

JÓZEF IGNACZAK

O ROZPIĘTOŚCIACH BELEK WSPORNIKOWYCH
UKSZTAŁTOWANYCH Z WARUNKÓW WYRÓWNANIA
NAPRĘŻEŃ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXIII

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	183
2. Sformułowanie zagadnienia	183
3. Rozwiązanie	184
4. Uwzględnienie środnika	187

1. Wstęp

Zagadnienie kształtowania wytrzymałościowego powstaje szczególnie często w budownictwie mostowym i przemysłowym oraz odgrywa dużą rolę w konstrukcjach o dużych rozpiętościach i dużych ciężarach własnych. Gdy ciężar własny elementu jest kilkakrotnie większy od obciążenia użytkowego, właściwe rozłożenie materiału jest sprawą ważną. Jako podstawę kształtowania takiej konstrukcji można przyjąć ogólne twierdzenie kształtowania, [1], zawierające między innymi tzw. warunki wyrównania naprężeń. Łatwo się przekonać, że przy dużych, z góry danych rozpiętościach oraz z góry założonych wymiarach poprzecznych i przy określonym typie obciążenia nie można w całym przedziale rozpiętości spełnić żądanych warunków wyrównania.

W pracy przedstawiamy niektóre wnioski dotyczące ograniczenia rozpiętości belek ukształtowanych na podstawie warunków wyrównania skrajnych wartości naprężeń.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzmy belkę wspornikową, skrzynkową, wykonaną z materiału izotropowego i jednorodnego. Załóżmy najpierw, że przekrój poprzeczny belki składa się tylko z dwóch symetrycznie względem środka położonych półek o zmiennej¹ grubości $c = c(x)$. Oznaczmy kolejno stałą wysokość i szerokość belki przez a_0 i b_0 . Przyjmijmy wreszcie, że belka poddana jest działaniu obciążenia użytkowego równomiernie rozłożonego p oraz ciężaru własnego γ .

Poszukujemy zmiennej grubości półki $c = c(x)$ z następującego warunku wyrównania naprężeń na górnej (dolnej) krawędzi belki²:

$$(2.1) \quad M(x) a_0 - 2 \sigma_0 I(x) = 0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad M(x) = \frac{1}{2} p x^2 + 2 \gamma b_0 \int_0^x c(\xi) (x - \xi) d\xi$$

¹ Zagadnienie zmiennej wysokości belki wspornikowej było rozpatrzone w pracy [2].

² Warunek (2.1) nie uwzględnia naprężeń stycznych w zginanej belce.

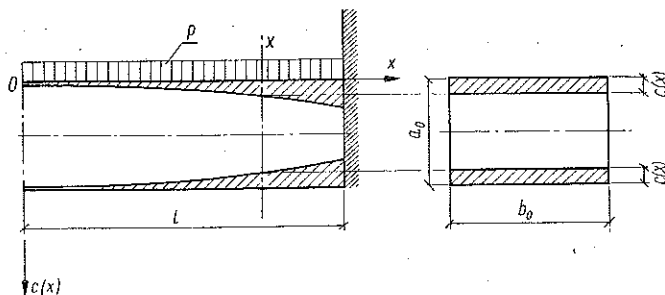
jest momentem zginającym od ciężaru własnego i obciążenia użytkowego, zaś

$$(2.3) \quad I(x) = \frac{2}{3} b_0 \left\{ \left(\frac{a_0}{2} \right)^3 - \left[\frac{a_0}{2} - c(x) \right]^3 \right\}$$

jest momentem bezwładności przekroju. Symbole σ_0 i $-\sigma_0$ oznaczają naprężenia normalne odpowiednio na górnej i dolnej krawędzi belki. Funkcja $c = c(x)$ powinna ponadto spełniać warunek

$$(2.4) \quad 0 \leq c(x) \leq \frac{a_0}{2}, \quad \text{jeśli} \quad 0 \leq x \leq l,$$

gdzie l jest rozpiętością belki.



Rys. 1

W tak sformułowanym zadaniu pominięto środniki belki skrzynekowej. Obecność środników rozważamy w dalszej części pracy, gdzie wprowadzamy dodatkowo stały, dodatni moment zginający M_0 , działający na swobodnym końcu belki i pozwalający na spełnienie warunku (2.1) na całej rozpiętości belki.

3. Rozwiązanie

Warunek wyrównania (2.1) prowadzi do następującego nieliniowego równania całkowego:

$$(3.1) \quad \left[c(x) - \frac{a_0}{2} \right]^3 + \left(\frac{a_0}{2} \right)^3 - \frac{3}{8} \frac{p a_0}{\sigma_0 b_0} x^2 - \frac{3 \gamma a_0}{2 \sigma_0} \int_0^x c(\xi) (x - \xi) d\xi = 0.$$

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$(3.2) \quad a(x) \equiv \left[c(x) - \frac{a_0}{2} \right]^3 + \left(\frac{a_0}{2} \right)^3$$

wniosujemy, że jedynym, rzeczywistym rozwiązaniem $c(x)$ równania (3.2) jest funkcja

$$(3.3) \quad c(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sqrt[3]{a(x) - \left(\frac{a_0}{2} \right)^3}.$$

Zatem równania (3.2) oraz (3.3) dla rzeczywistych par funkcji $a(x)$, $c(x)$ są równoważne.

Podstawiając funkcję (3.3) do (3.1) otrzymamy równanie całkowe na pomocniczą funkcję $a = a(x)$:

$$(3.4) \quad a(x) - \frac{3pa_0}{8\sigma_0 b_0} x^2 - \frac{3\gamma a_0}{2\sigma_0} \int_0^x \left[\frac{a_0}{2} + \sqrt[3]{a(\xi) - \left(\frac{a_0}{2}\right)^3} \right] (x - \xi) d\xi = 0.$$

Dwukrotne różniczkowanie równania (3.4) daje

$$(3.5) \quad a''(x) - m_0 - n_0 \sqrt[3]{a(x) - \left(\frac{a_0}{2}\right)^3} = 0.$$

Przyjęliśmy oznaczenia

$$n_0 = \frac{3\gamma a_0}{2\sigma_0}, \quad m_0 = \frac{3a_0}{4\sigma_0} \left(\frac{p}{b_0} + \gamma a_0 \right).$$

Jeżeli funkcja $a = a(x)$ posiada funkcję odwrotną w przedziale $(0, l)$, to rozwiązaniem równania (3.5) jest funkcja

$$(3.6) \quad x + A_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left\{ A_1 + m_0 a + \frac{3}{4} n_0 \left[a - \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \right] \sqrt[3]{a - \left(\frac{a_0}{2}\right)^3} \right\}^{-1/2} da,$$

gdzie A_1 i A_2 oznaczają dowolne stałe.

Korzystając z równania (3.3) możemy napisać wzór na funkcję $x = x(c, A_1, A_2)$:

$$(3.7) \quad x + A_2 = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^2 dc}{\sqrt{\frac{3}{4} n_0 \left(c - \frac{a_0}{2}\right)^4 + m_0 \left[\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^3 + \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \right] + A_1}}.$$

Stałe A_1 oraz A_2 wyznaczamy z następujących warunków równoważności równania całkowego (3.1) oraz równania różniczkowego (3.5):

$$(3.8) \quad c(0) = 0, \quad c'(0) = 0.$$

Z tych warunków otrzymamy

$$A_1 = -\frac{3}{4} n_0 \left(\frac{a_0}{2}\right)^4.$$

Zatem ostateczna postać funkcji $x = x(c, A_2)$ jest następująca:

$$(3.9) \quad x + A_2 = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^2 dc}{\sqrt{\frac{3}{4} n_0 \left[\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^4 - \left(\frac{a_0}{2}\right)^4 \right] + m_0 \left[\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^3 + \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \right]}}.$$

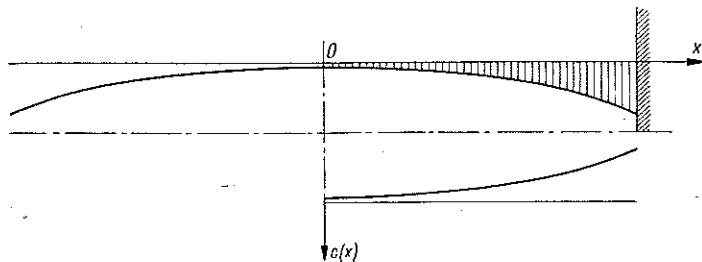
W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie równania (3.1) w postaci całki eliptycznej. Rozwiązanie powyższe może posłużyć do numerycznego wy-

znaczenia zmiennej grubości półki przez wykonanie całkowania w sposób przybliżony.

Rozwiązanie numeryczne wykonać można metodą Rungego-Kutta.

Spośród dwóch gałęzi rozwiązania (3.9) przyjmujemy tę, która odpowiada warunkom fizycznym zadania. Przyjmując zwiększenie się grubości półki zgodnie z dodatnim zwrotem osi x należy po prawej stronie wzoru (3.9) odrzucić znak minus i pozostawić plus.

Zauważmy, że poszukiwana funkcja $c = c(x)$ jest symetryczna względem osi $x = 0$ i przechodzi przez początek układu ($x = 0, c = 0$).



Rys. 2

Jeżeli $0 \leq c \leq a_0/2$, to można również wykazać, że $c'(x) \geq 0$ oraz $c''(x) \geq 0$ przy $x \geq 0$. Zatem poszukiwana funkcja $c = c(x)$ jest przy $x \geq 0$ ściśle rosnąca oraz skierowana wypukłością ku górze (rys. 2), ponadto przy $x = 0$ osiąga minimum nieujemne. Z ciągłości funkcji $c = c(x)$ oraz ze znaków pochodnych tej funkcji przy $x \geq 0$ wynika, że istnieje taka rozpiętość belki $x_0 = l > 0$, że w przedziale $0 \leq x \leq l$ krzywa $c = c(x)$ określa przydatny technicznie kształt belki dla dowolnych parametrów $p > 0, \sigma > 0, b_0 > 0, \gamma > 0$ i $a_0 > 0$. Oznacza to, że w tym przedziale rozwiązanie jest w ogólnych zarysach zgodne z intuicyjnym doбором kształtu belek wspornikowych. Jako górną granicę rozpiętości x_0 przy dowolnym obiorze wspomnianych parametrów można przyjąć takie x_0 , że

$$c'(x_0) = \infty \quad \text{lub, że} \quad \left[\frac{dx}{dc} \right]_{x=x_0} = 0,$$

gdzie dx/dc bierzemy ze wzoru (3.9).

Łatwo sprawdzić, że taka rozpiętość jest osiągnięta przy $c = a_0/2$, a więc przy tej odciętej x_0 , przy której półki spotykają się w środku wysokości belki. Przy wspomnianej rozpiętości x_0 nie traci sensu mianownik całki (3.9), gdyż wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie i równe

$$\frac{3}{4} \frac{a_0}{\sigma_0} \left(\frac{p}{\sigma_0} + \frac{1}{4} \gamma a_0 \right),$$

o ile wszystkie parametry występujące w tym wyrażeniu są dodatnie. Jako rzeczywistą rozpiętość belki l_r , można przyjąć długość dowolnego podprzedziału zawartego w przedziale $0 < x < x_0$.

Jeżeli określamy z góry rozpiętość belki l , to wspomniane rozwiązanie może nie być przydatne technicznie dla dowolnych parametrów, przy czym może ono być przydatne przy szczególnych wartościach tych parametrów.

Funkcja $x = x(c)$ pozostaje w określonym związku z łukiem pewnej elipsy. W wyrażeniu podpierwiastkowym całki eliptycznej (3.9) występuje czwarta potęga rzędnej funkcji $c(x)$ w odróżnieniu od analogicznej całki eliptycznej, [2], określającej zmienną wysokość belki $f(x)$, gdzie w wyrażeniu podpierwiastkowym występuje trzecia potęga funkcji $f(x)$.

Z porównania wzorów na zmienną wysokość belki ³:

$$(3.10) \quad x = \bar{c} - \frac{1}{l\sqrt{6}} \int \frac{(\sigma_0 f - 2P) df}{\sqrt{-\frac{\gamma\sigma_0}{3} f^3 - \left(\frac{1}{2} p\sigma_0 - \gamma P\right) f^2 + 2pPf + \bar{c}}}$$

oraz wzoru (3.9) wynika, że poszukiwane funkcje określające kształt wspornika należą do podobnej rodziny krzywych. Odnośnie wzoru (3.10) można sformułować analogiczne wnioski dotyczące rozpiętości belki ukształtowanej z warunków wyrównania naprężeń.

Jeżeli założymy, że wysokość belki $f(x) = f$ określona wzorem (3.10) wzrasta ku przekrojowi utwierdzenia, należy ograniczyć rozpiętość belki x_0 w taki sposób, aby jednocześnie były spełnione następujące warunki:

$$\varphi(x) = \left[f(x) - \frac{2P}{\sigma_0} \right] \leq 0, \quad \text{jeśli } x \leq x_0,$$

$$-2\gamma\sigma_0 [\varphi(x)]^3 - 3(p\sigma_0 + 2\gamma P) [\varphi(x)]^2 + c^* > 0, \quad \text{jeśli } x \leq x_0.$$

W powyższych wzorach P oznacza siłę wewnętrzną działającą wzdłuż osi belki, a \bar{c} , \bar{c} , c^* są pewnymi stałymi określonymi przez warunek obciążenia swobodnego końca wspornika.

4. Uwzględnienie srodnika

Zauważmy, że postać rozwiązania dla belki wspornikowej z uwzględnieniem srodników o stałej szerokości b_1 jest taka sama, jak (3.9). Zakładając bowiem, że moment zginający

$$(4.1) \quad M^*(x) = M_0 + M(x),$$

³ Wzór (3.10) odnosi się do pełnego przekroju prostokątnego belki, gdy wyrównane zostały naprężenia tylko na górnej krawędzi belki. Ponadto w tym przypadku istnieje dodatkowy moment zginający wywołany siłą poziomą P , działającą na zmiennym mimośrodku, zależnym od zmieniającej się wysokości.

gdzie $M(x)$ bierzemy ze wzoru (2.2) i stałą p należy teraz zamienić na $p' = p + 2\gamma a_0 b_1$ zaś $M_0 > 0$ oraz że moment bezwładności wyraża się wzorem

$$(4.2) \quad I^*(x) = I(x) + 2 \cdot \frac{1}{12} b_1 a_0^3,$$

otrzymamy dla zmiennej grubości półki rozwiązanie

$$(4.3) \quad x + \bar{A}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^2 dc}{\sqrt{\frac{3}{4} n_0 \left[\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^4 - \left(\frac{a_0}{2}\right)^4 \lambda^4 \right] + m'_0 \left[\left(c - \frac{a_0}{2}\right)^3 + \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \lambda^3 \right]}}$$

$$m'_0 = \frac{3}{4} \frac{a_0}{\sigma_0} \left(\frac{p'}{b_0} + \gamma a \right).$$

Stałą \bar{A}_2 wyznaczamy z warunku

$$c(0) = \frac{a_0}{2} (1 - \lambda),$$

gdzie

$$\lambda = \sqrt[3]{1 + 2 \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{3 M_0}{a_0^2 b_0 \sigma_0} \right)}.$$

Warunek $0 \leq \lambda \leq 1$ określający spełnienie warunku (2.4) wymaga ograniczenia:

$$\frac{1}{3} a_0^2 b_1 \sigma_0 \leq M_0 \leq \frac{1}{3} a_0^2 b_1 \sigma_0 + \frac{1}{6} a_0^2 b_0 \sigma_0.$$

Rozważania dotyczące rozpiętości belek ukształtowanych zgodnie z funkcją (4.3) są analogiczne jak w poprzednich przypadkach.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Z. Wasiutyński, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, część 1-3, Warszawa 1939.
 [2] A. Brandt i J. Ignaczak, *Kształtowanie wytrzymałościowe belki wspornikowej*, Rozpr. Inżyn., 1, 6 (1958).

Резюме

ПРОЛЕТЫ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, ФОРМА КОТОРОЙ ПОДИКТОВАНА УСЛОВИЯМИ ВЫРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе рассматриваются возможные пролеты консольных балок, форма которых обусловлена условиями выравнивания напряжений на краях балки.

На основании формул, заключающих эллиптические интегралы и определяющих изменение сечения вдоль оси балки делаются некоторые выводы, касающиеся пригодности описанных выше балок.

S u m m a r y

THE SPAN OF CANTILEVER BEAMS DESIGNED WITH THE CONDITION
OF EQUALIZED STRESSES

The problem under consideration is that of spans of cantilever beams designed with the condition of equalized edge stresses.

Using elliptic integrals determining the variability of the cross-section along the axis of the beam, certain conclusions are drawn concerning the practical applicability of beams designed with such conditions.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 grudnia 1958 r.
