ($c = 0,977$) wykonano otwór kwadratowy 4×4 cm w pobliżu przekroju utwierdzonego (rys. 5). Obliczymy siłę krytyczną dla tego pręta przy założeniu, że jego długość wynosi $l = 25$ cm i $l = 50$ cm.

Z normy PN-H-93407 odczytujemy $I_1 = 12,2$ cm⁴, $F_1 = 10,6$ cm²; w przekroju osłabionym obliczamy $I_2 = 11,96$ cm⁴, $F_2 = 8,8$ cm². Wobec tego $e_I = \sqrt{12,2 : 11,96} - 1 = 0,010$, $\xi = 10,6 : 8,8 = 1,20$. Jeżeli $l = 25$ cm, to $\gamma = 0,16$, $\mu_I = 0,994$, $H = 4,78$, $m = 0,996$ oraz $P_k = 0,996 \cdot 2400 \cdot 8,8 = 21000$ kG. Dla pręta nieosłabionego mielibyśmy $H_0 = 3,98$, $m = 0,993$ oraz $P_Y = 0,993 \cdot 2400 \cdot 10,6 = 25200$ kG. Wpływ osłabienia wynosi więc 16,7%. Przy założeniu sprężystości wyboczenia $P_E = 101\,000$ kG, $P_k = \mu_I P_E = 100\,400$ kG, a wpływ osłabienia wynosi tylko 0,6%.



Rys. 5. Dwuteowy przekrój pręta z osłabieniem

Jeżeli $l = 50$ cm, to $\gamma = 0,08$, $\mu_I = 0,997$, $H = 1,183$, $\bar{m} = 0,929$ oraz $P_k = 19600$ kG. Dla pręta nieosłabionego mielibyśmy $H_0 = 0,987$, $m = 0,857$ oraz $P_Y = 21800$ kG; wpływ osłabienia wynosi około 10%. Przy założeniu sprężystości wyboczenia $P_E = 25230$ kG, $P_k = \mu_I P_E = 25200$ kG i wpływ osłabienia jest niemal nie do uchwycenia. Wynika stąd, że w przypadku przekrojów profilowych obliczenia, zakładające sprężystość wyboczenia, są jeszcze bardziej mylące niż w przypadku przekrojów zwartych, bowiem w rzeczywistości wpływ osłabienia jest i tu dość duży.

6. Uwagi końcowe

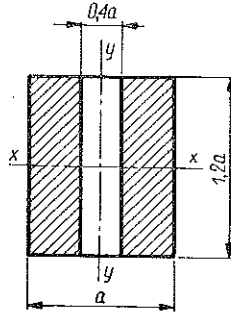
6.1. Przy rozwiązywaniu zagadnienia korzystaliśmy z teorii elementarnej nie uwzględniając nigdzie wpływu spiętrzenia naprężeń, wywołanego miejscowym osłabieniem, na wartość siły krytycznej. Wpływ ten będzie prawdopodobnie inny w zakresie sprężystym, gdzie występuje stosunkowo duże spiętrzenie naprężeń, a inny w zakresie sprężysto-plastycznym, gdzie spiętrzenie jest zredukowane nieliniowością wykresu rozciąg-

gania (ściskania). Jak długo nie zostanie opracowana ścisłsza teoria wy-
boczenia prętów z miejscowymi osłabieniami, zaproponowane wzory
należy stosować ze zwiększonym współczynnikiem bezpieczeństwa.

6.2. Często osłabieniem pręta jest otwór kołowy. Wtedy jako długość
części osłabionej można przyjmować średnicę otworu; przyjęcie takie po-
woduje błąd na korzyść pewności, o ile nie bierzemy
pod uwagę problemu spiętrzenia naprężeń.

6.3. Wykonanie otworu może zmieniać kierunek wy-
boczenia pręta, co należy zawsze mieć na uwadze. Rysunek 6
podaje przykład przekroju, dla którego przed
wykonaniem otworu $I_{x0} > I_{y0}$, ale po wykonaniu otworu
 $I_x < I_y$. W takim przypadku siłą krytyczną będzie
w rzeczywistości mniejsza z sił krytycznych, obliczonych
z osobna dla obu możliwych kierunków wyboczenia.

6.4. Wielu autorów, np. [10] i [11], zwraca uwagę na
fakt, iż równanie przestępne (1.1) jest zarazem równa-
niem określającym siłę krytyczną dla pręta o stałym
przekroju, ale obciążonego dwiema siłami w dwóch róż-
nych przekrojach (należy w nim dokonać jedynie sto-
sownej zmiany oznaczeń). Toteż wzory niniejszej pracy
będzie można wykorzystać bez większych zmian i do
tamtego przypadku, przynajmniej jeżeli w grę wchodzi
zakres sprężysty. Warto również wspomnieć, że w szere-
gu innych przypadków (np. pręt dwustronnie utwierdzony, osłabiony
w pobliżu przekroju środkowego lub w pobliżu obu przekrojów utwier-
dzonych, A. Pflüger, [10]; pręt dwuprzegubowy, osłabiony przy jednym
z końców, M. T. Huber, [5], A. Pflüger, [10], A. R. Rżanicyn, [12])
wyjściowe równanie przestępne ma postać bardzo zbliżoną do postaci (1.1)
i metody tej pracy mogą być bez większych zmian stosowane i do tam-
tych przypadków.



Rys. 6. Przykład kształtu przekroju, w którym po wykonaniu otworu zmienia się kierunek największego momentu bezwładności

Literatura cytowana w tekście

- [1] А. Н. Динник, *Устойчивость упругих систем*, Изд. АН СССР, Москва-Ленинград 1950.
- [2] А. Н. Динник, *Продольный изгиб-кручение*, Изд. АН СССР, Москва 1955.
- [3] S. Falk, *Die Knickformeln für den Stab mit n Teilstücken konstanter Biegesteifigkeit*, Ing.-Archiv 24 (1956), s. 85—90.
- [4] T. Gałkiewicz, *Zastosowanie metody małego parametru do określania siły krytycznej dla ściskanych prętów o zmiennym przekroju*, Zesz. Nauk. Polít. Łódzkiej, Mechanika 4 (1956), 99—111.
- [5] M. T. Huber, *Obciążenie krytyczne prętów osiowo ściskanych o przekroju nieciągłe zmiennym*, IBTL, Warszawa 1930, oraz *Pisma*, t. 2, PWN Warszawa 1956, s. 483—500.

[6] А. П. Коробов, *Приближенный метод расчета стоек постоянного и переменного сечений*. Изв. Ростовского Инст. Инж. Жел. Дор. Транспорта, 1/2, 1935 (cyt. wg. [11]).

[7] H. Larsson, *J. Aeron. Sci.*, 23 (1956), s. 867—873 (cyt. wg [21]).

[8] В. П. Манжаловский, *Устойчивость колонн ступенчатобразного сечения*, Сборник «Вопросы конструкций и теории сооружений», ДНТБУ, 1938.

[9] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, wyd. 2, PWN Warszawa 1958.

[10] A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

[11] С. Д. Пономарев и др. *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, Машгиз, Москва 1952. Przekład polski: *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, t. 2, PWN Warszawa 1958.

[12] А. Р. Ржаницын, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1955.

[13] I. Sala, *Über die unelastische Knickung eines verjüngten Stabes*, Technische Hochschule, Helsinki 1951.

[14] F. R. Shanley, *The Column Paradox*, *J. Aeron. Sci.*, nr 12, 13 (1946).

[15] F. R. Shanley, *Inelastic Column Theory*, *J. Aeron. Sci.*, nr 5, 14 (1947).

[16] S. P. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.

[17] W. T. Thomson, *Critical Load of Columns of Varying Cross Section*, *J. appl. Mech.*, 17 (1950), s. 132-134.

[18] C. T. Wang, *Applied Elasticity*, New York 1953.

[19] A. Ylinen, *Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich*, Technische Hochschule, Helsinki 1938.

[20] A. Ylinen, *Eräs aksiaalisen jännitystilan muodonmuutos funktio [A stress-Strain-Function for a Simple Compression and Corresponding Buckling Formula]*, *Teknillinen Aikakauslehti* 38 (1948), Helsinki 1948, s. 9.

[21] A. Ylinen, *A Method of Determining the Buckling Stress and the Required Cross-Sectional Area for Centrally Loaded Straight Columns in Elastic and Inelastic Range*, *Memoires Assoc. Int. Ponts Charpentes* 16, Zurich 1956, 529-550.

[22] M. Życzkowski, *Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, *Rozpr. Inżyn.* 2 (1954), s. 231-289.

[23] M. Życzkowski, *Wpływ ściśliwości materiału na rozkład naprężeń w płytach częściowo uplastycznionych*, *Arch. Bud. Maszyn* 5 (1958), s. 53-87.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ОСЛАБЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ НА КРИТИЧЕСКУЮ СИЛУ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В работе определяется критическая сила для сжатых в осевом направлении односторонне заземленных стержней, ослабленных вблизи заземленного сечения (рис. 1). При этом была использована элементарная теория не учитывающая влияния концентрации напряжений на критическую силу. В качестве исходного уравнения принимается уравнение (1.1), определяющее критическую силу для двухстепенного стержня в области упругости. Это уравнение после сведе-

ния к безразмерному виду, решается методом малого параметра, за который принимается очередно γ и ε , определенные формулами (2.1) и (2.2). Полученные таким образом первые приближения сравниваются с формулой А. Н. Динника (2.32), выведенной энергетическим методом констатируя, что погрешности в случае малого параметра ε являются значительно меньшими, чем погрешности формулы А. Н. Динника (таблица 2).

В упруго-пластической области использовано формулу А. Иллина (3.2). Прежде всего выведено трансцендентное уравнение, точно определяющее критическую силу (3.12). Затем даются приближенные формулы определяющие верхний и нижний пределы критической силы. В обоих случаях точно учитывается изменение самого только момента инерции, причем в первом случае принимается меньший из модулей продольного изгиба E_2 , как общий для всего стержня [формула (4.8)], а во втором — большой из модулей E_1 [формула (4.13)]. Нижний предел (4.8) предлагается в виде окончательной формулы для применения в инженерной практике, тогда как верхний предел служит для оценки погрешности нижнего предела. Наконец, определяется погрешность с помощью формулы (4.21) или упрощенных формул (4.22) и (4.23), которые однако дают менее точную оценку.

В работе приводится несколько примеров определения критических сил для стержней, ослабленных вблизи защемленного сечения, а также упоминается о других применяемых использованного в настоящей работе метода.

S u m m a r y

THE INFLUENCE OF A WEAKENED CROSS-SECTION ON THE CRITICAL FORCE OF A BAR IN THE ELASTIC-PLASTIC RANGE

This paper is devoted to the computation of the critical force for axially compressed bars clamped at one end and weakened in the neighbourhood of that end (Fig. 1). The elementary theory is used, the influence of the stress concentration on the critical force not being taken into consideration. The starting equation is (1.1). It determines the critical force for a two-step bar in the elastic range. This equation, after reducing to the dimensionless form, is solved by means of the perturbation method, the small parameter being first γ and then ε , defined by the Eqs. (2.1) and (2.2). The first approximations thus obtained are compared to A. N. Dinnik's equation (2.32) derived by means of the energy method. It is found that in the case of small parameter ε the errors are much smaller than those of the Dinnik formula (Table 2).

In the elastic-plastic range, the equation of A. Ylisen (3.2) is used. First, the transcendental equation (3.12) is derived, accurately deter-

mining the critical force. Next, approximate formulae are given, determining the upper and lower bound of the critical force. In both cases, only the change of the moment of inertia is accurately taken into consideration. In the first case, the smaller of the buckling moduli [Eq. (4.8)], and in the second case the greater of the moduli [Eq. (4.13)], is assumed to be common to the entire bar. The lower bound (4.8) is proposed as the final equation for practical use, the upper bound being used for the purpose of appraising the error. Finally, the error is appraised by means of the Eq. (4.21) or the simplified equations (4.22) and (4.23) giving, however, less accurate appraisal.

The paper gives also a few examples of the computation of critical forces of bars weakened in the neighbourhood of the clamped end, other possibilities of application also being mentioned.

ZARŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1959 r.
