

KAZIMIERZ PISZCZEK

PEWNE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ PRĘTA  
PRYZMATYCZNEGO Z MASĄ NA KOŃCU

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXXI

## SPIS TREŚCI

1. Różniczkowe równania ruchu	148
2. Sprowadzenie równań ruchu do układu równań różniczkowych zwy- czajnych	151
2.1. Belka z warunkami brzegowymi wolnego podparcia	152
2.2. Belka obustronnie utwierdzona	154
3. Określenie podstawowych obszarów rezonansowych przy warunkach brzegowych wolnego podparcia	155
4. Amplitudy drgań ustalonych	159
5. Drgania śrubowych sprężyn walcowych	163

W literaturze krajowej i obcej dość obszernie opracowano zagadnienie stateczności dynamicznej prętów przyzmatycznych. W pracach dotychczasowych na ten temat przyjmowano hipotezę płaskich przekrojów, w wyniku której nie uwzględniano odkształceń postaciowych elementów belki. Odstępstwo od wspomnianej wyżej hipotezy prowadzi do konieczności uwzględnienia sił poprzecznych w przekrojach belki.

Wpływ sił poprzecznych na częstość drgań własnych belek jest szczególnie duży przy drganiach wyższych rzędów (wyższych harmonicznym). W pracy niniejszej analizowano jedynie ruch belki odpowiadający drganiom podstawowym, ale czyniono to z uwagi na stosowanie wyników do śrubowych sprężyn walcowych, gdzie odkształcenia wywołane siłą poprzeczną odgrywają pewną rolę już przy drganiach podstawowych. Pominęto wpływ tłumienia, które w odniesieniu do sprężyn nie ma większego znaczenia.

Ścisłe rozważenie zagadnienia stateczności dynamicznej prętów zakrzywionych przestrzennie, jakim jest niewątpliwie sprężyna, przedstawia poważne trudności. W przypadku sprężyn o małym kącie nachylenia zwojów (od  $5^\circ$  do  $8^\circ$ ) można w sposób przybliżony rozważyć powyższe zagadnienie przez stworzenie modelu zastępczego w postaci przyzmatycznego pręta. Dla takiego pręta zastępczego podaje się odpowiednie zastępcze parametry. W pracy ograniczono się do stanu sprężystego i przyjęto jedynie nieliniowość geometryczną.

Literatura omawiająca drgania sprężyn jest dość obszerna, [7]. Traktuje ona przeważnie o drganiach własnych tak podłużnych jak i poprzecznych. Nie zauważono w znanej literaturze sformułowanego i rozwiązanego zagadnienia stateczności dynamicznej takich elementów będących pod działaniem siły zmiennej okresowo w czasie i działającej osiowo. Taki rodzaj obciążenia ma istotnie miejsce w przypadku sprężyn osiowo ściskanych i rozciąganych. Istotnym elementem rozważanego układu drgającego jest masa skupiona na przesuwym końcu sprężyny. Na podstawie konkretnego przykładu stwierdzono możliwość wystąpienia dwu obszarów rezonansowych dla realnie możliwych częstości kątowych siły wymuszającej.

## 1. Różniczkowe równania ruchu

Równania różniczkowe ruchu belki z uwzględnieniem siły wymuszającej, działającej osiowo, wyprowadzimy z zasady Hamiltona

$$(1.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} (E - U) dt = \text{extremum},$$

gdzie  $E$  oznacza energię kinetyczną, zaś  $U$  energię potencjalną układu drgającego.

Wpierw wyznaczmy energię potencjalną. Rozważmy belkę o długości  $l$  i polu powierzchni przekroju poprzecznego  $F$ . Ogólna postać energii potencjalnej wynosi [ $u(0, t) \equiv 0$ ]

$$(1.2) \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l \iint_F \left[ \sigma_x \varepsilon_x + \left( 1 + \frac{Pk}{GF} \right) \tau_{xy} \gamma_{xy} \right] dF dx + u(l, t) P,$$

gdzie  $u(x, t)$  oznacza przemieszczenie osiowe punktów leżących na osi belki, zaś  $P(t)$  jest ściskającą siłą osiową. Stała  $k$  jest parametrem charakteryzującym kształt przekroju belki, zaś  $G$  oznacza moduł na ścinanie.

Oznaczmy przez  $\varepsilon_x$  odkształcenie w dowolnym miejscu przekroju prostopadłego do osi  $x$  belki. Mamy wtedy

$$(1.3) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)},$$

gdzie

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Funkcje  $w(x, t)$  oraz  $\xi(x, y, t)$  przedstawiają odpowiednio przemieszczenie całkowite punktów leżących na osi belki w kierunku  $y$  prostopadłym do osi belki oraz dodatkowe przemieszczenie osiowe punktów o współrzędnych  $x$  i  $y$  spowodowane obrotem przekroju i odkształceniem postaciowym.

Zgodnie z rozważaniami prowadzonymi w pracy [5] mamy

$$(1.4) \quad \xi = -\frac{\partial w}{\partial x} y + \psi(x, t) f(y).$$

W powyższym związku  $\psi(x, t) f(y)$  określa zniekształcenie płaszczyzny przekroju poprzecznego. Funkcję  $f(y)$  charakteryzującą postać zniekształcenia płaszczyzny przekroju dobiera się w oparciu o elementarną teorię zginania. Spełnia ona między innymi związki

$$(1.5) \quad f(y) = -f(-y), \quad \int_F f(y) y dF = kJ, \quad \int_F f'(y) dF = F,$$

gdzie  $J$  jest momentem bezwładności pola przekroju.

<sup>1</sup> W pracy [3] podano wartości  $k$  dla różnych kształtów przekrojów belek.

Pomijając wpływ naprężeń normalnych do osi belki możemy napisać

$$(1.6) \quad \sigma_x = E \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy},$$

gdzie

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi(x, t) f'(y).$$

Wprowadzimy nową zmienną

$$(1.7) \quad \theta(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} - k\psi,$$

k którą można interpretować jako średnią wartość kąta obrotu przekroju belki.

Uwzględniając powyższe w (1.2) po wykonaniu obliczeń mamy

$$(1.8) \quad U = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ F \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 + J \dot{\theta}_x^2 \right] dx + \\ + u(l, t) P + \frac{F}{k} \left( 1 + \frac{kP}{GF} \right) \frac{G}{2} \int_0^l (w_x - \theta)^2 dx.$$

Wykorzystano przy tym zależności (1.5) oraz

$$(1.9) \quad \int_F f^2 dF = Jk^2, \quad \int_F f'^2 dF = kF.$$

Energia kinetyczna  $E$  wyrazi się wzorem

$$(1.10) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F \gamma [\dot{w}^2 + (\dot{u} + \dot{\xi})^2] dF dx + \frac{1}{2} M [\dot{u}(l, t)]^2,$$

gdzie  $\gamma$  jest gęstością na jednostkę objętości, zaś  $M$  przedstawia masę przytwierdzoną do belki na jej końcu. Po wykonaniu obliczeń i wykorzystaniu (1.5), (1.7) i (1.9) mamy

$$(1.11) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^l \gamma [F(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + J\dot{\theta}^2] dx + \frac{1}{2} M [\dot{u}(l, t)]^2$$

(kropki oznaczają różniczkowanie względem czasu).

Stosując zasadę Hamiltona (1.1) otrzymamy układ równań:

$$(1.12) \quad \begin{cases} E \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] - \gamma \ddot{u} = 0, \\ G \frac{F}{k} \left( 1 + \frac{kP}{GF} \right) (w_x - \theta) + EJ \theta_{xx} - \gamma J \ddot{\theta} = 0, \\ EF \frac{\partial}{\partial x} \left[ w_x \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right] + \frac{GF}{k} \left( 1 + \frac{kP}{GF} \right) (w_{xx} - \theta_x) - \gamma F \ddot{w} = 0. \end{cases}$$

Pierwszemu z nich przyporządkujemy warunki brzegowe

$$(1.13) \quad u(0, t) = 0, \quad EF \left[ u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_{x=l} = -P - M\ddot{u}(l, t),$$

zaś dwóm równaniom pozostałym w przypadku końców podpartych (jeden koniec utwierdzony przegubowo, a drugi przegubowo-przesuwnie)

$$(1.14) \quad w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } x = l,$$

a w przypadku końców utwierdzonych zupełnie (jeden z nich również przesuwnie)

$$(1.15) \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } x = l.$$

Jeśli pominiemy masę na końcu belki ( $M = 0$ ) i pominiemy bezwładność w kierunku podłużnym ( $\ddot{u} = 0$ ), to układ równań (1.12) wraz z warunkiem (1.13) daje związki wyprowadzone w pracy [5] (przy czym należy przyjąć  $P$  ze znakiem ujemnym).

Układ równań (1.12) zastąpimy innym wyrażając  $\theta$  za pomocą  $\psi$  przez związek (1.7). W przypadku tym mamy

$$(1.16) \quad U = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ F \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 + J (w_{xx} - k\psi_x)^2 \right] dx + \\ + \frac{FG}{2} \left( 1 + \frac{kP}{GF} \right) k \int_0^l \psi^2 dx + u(l, t) P$$

oraz

$$(1.17) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^l \gamma \left[ F (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + J (\dot{w}_x - k\dot{\psi})^2 \right] dx + \frac{1}{2} M [\dot{u}(l, t)]^2.$$

Zastosowana obecnie zasada Hamiltona daje układ równań

$$(1.18) \quad \begin{cases} E \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \gamma \ddot{u} = 0, \\ k \left[ FG \left( 1 + \frac{kP}{GF} \right) \psi + EJ (w_{xxx} - k\psi_{xx}) - \gamma J (\ddot{w}_x - k\ddot{\psi}) \right] = 0, \\ -EF \frac{\partial}{\partial x} \left[ w_x \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right] + \gamma F \ddot{w} - J \gamma (\ddot{w}_{xx} - k\ddot{\psi}_x) + \\ + EJ (w_{xxxx} - k\psi_{xxx}) = 0. \end{cases}$$

Warunki brzegowe są następujące: dla pierwszego równania pozostają bez zmiany warunki (1.13), dla dwu pozostałych w przypadku przegubowego utwierdzenia mamy

$$(1.19) \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } x = l,$$

a w przypadku zupełnego utwierdzenia końców

$$(1.20) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \psi = 0, \quad \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } x = l.$$

Inne warunki brzegowe są również możliwe.

Z układu (1.18) można otrzymać przypadki szczególne. Jeśli w równaniu drugim pominiemy drgania poprzeczne ( $w = 0$ ), to otrzymamy drgania przy czystym ścinaniu. Przyjmijmy w równaniu (1.18)  $k = 0$ , co odpowiada w oparciu o warunki (1.4) i (1.9) przyjęciu hipotezy płaskich przekrojów; otrzymamy układ równań

$$(1.21) \quad \begin{cases} E \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \gamma \ddot{u} = 0, \\ -EF \frac{\partial}{\partial x} \left[ w_x \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right] + \gamma F \ddot{w} - J \gamma \ddot{w}_{xx} + EJ w_{xxxx} = 0, \end{cases}$$

który, z wyjątkiem dodatkowego wyrazu  $J \gamma \ddot{w}_{xx}$  przedstawiającego bezwładność przy obrocie przekroju, pokrywa się z układem rozważanym w pracy [2].

Przy  $k \neq 0$ , pomijając bezwładność podłużną ( $\gamma \ddot{u} \equiv 0$ ) oraz masę na końcu belki ( $M = 0$ ) i siłę osiową  $P$  ( $P = 0$ ), otrzymamy z (1.18) znane równanie Timoszenki, [6], ( $k = 1/k'$ ):

$$(1.22) \quad \gamma F \ddot{w} + J \gamma \frac{ky}{G} \ddot{w} - \left( J \gamma + EJk \frac{\gamma}{G} \right) \ddot{w}_{xx} + EJ w_{xxxx} = 0.$$

Układowi równań (1.12) lub (1.18) można przypisać oprócz wspomnianych wyżej warunków brzegowych jeszcze pewne warunki początkowe.

## 2. Sprowadzenie równań ruchu do układu równań różniczkowych zwyczajnych

Układ równań różniczkowych (1.18) jest układem nieliniowym, przy czym każda z funkcji nieznanych zależy od dwu zmiennych niezależnych: przestrzennej  $x$  i czasu  $t$ . W dalszym ciągu układ ten ( $k \neq 0$ ) zastąpimy układem równań zwyczajnych ograniczając się tylko do analizy postaci drgań podstawowych. Oprzemy się również na założeniu Kirchhoffa, [2], na podstawie którego uważa się, że odkształcenie osi pręta nie zależy od zmiennej przestrzennej  $x$ , a jest tylko funkcją czasu. Przy tym założeniu dla siły podłużnej  $S$  w przecie mamy

$$(2.0.1) \quad S(t) = EF \left[ u(l, t) + \frac{1}{2} \int_0^l w_x^2 dx \right] = EFl \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right),$$

skąd funkcja

$$(2.0.2) \quad u_x + \frac{1}{2} w_x^2 = \frac{1}{l} \left[ u(l, t) + \frac{1}{2} \int_0^l w_x^2 dx \right]$$

jest tylko funkcją czasu. Przy wyprowadzeniu powyższego związku wykorzystano pierwszy warunek (1.13).

W pracy [2] związek (2.0.1) wykorzystano wprost w układzie równań różniczkowych. Obecnie postąpimy nieco inaczej. W wyrażeniu na energię potencjalną (1.16) pierwszy wyraz w pierwszej całce przekształcimy na podstawie związku (2.0.2), zaś w wyrażeniu na energię kinetyczną (1.17) pod znakiem całki przyjmiemy  $\dot{u}(x, t) \equiv 0$ . To ostatnie założenie można uczynić w przypadku, gdy masa pręta jest bardzo mała w porównaniu z masą  $M$  na końcu. Taka modyfikacja metody pozwoli rozwiązać zagadnienie przy innych warunkach brzegowych aniżeli tylko przegubowego utwierdzenia. Należy zauważyć, że w pracach dotychczasowych dotyczących podobnych zagadnień zajmowano się wyłącznie prętami utwierdzonymi przegubowo.

**2.1. Belka z warunkami brzegowymi wolnego podparcia.** Zajmiemy się wpierw wyznaczeniem obszarów rezonansowych i amplitud drgań poprzecznych w przypadku, gdy belka jest na jednym końcu utwierdzona przegubowo, zaś na drugim z masą  $M$  przegubowo-przesuwnie.

Ograniczając się do postaci drgań podstawowych spełnimy warunki brzegowe (1.19) przez funkcje

$$(2.1) \quad \begin{cases} w(x, t) = w_m q_1(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \\ \psi(x, t) = \psi_m q_2(t) \cos \frac{\pi x}{l}, \\ u(l, t) = u_m q_3(t), \end{cases}$$

gdzie  $w_m$ ,  $\psi_m$  i  $u_m$  przedstawiają maksymalne przemieszczenie, zaś  $q_j(t)$  ( $j=1, 2, 3$ ) są nieznanymi bezwymiarowymi funkcjami czasu. Przez taki dobór funkcji i założeń podanych we wstępie niniejszego paragrafu pierwsze równanie (1.18) jest spełnione tożsamościowo, zaś jako trzecie równanie wystąpi drugi warunek brzegowy (1.13).

Za pomocą związków (2.1) i wykorzystania powyższych założeń wyrazimy energię kinetyczną (1.17) i potencjalną (1.16). Potencjał kinetyczny

$$(2.2) \quad W(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t) = E(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) - U(q_1, q_2, q_3, t)$$

zależy wyraźnie od czasu, gdyż energia potencjalna zależy wyraźnie od czasu. Siły uogólnione są pochodnymi potencjału, tj.

$$(2.3) \quad Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, 3).$$



Równania różniczkowe ruchu otrzymamy z drugiej postaci równań Lagrange'a

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, 3).$$

Dla  $j=1$  mamy

$$(2.5) \quad \kappa_1^2 \ddot{q}_1 - \kappa_2^2 a_m \ddot{q}_2 + \pi^4 q_1 - \pi^3 a_m q_2 + \lambda^2 \pi^2 \frac{u_m}{l} q_1 q_3 + \frac{1}{4} \pi^4 \frac{w_m^2}{i^2} q_1^3 = 0,$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{cases} a_m = kl \frac{\psi_m}{w_m}, & \kappa_1^2 = \frac{l^3 m_0}{EJ} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right), & \kappa_2^2 = \frac{\gamma \pi l^2}{E}, \\ \lambda^2 = \frac{l^2}{i^2}, & J = F i^2, & m_0 = \gamma Fl, \end{cases}$$

$\lambda$  przedstawia smukłość pręta,  $i$  ramię bezwładności pola poprzecznego przekroju pręta,  $m_0$  masę całej belki.

Dla  $j=2$  mamy

$$(2.7) \quad \kappa_2^2 a_m \ddot{q}_2 - \kappa_4^2 \ddot{q}_1 - \pi^4 q_1 + \pi^3 a_m q_2 + \frac{AG}{P_E} \pi^3 a_m q_2 = 0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad \kappa_4^2 = \pi \kappa_2^2, \quad P_E = EJ \frac{\pi^2}{l^2}, \quad A = \frac{E}{k} \left( 1 + \frac{kP}{GF} \right),$$

a pozostałe oznaczenia przyjęto jak w przypadku wzoru (2.6).

Dla  $j=3$  mamy

$$(2.9) \quad \kappa_3^2 u_m \ddot{q}_3 + \frac{u_m}{l} \lambda^2 q_3 + \frac{\pi^2 w_m^2}{4 i^2} q_1^2 + \pi^3 \frac{P}{P_E} = 0,$$

gdzie

$$(2.10) \quad \kappa_3^2 = \frac{l^2 M}{EJ}.$$

Z równań (2.5) i (2.7) mamy

$$(2.11) \quad \kappa_1^2 \ddot{q}_1 + \frac{AG}{P_E} \pi^3 a_m q_2 + \lambda^2 \pi^2 \frac{u_m}{l} q_1 q_3 + \frac{1}{4} \pi^4 \frac{w_m^2}{i^2} q_1^3 = 0,$$

przy czym

$$(2.12) \quad \kappa^2 = \frac{\gamma l^2 \lambda^2}{E}.$$

Mnożąc równanie (2.7) przez  $\kappa_1^2$ , zaś równanie (2.5) przez  $\kappa_4^2$  i dodając stronami tak otrzymane związki mamy

$$(2.13) \quad \kappa_2^2 \kappa^2 \alpha_m \ddot{q}_2 - \pi^4 \kappa^2 q_1 + \pi^3 \kappa^2 \alpha_m q_2 + \frac{AG}{P_E} \pi^3 \kappa_1^2 \alpha_m q_2 + \\ + \lambda^2 \pi^2 \kappa_4^2 \frac{u_m}{l} q_1 q_3 + \frac{1}{4} \pi^4 \kappa_4^2 \frac{w_m^2}{i^2} q_1^3 = 0.$$

Otrzymaliśmy więc do dyskusji układ równań (2.9), (2.11) i (2.13) przy dowolnych warunkach początkowych.

**2.2. Belka obustronnie utwierdzona.** Obecnie zajmiemy się zagadnieniem przy warunkach brzegowych (1.20), oraz, jak poprzednio, (1.13). Powyższe warunki brzegowe będą spełnione przez następujące funkcje określające drgania symetryczne:

$$(2.14) \quad \begin{cases} w(x, t) = w_m q_1(t) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right), \\ \psi(x, t) = \psi_m q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \\ u(l, t) = u_m q_3(t). \end{cases}$$

Przyjęta postać funkcji  $\psi(x, t)$  jest uzasadniona tym, że dla  $x = l/2$  powinno być:  $\psi(l/2, t) = 0$ .

Podobnie jak w 2.1 za pomocą związków (2.14) wyrazimy potencjał kinetyczny (2.2), skąd przy użyciu równań Lagrange'a (2.4) otrzymamy poszukiwany układ równań.

Dla  $j = 1$  mamy

$$(2.15) \quad k_1^2 \ddot{q}_1 - k_2^2 \alpha_m \ddot{q}_2 + \pi^3 \lambda^2 \frac{u_m}{l} q_1 q_3 + \pi^4 \frac{w_m^2}{i^2} q_1^3 + 4\pi^4 q_1 + 2\pi^3 \alpha_m q_2 = 0,$$

gdzie

$$(2.16) \quad k_1^2 = \gamma \frac{\pi^2 l^2}{E} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right), \quad k_2^2 = \frac{\gamma \pi l^2}{2E}, \quad \alpha_m = kl \frac{\psi_m}{w_m}.$$

Dla  $j = 2$

$$(2.17) \quad k \left( -k_4^2 \ddot{q}_1 + \frac{1}{4} k_2^2 \alpha_m \ddot{q}_2 - \pi^4 q_1 + \frac{\pi^3}{2} \alpha_m q_2 + \frac{1}{8} \frac{AG}{P_E} \pi^3 \alpha_m q_2 \right) = 0,$$

gdzie

$$(2.18) \quad k_4^2 = \frac{\gamma l^2 \pi^2}{4E},$$

symbole  $P_E$  i  $A$  mają znaczenie poprzednie.

Dla  $j = 3$  otrzymujemy

$$(2.19) \quad k_3^2 u_m \ddot{q}_3 + \frac{u_m}{l} \lambda^2 q_3 + \pi^2 \frac{w_m^2}{i^2} q_1^2 + \pi^2 \frac{P}{P_E} = 0,$$

gdzie

$$(2.20) \quad k_3^2 = \frac{l^2 M}{EJ}.$$

Mnożąc równanie (2.15) przez  $1/4$  i dodając stronami (2.17) ( $k \neq 0$ ) mamy

$$(2.21) \quad k_5^2 \ddot{q}_1 + \frac{1}{4} \pi^2 \lambda^2 \frac{u_m}{l} q_1 q_3 + \frac{\pi^4}{4} \frac{w_m^2}{i^2} q_1^3 + \frac{1}{8} \frac{AG}{P_E} \pi^3 a_m q_2 = 0,$$

gdzie

$$(2.22) \quad k_5^2 = \frac{3}{16} \frac{\gamma l^3 \lambda^2}{E}.$$

Mnożąc następnie równanie (2.15) przez  $k_4^2$ , zaś równanie (2.17) przez  $k_1^2$  i dodając je stronami otrzymamy

$$(2.23) \quad k_5^2 k_2^2 a_m \ddot{q}_2 - \pi^4 k_0^2 q_1 + 2 \pi^3 k_5^2 a_m q_2 + \frac{1}{8} k_1^2 \frac{AG}{P_E} \pi^3 a_m q_2 + \\ + \pi^2 \lambda^2 k_4^2 \frac{u_m}{l} q_1 q_3 + \pi^4 k_4^2 \frac{w_m^2}{i^2} q_1^3 = 0,$$

gdzie

$$(2.24) \quad k_0^2 = \frac{3}{4} \frac{\lambda^2 l^2 \gamma}{E}.$$

Otrzymaliśmy więc do dyskusji układ równań (2.21), (2.23) i (2.19). To ostatnie równanie różni się od (2.9) tylko czynnikiem stałym przy  $q_1^2$ , co jest spowodowane innymi warunkami brzegowymi dla funkcji  $w(x, t)$ .

W dalszym ciągu będziemy przyjmowali następującą postać siły działającej osiowo:

$$(2.25) \quad P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t.$$

### 3. Określenie podstawowych obszarów rezonansowych przy warunkach brzegowych wolnego podparcia

W celu wyznaczenia obszarów rezonansowych pomijamy w układzie równań (2.9), (2.11) i (2.13) wyrazy nieliniowe przyjmując  $(w_m/i)^2 = 0$ .

Po tym uproszczeniu równanie (2.9) można łatwo scałkować, przy czym ograniczymy się do drgań ustalonych pomijając drgania własne. Łatwo sprawdzić, że

$$(3.1) \quad u_m q_3(t) = \frac{l}{\lambda^2} \left( -\frac{\varepsilon}{1 - \kappa_5^2} \cos \tau - p_0 \right),$$

gdzie

$$(3.2) \quad p_0 = \pi^2 \frac{P_0}{P_E}, \quad \varepsilon = \pi^2 \frac{P_1}{P_E}, \quad \kappa_5^2 = \frac{\kappa_3^2 l \omega^2}{\lambda^2}.$$

jest rozwiązaniem powyższego równania. Przyjęto również zmianę zmiennej niezależnej przyjmując  $\omega t = \tau$ .

Pozostałe dwa równania (2.11) i (2.13) można napisać w postaci wektorowo-macierzowej

$$(3.3) \quad \ddot{x} + \frac{1}{\omega^2} (P_0 + \varepsilon P_1 \cos \tau) x = 0,$$

gdzie

$$(3.4) \quad P_0 = \begin{vmatrix} p_{11}^{(0)} & p_{12}^{(0)} \\ p_{21}^{(0)} & p_{22}^{(0)} \end{vmatrix}, \quad P_1 = \begin{vmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} q_2 \\ q_1 \end{vmatrix},$$

przy czym

$$(3.5) \quad \begin{cases} p_{11}^{(0)} = \frac{E\pi^2}{\gamma l^2} \left[ 1 + \frac{\lambda^2 + \pi^2}{2(1+\nu)k\pi^2} + \frac{p_0}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right) \right], \\ p_{22}^{(0)} = -\frac{\pi^2 p_0}{\gamma l^2 \lambda^2} E, \\ p_{12}^{(0)} = -\frac{\pi^3 E}{\gamma l^2 \alpha_m} \left( 1 + \frac{p_0}{\lambda^2} \right), \\ p_{21}^{(0)} = \frac{\pi E \alpha_m}{\gamma l^2} \left[ \frac{1}{2k(1+\nu)} + \frac{p_0}{\lambda^2} \right], \end{cases}$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} p_{11}^{(1)} = \frac{E}{\gamma l^2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right), & p_{21}^{(1)} = \frac{\pi E}{\gamma l^2 \lambda^2} \alpha_m, \\ p_{22}^{(1)} = \frac{\pi^2 E}{\gamma l^2 \lambda^2} \frac{1}{\kappa_5^2 - 1}, & p_{12}^{(1)} = \frac{\pi^3 E}{\alpha_m \lambda^2 \gamma l^2} \frac{1}{\kappa_5^2 \kappa_5^2 - 1}. \end{cases}$$

Z równania (3.3) otrzymujemy warunek na obciążenie krytyczne (statyczne) w postaci  $|P_0| = 0$ , co z warunkiem (3.5) i przy oznaczeniu (3.2) daje równanie

$$(3.7) \quad P_0 + P_0^3 \frac{k}{FG} - P_E = 0.$$

Przy  $k=0$  mamy  $P_{0k} = P_E$ .

W związkach powyższych przy znacznym odkształceniu osiowym należy uwzględnić skrócenie belki. Jeśli bowiem przez  $l$  oznaczymy długość belki przy obciążeniu statycznym  $P_0$ , a przez  $L$  długość belki w stanie nie obciążonym statycznie ( $P_0 = 0$ ), to  $l = L - l_0$ , gdzie

$$(3.8) \quad \frac{l_0}{L - l_0} = \frac{l_0}{l} = \frac{P_0}{EF},$$

co otrzymamy wprost ze związku (3.1).

Częstość drgań własnych obliczymy również z (3.3), w którym należy przyjąć  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ :

$$(3.9) \quad \ddot{x} + P_0 x = 0.$$

Rozwiązania powyższego równania poszukujemy w postaci

$$x = Ae^{i p t} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

gdzie  $A$  jest nieznaną macierzą. Po wstawieniu do (3.9) otrzymamy równanie na wyznaczenie częstości drgań własnych  $p$ :

$$(3.10) \quad |P_0 - p^2 I_2| = 0,$$

gdzie  $I_2$  jest macierzą jednostkową drugiego rzędu oraz gdzie kreski pionowe w tym wzorze i następnych oznaczają wyznacznik.

W celu wyznaczenia obszarów rezonansowych zastosujemy metodę przedstawioną w pracy [4]. Ograniczając się do przybliżonego przedstawienia granic tychże obszarów wykorzystamy podane w [4] warunki (5.20) i (5.21), co w naszym przypadku daje

$$(3.11) \quad \left| P_0 - \frac{\omega^2}{4} I_2 \pm \frac{\varepsilon}{2} P_1 \right| = 0.$$

Równanie powyższe przedstawia w układzie współrzędnych np.  $\varepsilon$ ,  $\omega^2$  krzywe, przy czym obszary rezonansowe są zawarte między liniami, które dla  $\varepsilon = 0$  wychodzą z jednego punktu (tłumienie pomijamy). Przyjmując w (3.11)  $\varepsilon = 0$  otrzymamy równanie dla wyznaczenia wartości  $\omega^2$ , w sąsiedztwie których wystąpi rezonans parametryczny (dla małych wartości  $\varepsilon$ ). Ma ona postać

$$(3.12) \quad \left| P_0 - \frac{\omega^2}{4} I_2 \right| = 0.$$

Porównując (3.10) i (3.12) widzimy, że rezonans parametryczny wystąpi w otoczeniu

$$(3.13) \quad \omega = 2p,$$

gdzie  $p$  jest częstością drgań własnych belki. Na ogół tyle jest podstawowych obszarów rezonansowych, ile podstawowych częstości drgań własnych ma układ drgający. W naszym przypadku pozostają jeszcze do rozważenia drgania podłużne pręta. Otóż równanie (3.11) można zapisać także w postaci

$$(3.14) \quad \left| (\kappa_5^2 - 1) \left( P_0 - \frac{\omega^2}{4} I_2 \right) \pm \frac{\varepsilon}{2} \tilde{P}_1 \right| = 0,$$

gdzie macierz  $\tilde{P}_1$  posiada elementy powstałe przez pomnożenie wyrażeń (3.6) przez  $(\kappa_5^2 - 1)$ . Teraz widać, że przy  $\varepsilon = 0$  równanie (3.14) będzie również spełnione, jeśli  $\kappa_5^2 - 1 = 0$ , czyli gdy

$$(3.15) \quad \omega^2 = \frac{EF}{lM},$$

tnz. gdy siła wymuszająca jest w rezonansie z drganiami podłużnymi. Dla małych wartości  $\varepsilon$  rezonans parametryczny jest więc możliwy dla wartości częstości siły wymuszającej bliskich wartościom podanym przez (3.13) oraz (3.15).

Rozwiemy wyznacznik (3.14). Wprowadzimy oznaczenia

$$\eta = \pm \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha = \frac{LM}{EF}$$

oraz

$$(3.16) \quad \begin{cases} p_{11} = \frac{E}{\gamma l^2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \right), & p_{12} = \frac{\pi^3 E}{\alpha_m \lambda^2 \gamma l^2}, \\ p_{21} = \frac{\pi E}{\gamma l^2 \lambda^2} \alpha_m, & p_{22} = \frac{\pi^3 E}{\gamma l^2 \lambda^2}. \end{cases}$$

Postać równania (3.14) jest następująca:

$$(3.17) \quad \omega^6 + \omega^4 A + \omega^2 B + C = 0,$$

gdzie

$$(3.18) \quad \begin{cases} A = -4 \left( p_{11}^{(0)} + p_{22}^{(0)} + \frac{1}{4\alpha} + p_{11} \eta \right), \\ B = 16 \left[ (p_{11}^{(0)} p_{22}^{(0)} - p_{21}^{(0)} p_{12}^{(0)}) + \frac{1}{4\alpha} (p_{11}^{(0)} + p_{22}^{(0)}) + \right. \\ \quad \left. + \eta (p_{11} p_{22}^{(0)} - p_{21} p_{12}^{(0)}) + \frac{\eta}{4\alpha} (p_{11} - p_{22}) \right], \\ C = \frac{16}{\alpha} [(p_{21}^{(0)} p_{12}^{(0)} - p_{11}^{(0)} p_{22}^{(0)}) + \eta (p_{21} p_{12}^{(0)} - p_{11} p_{22}^{(0)} + \\ \quad + p_{11}^{(0)} p_{22} - p_{21}^{(0)} p_{12}) + \eta^2 (p_{11} p_{22} - p_{21} p_{12})]. \end{cases}$$

W powyższych związkach  $p_{ij}^{(0)}$  określone są przez (3.5).

Wykresy krzywych granicznych obszarów rezonansowych można otrzymać z równania (3.17) w sposób przybliżony. Przyjmijmy bowiem w (3.17)  $(\omega^2/E) \gamma l^2 \lambda^2 = \bar{x}$ , w wyniku czego równanie to będzie trzeciego stopnia o odpowiednio zmienionych współczynnikach, które są ciągłymi funkcjami  $\eta$ , tzn.  $\varepsilon$ . Niech  $A_i$ ,  $B_i$  i  $C_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) będą wartościami (3.18) dla  $\varepsilon = \varepsilon_i$ , przy czym  $A_0$ ,  $B_0$  i  $C_0$  odpowiadają  $\varepsilon = 0$ , oraz niech  $\bar{x}_i^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) oznacza  $k$ -ty pierwiastek równania przy współczynnikach  $A_i$ ,  $B_i$  i  $C_i$  (zakładamy znajomość  $\bar{x}_0^{(k)}$ ). Jeśli oznaczymy  $A_{i+1} = A_i(1 + \alpha_i)$ ,  $B_{i+1} = B_i(1 + \beta_i)$ ,  $C_{i+1} = C_i(1 + \gamma_i)$ , przy czym  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  i  $\gamma_i$  przyjmują wartości małe dla małych  $\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ , to odpowiedni  $k$ -ty pierwiastek równania (3.17) można napisać w postaci

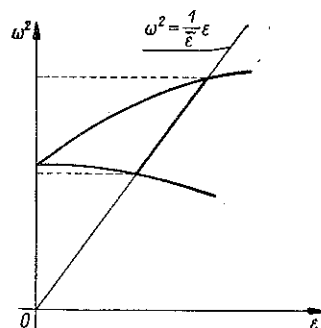
$$(3.19) \quad \bar{x}_{i+1}^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} (1 + \varepsilon_i^{(k)}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie liczby  $\varepsilon_i^{(k)}$  dla małych  $\Delta\varepsilon_i$  przyjmują wartości małe w stosunku do jedności, tak że ich kwadraty i trzecie potęgi można pominąć. Przy powyższych założeniach z równania (3.17) otrzymamy

$$(3.20) \quad -\varepsilon_i^{(k)} = \frac{A_i \bar{x}_i^{(k)} \alpha_i + B_i \beta_i + \frac{C_i}{\bar{x}_i^{(k)}} \gamma_i}{3 (\bar{x}_i^{(k)})^2 + 2 A_{i+1} \bar{x}_i^{(k)} + B_{i+1}} \quad \begin{matrix} (i = 0, 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, 3). \end{matrix}$$

W oparciu o związki (3.19) i (3.20) dla ustalonego  $k$  i ustalonego znaku  $\varepsilon$  można łatwo wyznaczyć krzywą graniczną obszaru rezonansowego. Dokładność będzie tym większa, im mniejsze będą przyrosty  $\Delta\varepsilon_i$ .

W zastosowaniach część zmienna siły wymuszającej może np. pochodzić od wirujących ruchem jednostajnym niewyważonych mas. Chcąc w tym przypadku określić częstotliwości krytyczne należy przyjąć zależność  $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \omega^2$ , co w układzie  $\varepsilon, \omega^2$  oznacza prostą przechodzącą przez początek układu. Obecnie zmiennym parametrem jest  $\bar{\varepsilon}$  ( $\bar{\varepsilon}$  jest funkcją mimośrodów masy wirującej). Zmieniając ten parametr otrzymamy pęk prostych. Punkty przecięcia prostych  $\omega^2 = \varepsilon/\bar{\varepsilon}$  z poprzednio otrzymanymi krzywymi wyznaczają zakres krytycznych częstotliwości kątowych, odpowiadających danemu  $\bar{\varepsilon}$  (rys. 1). Z rysunku tego widać, że ze wzrostem mimośrodu maleje kąt nachylenia prostej i zakres częstotliwości krytycznych wzrasta.



Rys. 1

Analogiczne związki można otrzymać przy innych warunkach brzegowych.

#### 4. Amplitudy drgań ustalonych

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem amplitudy ustalonych drgań poprzecznych w zależności od częstotliwości kątowej siły wymuszającej i innych parametrów układu drgającego.

Wykorzystamy w tym celu układ równań (2.9), (2.11) i (2.13) przy warunkach brzegowych wolnego podparcia, a przy końcach utwierdzonych układ równań (2.19), (2.21) i (2.23). W przypadku drgań ustalonych dla obydwu rodzajów utwierdzenia można przyjąć rozwiązania w postaci następującej:

$$(4.1) \quad \begin{cases} q_1 = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2}, \\ q_2 = c \sin \frac{\omega t}{2} + d \cos \frac{\omega t}{2}, \\ q_3 = g + h \cos \omega t, \end{cases}$$

gdzie  $a, b, c, d, e$  i  $h$  są nieznanymi współczynnikami, które należy wyznaczyć.

Dla belki o końcach wolno podpartych równanie (2.9) po wstawieniu (4.1) i przyrównaniu do zera wyrazu stałego (wolnego) i współczynnika przy  $\cos \omega t$  wyznaczmy stałe  $g$  oraz  $h$ . Gdy współczynnik przy  $\sin \omega t$  równa się zeru, wówczas  $ab = 0$ , tzn. albo  $a = 0, b \neq 0$ , lub  $a \neq 0, b = 0$ . Amplitudę drgań  $a$  lub  $b$  wyznaczmy z układu (2.11) i (2.13) po wstawieniu tam (4.1) oraz otrzymanych uprzednio  $g$  i  $h$ . Przyrównanie do zera współczynników przy  $\sin \omega t/2$  i  $\cos \omega t/2$  prowadzi do dwu układów po dwa jednorodne równania każdy, gdyż przypadkowi  $a = 0, b \neq 0$  odpowiada  $c = 0, d \neq 0$ , a przypadkowi  $b = 0, a \neq 0$  odpowiada  $d = 0, c \neq 0$ . Układy te różnią się od siebie tylko znakiem przy  $\varepsilon$ . Z warunku istnienia rozwiązań niezerowych otrzymamy równanie zależności amplitudy drgań poprzecznych od pozostałych parametrów układu:

$$(4.2) \quad \left( \frac{FG}{kP_E} + \frac{p_0}{\pi^2} \pm \frac{\varepsilon}{2\pi^2} \right) \left[ (\lambda^2 + p_0) \Delta \pm \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-\Delta}{2} A^2 \right] - \left[ \left( \frac{\omega^2 \kappa^2}{4\pi^2} + p_0 \right) \Delta \pm \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-\Delta}{2} A^2 \right] \left[ \frac{\lambda^2}{\pi^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 \kappa^2}{4\pi^2} \right) + \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right) \left( \frac{FG}{kP_E} + \frac{p_0}{\pi^2} \pm \frac{\varepsilon}{2\pi^2} \right) \right] = 0.$$

W równaniu powyższym

$$(4.3) \quad A^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{w_m^2}{i^2} b^2, \quad \text{jeśli } a = 0; \quad A^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{w_m^2}{i^2} a^2, \quad \text{jeśli } b = 0,$$

przy czym znak plus przy  $\varepsilon$  odpowiada  $a = 0$ , znak minus odpowiada  $b = 0$ , zaś

$$(4.4) \quad \Delta = 1 - \frac{l\kappa_3^2 \omega^2}{\lambda^2},$$

a pozostałe oznaczenia odpowiadają przyjętym uprzednio w paragrafach 2 i 3. Krzywe rezonansowe są stateczne przy ruchu określonym równaniem  $q = a \sin(\omega t/2)$  ( $b = 0$ ).

Ze związku (4.2), który można uważać za uniwersalny, otrzymamy pewne przypadki szczególne.

1. Dla  $A^2 = 0$  równanie to określa granice obszarów rezonansowych w układzie  $\varepsilon, \omega^2$ .

2. Gdy dodatkowo  $\varepsilon = 0$ , to otrzymujemy wartości  $\omega$ , w otoczeniu których ma miejsce rezonans parametryczny. Przyjmując następnie  $\omega = \lambda p$  dostajemy równanie, z którego można wyznaczyć częstotliwości drgań własnych  $p$ .

3. Jeśli przyjmiemy  $\varepsilon = 0, A^2 = 0$  oraz  $\omega = 0$ , to równanie powyższe daje związek (3.7), z którego można wyznaczyć statyczne obciążenie krytyczne.



4. Jeśli równanie (4.2) pomnożymy przez  $k$  i następnie przyjmiemy  $k \rightarrow 0$ , to otrzymamy równanie dla amplitudy drgań przy pominięciu wpływu deformacji postaciowej,

$$(4.5) \quad \frac{\Delta - 1}{2\pi^2} A^2 + \left(1 - \frac{\kappa_1^2 \omega^2}{4\pi^4} - \frac{p_0}{\pi^2}\right) \Delta \mp \frac{\varepsilon}{2\pi^2} = 0,$$

gdyż

$$\frac{\kappa_1^2}{\kappa^2} = 1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2}.$$

Ten ostatni związek jest dokładnie taki, jak podany w książce [1], a który otrzymano na innej drodze.

5. Z postaci (4.2) wynika, że gdy  $\Delta = 0$ , tj. gdy częstość siły wymuszającej odpowiada częstości rezonansowej drgań podłużnych, to zawsze

$$(4.6) \quad A^2 = \frac{P_1 l^3}{EJ},$$

co odpowiada przypadkowi  $a \neq 0$  ( $b = 0$ ) i amplituda drgań nie zależy od  $k$  (współczynnika charakteryzującego deformację postaciową).

Rozważmy jeszcze jedną szczególną wartość siły wymuszającej  $\omega$ . Otóż przyjmijmy w drugim równaniu układu (1.18) chwilowo  $\psi = 0$ , co oznacza nałożenie więzów uniemożliwiających zniekształcenie płaszczyzn poprzecznych przekrojów belki. Otrzymamy równanie

$$E \tilde{w}_{xx} - \gamma \ddot{w} = 0,$$

gdzie  $\tilde{w} = w_x$  oznacza kąt obrotu płaszczyzny poprzecznego przekroju belki. Równaniu powyższemu odpowiada z (2.7) równanie

$$\kappa_4^2 \ddot{q}_1 + \pi^4 q_1 = 0.$$

Jeśli przez  $\nu_1$  oznaczymy częstość drgań własnych w tak pomyślanym ruchu, to

$$\nu_1^2 = \frac{\pi^4}{\kappa_2^2}.$$

Pomijamy obecnie uczynione wyżej założenie odnośnie  $\psi$ ; niech w równaniu (4.2)

$$(4.7) \quad \omega = 2\nu_1.$$

Dla  $k = 0$  przy spełnionym warunku (4.7) równanie (4.2) daje

$$(4.8) \quad (\lambda^2 + p_0) \Delta \pm \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1 - \Delta}{2} A^2 = 0.$$

Zajmiemy się warunkiem  $k \neq 0$  przy warunku (4.7). W układzie współrzędnych  $\omega^2$ ,  $A^2$  funkcja (4.2) posiada asymptotę prostopadłą do osi  $\omega^2$ . Odpowiada to «dodatkowemu rezonansowi», dla którego znaj-

dziemy wartości częstości kątovej obliczając z (4.2)  $A^2$  i przyrównując mianownik do zera. Amplituda więc jest nieokreślona. Ma to miejsce dla

$$(4.9) \quad \frac{\omega^2 \kappa_2^2}{4 \pi^3} = 1 + \frac{FG}{kP_E} + \frac{p_0}{\pi^2} \pm \frac{\varepsilon}{2 \pi^2}.$$

Ten «rezonans dodatkowy» występuje wskutek uwzględnienia deformacji postaciowej, a więc pewnego rodzaju więzi sprężystej w stosunku do poprzecznych drgań belki. Położenie asymptoty zależy od  $\varepsilon$ . O «rezonansach dodatkowych» jest mowa w pracy [1]. Przy spełnionym związku (4.7) amplituda drgań nie jest określona. Z uwagi bowiem na to, że  $\omega^2 \kappa_2^2 / 4 \pi^2 = \lambda^2$ , równanie (4.2) przyjmuje postać

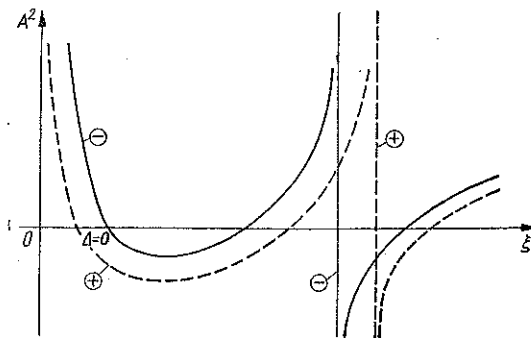
$$(4.10) \quad \left( \frac{FG}{kP_E} + \frac{p_0}{\pi^2} \pm \frac{\varepsilon}{2 \pi^2} \right) \left[ (\lambda^2 + p_0) \Delta \pm \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-\Delta}{2} A^2 \right] = 0,$$

gdzie obecnie

$$\Delta = 1 - 4 \pi^2 \frac{M}{m_0} < 0,$$

a nieokreśloność amplitudy wynika ze związków (4.7) i (4.9).

Zależność  $A^2$  od  $\omega^2$  podano na rys. 2. Na rysunku tym  $\xi = \omega^2 \cdot 10^{-3}$ . Krzywa ciągła odpowiada rozwiązaniu statecznemu ( $b = 0$ ), zaś krzywa



Rys. 2

przerywana odpowiada rozwiązaniu niestatecznemu ( $a = 0$ ). Widać również, że «zaciąganie» amplitudy drgań ma miejsce w stronę malejących częstości kątowych  $\omega$  przy rezonansie odpowiadającym drganiom podłużnym, zaś w kierunku rosnących częstości kątowych dla obszaru rezonansowego odpowiadającego drganiom poprzecznym

Trzeci obszar rezonansowy (po prawej stronie asymptot) wypada dla bardzo dużych częstości kątowych  $\omega$  i nie przedstawia znaczenia praktycznego.

Przy warunkach brzegowych utwierdzenia zupełnego odpowiednikiem równania (4.2) jest równanie

$$(4.11) \quad \left( \frac{GF}{P_E k} + \frac{p_0}{\pi^2} \pm \frac{\varepsilon}{2 \pi^2} \right) \left[ (3 \lambda^2 + p_0) \Delta \pm \frac{\varepsilon}{2} + 2(1-\Delta) A^2 \right] - \\ - \left[ \left( \frac{\omega^2 \kappa_6^2}{\pi^2} + p_0 \right) \Delta \pm \frac{\varepsilon}{2} + 2(1-\Delta) A^2 \right] \left[ \frac{3}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2} \left( 4 - \frac{\kappa_2^2 \omega^2}{2 \pi^3} \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right) \left( \frac{GF}{P_E k} + \frac{p_0}{\pi^2} \pm \frac{\varepsilon}{2 \pi^2} \right) \right] = 0.$$

W związku powyższym symbole mają znaczenie jak w (4.2) i w p. 2.2. Jeśli równanie (4.11) pomnożymy przez  $k$ , a następnie przyjmiemy  $k \rightarrow 0$ , to przechodzi ono w związek

$$(4.12) \quad 1 - \frac{\omega^2}{4\Omega^2} - \frac{P_0}{P_k} \pm \frac{P_1}{P_k \Delta} - \frac{k_3^2 \omega^2 l}{2\lambda^2 \pi^2 \Delta} A^2 = 0,$$

gdzie

$$(4.13) \quad \Omega^2 = \frac{4\pi^4}{k_1^2}, \quad P_k = 4P_E.$$

Równanie (4.11) jest dla warunków brzegowych utwierdzenia zupełnego równaniem uniwersalnym i podobnie jak dla związku (4.2) można otrzymać tam przypadki szczególne.

### 5. Drgania śrubowych sprężyn walcowych

Podaną uprzednio teorię wyprowadzoną dla belki drgającej zastosujemy obecnie do śrubowych sprężyn walcowych.

Jak wspomniano na początku niniejszej pracy, sprężyny o małym kącie nachylenia zwojów ( $\alpha = 5^\circ - 8^\circ$ ) można w przybliżeniu uważać za belkę o odpowiednio dobranych parametrach.

Przyjmijmy następujące oznaczenia odnoszące się do sprężyn:

- $\gamma_0$  ciężar właściwy materiału,
- $F_0$  powierzchnia poprzecznego przekroju drutu,
- $D$  średnica nawinięcia sprężyny,
- $n$  ilość zwojów roboczych,
- $g$  przyspieszenie siły ciężkości,
- $C_0$  sztywność na skręcanie przekroju drutu,
- $B_n$  sztywność na zginanie przekroju drutu względem osi prostokątnej do osi sprężyny,
- $B_b$  sztywność na zginanie przekroju drutu względem osi równoległej do osi sprężyny.

W sposób analogiczny do podanego w pracy [5] użyte w poprzednich paragrafach wielkości dla belki zastępczej wyrażą się następująco:

$$\gamma F = \gamma \frac{\pi D F_0 n}{l} \quad \text{masa na jednostkę długości belki,}$$

$$\gamma J = \gamma \frac{\pi D^3 F_0 n}{8 l} \quad \text{natężenie momentu bezwładności belki}$$

$$i^2 = \frac{D^2}{8} \quad \text{kwadrat ramienia bezwładności,}$$

$$\frac{GF}{k} = \frac{8lB_b}{\pi D^3 n} \quad \text{sztywność na ścinanie przekroju pręta,}$$

$$EJ = \frac{2l}{\pi D n} \frac{C_0 B_n}{C_0 + B_n} \quad \text{sztywność na zginanie przekroju pręta,}$$

$$k(1 + \nu) = \frac{C_0 B_n}{B_b(C_0 + B_n)} \quad \text{związek współczynnika Poissona z parametrem charakteryzującym kształt przekroju,}$$

$$E = \frac{16l^3 C_0 B_n}{\pi^2 D^4 n^2 F_0 (C_0 + B_n)} \quad \text{zastępczy moduł Younga,}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{g} \quad \text{gęstość belki zastępczej,}$$

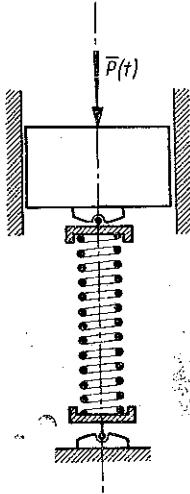
$$l = L - l_0, \quad l_0 = \frac{2\pi n R^3}{C_0} P_0 \quad \text{skrócenie statyczne belki.}$$

Obliczone stąd pozostałe wielkości są następujące:

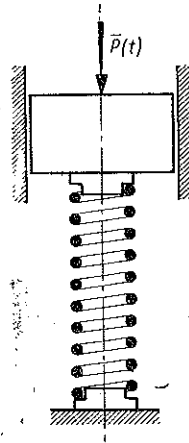
$$\lambda = \frac{l}{D} \sqrt[4]{8} \quad \text{smukłość pręta,}$$

$$m_0 = \frac{\gamma_0}{g} F_0 \pi D n = \gamma F_0 \pi D n \quad \text{masa całej belki,}$$

$$P_E = \frac{2\pi C_0 B_n}{D \ln(C_0 + B_n)} \quad \text{umowna siła krytyczna.}$$



Rys. 3



Rys. 4

Z pomocą powyższych związków można wyrazić np. równanie (4.2) lub (4.11), skąd, jak powiedziano w p. 4, można znaleźć krytyczne częstotści kątowe siły wymuszającej, wyznaczyć obszary rezonansowe itp. Przy obliczaniu wartości krytycznej siły osiowej należy mieć na uwadze, że  $l$  zależy od  $P_0$ .

Rysunki 3 i 4 podają zastępcze modele sprężyn dla dwu przypadków zamocowania końców z masą na jednym z nich.

Szczegółowy przykład będzie obliczony w publikacji następnej w związku z doświadczeniem modelowym, które zostanie przeprowadzone.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Moskwa 1956.
- [2] E. Mettler, F. Weidenhammer, *Der axial pulsierend belastete Stab mit Endmasse*, ZAMM, 7/8, 36 (1956).
- [3] R. D. Mindlin, H. Deresiewicz, *Timoshenko Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams*, Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann. Arbor, Mich., 1954, New York 1955, 175-178.
- [4] K. Piszczek, *The Influence of the Curvature of an Originally Curved Bar on the Resonance Regions of Plane Form or Bending*, Arch. Mech. stos., 2, 9 (1957).
- [5] S. D. Ponomariew, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, tłum. z jęz. ros., Warszawa 1957.
- [6] S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, New York 1955.
- [7] *Инженерные расчеты в машиностроении*, Машиностроение, Moskwa 1948.

#### Резюме

##### ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается вопрос динамической устойчивости прямого, призматического стержня с массой на конце, удовлетворяющей двоякого рода краевым условиям: шарнирное защемление и жесткое защемление концов с возможностью передвижения одного конца с массой. Принимаются во внимание поперечные силы в сечениях балки, а также геометрическую нелинейность. Используется гипотеза Кирхгофа относительно продольной силы в выражении для потенциальной энергии, что дает возможность решить задачу также в случае защемленных концов. Ограничиваясь формой основных колебаний, констатируется возможность появления трех резонансных зон и так называемого «добавочного резонанса», который вызван учетом поперечных сил. Для установленных колебаний определяются амплитуды поперечных колебаний, приводя для обоих видов краевых условий универсальные уравнения (4.2) и (4.11), которые можно интерпретировать как уравнения поверхности в системе координат  $\omega^2$ ,  $\varepsilon$ ,  $A^2$ . В последнем параграфе даются эквивалентные параметры для винтовых пружин. Вводя вышеуказанные эквивалентные параметры — зависимости, приведенные в предыдущих параграфах, дается решение задачи динамической устойчивости пружин с массой на конце. В настоящей работе не учитывается наружное и внутреннее демпфирование.

## Summary

### A PROBLEM OF DYNAMIC STABILITY OF A PRISMATIC BAR WITH A MASS ATTACHED TO ITS END

The problem is considered of dynamic stability of straight prismatic bar with a mass attached to the end and two types of boundary conditions: hinged support and clamping with the possibility of moving the end with attached mass. Shear forces and geometrical non-linearity are taken into consideration. It is assumed that the mass at the end is considerably greater than that of the beam itself. The Kirchhoff hypothesis concerning the longitudinal force is used in the expression for the potential energy, which also makes possible the solution in the cases of clamped ends. Confining ourselves to the fundamental vibration mode, the possibility is demonstrated of the appearance of three resonance images and the so-called, additional resonance due to the shear forces. For steady vibration, the transversal amplitudes are found, giving for both types of boundary conditions the general equations (4.2) and (4.11) which may be interpreted as equations of a surface in the coordinates  $(\omega^2, \varepsilon, A^2)$ .

In the last paragraph substitute parameters are given for coil springs. Assuming these parameters, the equations of the preceding paragraphs give a solution of the problem of dynamic stability of springs with mass attached to the end. Internal and external damping is disregarded.

**ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ  
IPPT PAN**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 czerwca 1958 r.*