

JERZY RUTECKI

**DRGANIA RAM PRZESTRZENNYCH
Z ELEMENTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PROFILU OTWARTYM**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXX**

SPIS TREŚCI

1. Równania podstawowe giętno-skrętnych drgań cienkościennych prętów o otwartym profilu nieodkształcalnym 95
2. Określenia częstości i siły krytycznej dla jednoprzęsłowego pręta 108
3. Drgania pręta jako jednoprzęsłowej belki 111
4. Metoda odkształceń i jej zastosowanie do obliczania drgań układów z cienkościennymi prętami otwartymi 123
5. Drgania przestrzennych ram prostokątnych z elementami cienkościennymi 128

1. Równania podstawowe giętno-skrętnych drgań cienkościennych prętów o otwartym nieodkształcalnym profilu

Zanim przejdziemy do właściwego zagadnienia, czyli do drgań własnych ram przestrzennych z elementów cienkościennych o otwartym profilu, zajmijmy się drganiami pręta cienkościennego biorąc pod uwagę wpływ warunków brzegowych na jednym końcu.

Następnie przejdziemy do drgań pręta poddanego działaniu obciążeń lokalnych i wpływu tych obciążeń na amplitudę drgań. Powyższe rozważania jak również i dalsze będziemy prowadzili wychodząc z ogólnych równań w celu możliwie pełnego przygotowania podstaw, które posłużą do wyprowadzenia wzorów na reakcje dynamiczne na końcach pręta.

Ogólna teoria giętno-skrętnych drgań prętów i powłok, w których przekrojach poprzecznych występują normalne naprężenia wskutek działania podłużnej mimośrodowo przyłożonej siły S , określa się układem następujących równań różniczkowych:

$$(1.1) \quad EA \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

$$(1.2) \quad EJ_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} J_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} \pm S \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial z^2} + a_y \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \mp S (e_y - a_y) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = q_x(z, t),$$

$$(1.3) \quad EJ_x \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} J_x \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} \pm S \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial z^2} - a_x \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \pm S (e_x - a_x) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = q_y(z, t),$$

$$(1.4) \quad EJ_\omega \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} J_\omega \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial z^2 \partial t^2} - GJ_s \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{g} A r_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \pm S (\gamma_0^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + \frac{a_y \gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} \mp S (e_y - a_y) \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial z^2} - a_x \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} \pm S (e_x - a_x) \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial z^2} = m_s(z, t).$$

Powyższe równania, jak łatwo zauważyć, są równaniami ruchu cienkościennego pręta poddanego podłużnym oraz giętno-skrętnym drganiom. Prostokątny układ współrzędnych x, y, z jest tak usytuowany, że oś z pokrywa się z osią podłużną pręta, natomiast osie x i y są głównymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Symbolami $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ oznaczono przemieszczenia punktu pręta w kierunku trzech podanych osi, $\bar{\varphi}$ odpowiada kątowi obrotu elementu pręta wokół osi podłużnej z , A polu przekroju poprzecznego pręta. Wielkości J_x i J_y są głównymi momentami bezwładności, J_s jest momentem bezwładności na czyste skręcanie, J_ω zaś giętno-skrętnym momentem bezwładności przekroju pręta. Symbole a_x i a_y oznaczają współrzędne środka zginania pręta, e_x i e_y są współrzędnymi mimosrodowymi punktu przyłożenia siły S . Oprócz tego przyjęto następujące oznaczenia:

$$r_0^2 = \frac{J_x + J_y}{A} + a_x^2 + a_y^2,$$

$$\beta_x = \frac{1}{2J_y} \int_A x(x^2 + y^2) dA - a_x, \quad \beta_y = \frac{1}{2J_x} \int_A y(x^2 + y^2) dA - a_y.$$

Znak plus przy sile S odnosi się do ściskania, minus do rozciągania pręta.

W przypadku jeżeli rozpatrywany pręt lub powłoka są wstępnie sprężone siłą R_k , równania (1.2) i (1.3) pozostaną bez zmian, zmianie ulegnie równanie (1.4), w którym zamiast wielkości GJ_s wystąpi

$$\overline{GJ_s} = GJ_s + R_k \Phi_k,$$

gdzie

$$\Phi_k = \frac{J_x + J_y}{A} \varrho_k^2 + \frac{y_k}{J_x} \int_A y \varrho^2 dA + \frac{x_k}{J_y} \int_A x \varrho^2 dA,$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \varrho_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Symbole x_k i y_k oznaczają współrzędne przyłożenia siły R_k . Ponieważ równanie (1.1) przedstawiające drgania podłużne nie ma w obecnych rozważaniach poważniejszego znaczenia, więc je na razie pomijamy.

Układ trzech pozostałych równań zamieni się na trzy oddzielne równania różniczkowe, gdy

$$a_x = a_y = e_x = e_y = 0.$$

Mają one następującą postać:

$$(1.5) \quad EJ_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}}{\partial \eta^4} - \frac{\gamma}{g} J_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} \pm S \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial z^2} = q_x(z, t),$$

$$(1.6) \quad EJ_x \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} J_x \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{g} A \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} \pm S \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial z^2} = q_y(z, t),$$

$$(1.7) \quad EJ_\omega \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial z^4} - \frac{\gamma}{g} J_\omega \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{g} A r_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} - GJ_s \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \pm S r_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = m_s(z, t).$$

Równania (1.5) i (1.6) odnoszą się do poprzecznych giętych drgań pręta cienkościennego w dwóch płaszczyznach głównych. Równania te różnią się od zwykłych równań wyprowadzonych w dynamice ustrojów sprężystych liczbą środkowych wyrazów, wyrażających wpływ poprzecznych obciążeń. Wyrazy te w teorii drgań belek pomijamy.

Równanie (1.7) odnosi się do obrotu pręta wokół osi podłużnej, przechodzącej przez środek zginania, który w naszym przypadku przy przyjęciu $a_x = a_y = 0$ jest również środkiem ciężkości przekroju.

Na wstępie rozpatrzmy jednorodne równania liniowe odpowiadające równaniom (1.5)-(1.7):

$$(1.8) \quad EJ_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}}{\partial z^4} - \frac{q}{g} r_y^2 \frac{\partial^4 \bar{\xi}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} \pm S \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1.9) \quad EJ_x \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^4} - \frac{q}{g} r_x^2 \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} \pm S \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1.10) \quad EJ_\omega \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial z^4} - \frac{q}{g} r_\omega^2 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{q}{g} r_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} - GJ_s \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \pm S r_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = 0,$$

gdzie

$$r_\omega^2 = \frac{J_\omega}{A}, \quad q = \gamma A.$$

Równania te zawierają oprócz pochodnych funkcji $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ i $\bar{\varphi}$ względem zmiennej z również pochodne tych funkcji względem czasu t . Stosując metodę rozdzielenia zmiennych w formie podanej przez Poissona, przyjmijmy

$$\bar{\xi}(z, t) = \xi(z) \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{\eta}(z, t) = \eta(z) \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{\varphi}(z, t) = \varphi(z) \sin(pt + \varepsilon).$$

Następnie wprowadźmy nowy argument $\zeta = z/l$ gdzie l jest długością pręta, wobec tego otrzymamy:

$$\bar{\xi}(\zeta, t) = \xi(\zeta) \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{\eta}(\zeta, t) = \eta(\zeta) \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{\varphi}(\zeta, t) = \varphi(\zeta) \sin(pt + \varepsilon).$$

Po podstawieniu tych funkcji do równań (1.8)-(1.10) otrzymamy równania różniczkowe zwyczajne.

Równanie (1.8) przyjmie postać:

$$(1.11) \quad \frac{d^4 \xi}{d\zeta^4} + a_1 \frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} - \lambda_1^4 \xi = 0,$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\lambda_1^4 r_y^2}{l^2} \pm \frac{Sl^2}{EJ_y}, \quad \lambda_1 = l \sqrt[4]{\frac{qP^2}{gEJ_y}}.$$

Całką ogólną równania (1.11) jest funkcja

$$(1.12) \quad \xi = C_1 \cos a_1 \zeta + C_2 \sin a_1 \zeta + C_3 \operatorname{ch} \beta_1 \zeta + C_4 \operatorname{sh} \beta_1 \zeta.$$

Podobną postać przyjmie równanie (1.9):

$$(1.13) \quad \frac{d^4 \eta}{d\zeta^4} + a_2 \frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} - \lambda_2^4 \eta = 0,$$

gdzie

$$a_2 = \frac{\lambda_2^2 r_x^2}{l^2} \pm \frac{Sl^2}{EJ_x}, \quad \lambda_2 = l \sqrt[4]{\frac{gp^3}{gEJ_x}}.$$

Całką ogólną tego równania jest funkcja

$$(1.14) \quad \eta = D_1 \cos a_2 \zeta + D_2 \sin a_2 \zeta + D_3 \operatorname{ch} \beta_2 \zeta + D_4 \operatorname{sh} \beta_2 \zeta.$$

Równanie (1.10) ma następującą postać:

$$(1.15) \quad \frac{d^4 \varphi}{d\zeta^4} + a_3 \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - \lambda_3^4 \varphi = 0,$$

gdzie

$$a_3 = \frac{\lambda_3^4 r_\omega^2}{l^2 r_\omega^2} - \frac{GJ_s l^2}{EJ_\omega} \pm \frac{Sr_0^2 l^2}{EJ_\omega}, \quad \lambda_3 = l \sqrt[4]{\frac{qr_0^2 p^3}{gEJ_\omega}}.$$

Całką ogólną jego jest

$$(1.16) \quad \varphi = E_1 \cos a_3 \zeta + E_2 \sin a_3 \zeta + E_3 \operatorname{ch} \beta_3 \zeta + E_4 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta.$$

Wielkości a_1 , a_2 , a_3 , β_1 , β_2 i β_3 są odpowiednio równe

$$a_1 = \sqrt{\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \lambda_1^4}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{a_2}{2} + \sqrt{\frac{a_2^2}{4} + \lambda_2^4}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{a_3}{2} + \sqrt{\frac{a_3^2}{4} + \lambda_3^4}},$$

$$\beta_1 = \sqrt{-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \lambda_1^4}}, \quad \beta_2 = \sqrt{-\frac{a_2}{2} + \sqrt{\frac{a_2^2}{4} + \lambda_2^4}},$$

$$\beta_3 = \sqrt{-\frac{a_3}{2} + \sqrt{\frac{a_3^2}{4} + \lambda_3^4}}.$$

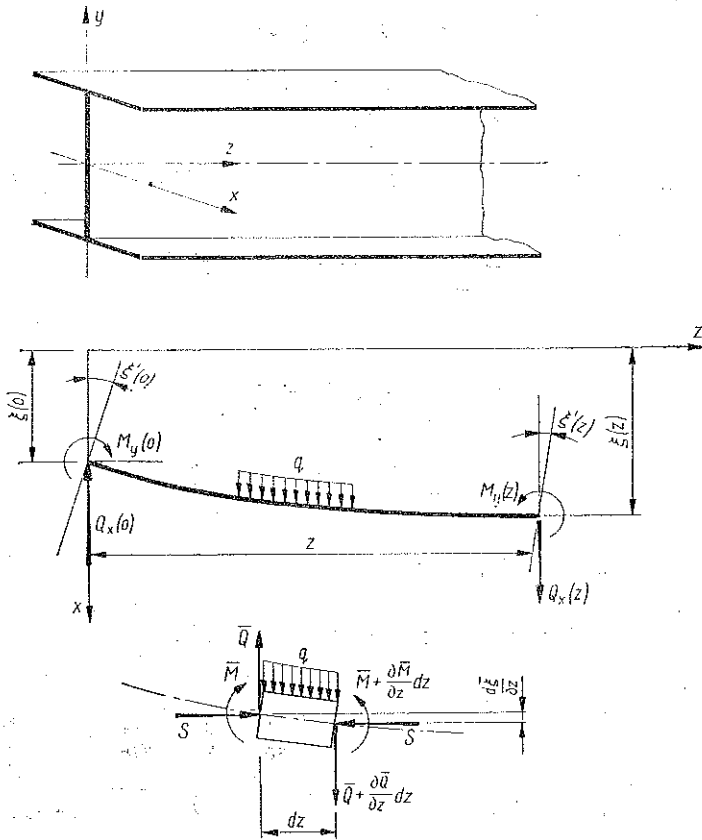
Pomiędzy pierwiastkami a i β zachodzą następujące związki:

$$\alpha_i^2 \beta_i^2 = \lambda_i^4, \quad \alpha_i^2 - \beta_i^2 = a_i, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 = 2 \sqrt{\frac{a_i^2}{4} + \lambda_i^4} = 2 \delta_i,$$

$$\delta_i = \sqrt{\frac{a_i^2}{4} + \lambda_i^4}.$$

Stałe C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , E_1 , E_2 , E_3 i E_4 wyznaczamy za pomocą wartości początkowych funkcji ζ , η i φ oraz ich pochodnych.

Rozpatrzmy $\xi(z)$. Niech funkcja ugięcia dla $z=0$ równa się $\xi(0)$, kąta obrotu przekroju poprzecznego $\xi'(0)$, momentu gnącego $\xi''(0) = -M_y(0)/EJ_y$ i siły poprzecznej $\xi'''(0) = -Q_x(0)/EJ_y$, gdzie $\xi(0)$, $\xi'(0)$, $M_y(0)$ i $Q_x(0)$ są głównymi parametrami.



Rys. 1

Obecnie napiszemy wyrażenia dla $\xi'(z)$, $M_y(z)$ i $Q_x(z)$:

$$(1.17) \quad \xi'(z) = \frac{1}{l} [-C_1 a_1 \sin a_1 \xi + C_2 a_1 \cos a_1 \xi + C_3 \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \xi + C_4 \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \xi],$$

$$(1.18) \quad M_y(z) = -\frac{EJ_y}{l^2} [-a_1^2 C_1 \cos a_1 \xi - a_1^2 C_2 \sin a_1 \xi + \beta_1^2 C_3 \operatorname{ch} \beta_1 \xi + \beta_1^2 C_4 \operatorname{sh} \beta_1 \xi],$$

$$(1.19) \quad Q_x(z) = -\frac{EJ_y}{l^3} [a_1 \beta_1^2 (C_1 \sin a_1 \xi - C_2 \cos a_1 \xi) + a_1^2 \beta_1 (C_3 \operatorname{sh} \beta_1 \xi + C_4 \operatorname{ch} \beta_1 \xi)].$$

Z równania równowagi momentów wynika, że

$$-\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial z} + \bar{Q}_x \pm S \frac{d\bar{\xi}}{dz} - \frac{q}{g} r_y^2 \frac{\partial^3 \bar{\xi}}{\partial t^3 \partial z} = 0.$$

Uwzględniając, że

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(z, t) &= \xi(z) \sin(p_1 t + \varepsilon_1), \\ \bar{M}_y(z, t) &= M_y(z) \sin(p_1 t + \varepsilon_1), \\ \bar{Q}_x(z, t) &= Q_x(z) \sin(p_1 t + \varepsilon_1)\end{aligned}$$

oraz podstawiając powyższe do otrzymanego równania równowagi znajdujemy

$$Q_x = -\frac{d^3 \xi}{dz^3} EJ_y - \frac{q}{g} r_y^2 p_1^2 \frac{d\xi}{dz} \pm S \frac{d\xi}{dz}.$$

Ponieważ

$$a_1 = \left(\frac{q}{g} r_y^2 p_1 \pm S \right) \frac{l^3}{EJ_y}.$$

Stąd

$$Q_x = -\frac{EJ_y}{l^3} \left(\frac{d^3 \xi}{dz^3} + a_1 \frac{d\xi}{dz} \right),$$

a oprócz tego $a_1 = \alpha_1^2 - \beta_1^2$. W wyniku powyższego otrzymaliśmy równanie (1.19). Podstawiając odpowiednio główne parametry dla $z = \zeta l = 0$ otrzymamy następujące wzory na stałe całkowania:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{\xi(0) \beta_1^2}{2 \delta_1} + \frac{M_y(0) l^2}{2 \delta_1 EJ_y}, & C_3 &= \frac{\xi(0) \alpha_1^2}{2 \delta_1} - \frac{M_y(0) l^2}{2 \delta_1 EJ_y}, \\ C_2 &= \frac{\xi'(0) a_1 l}{2 \delta_1} + \frac{Q_x(0) l^3}{2 \delta_1 EJ_y \alpha_1}, & C_4 &= \frac{\xi'(0) \beta_1 l}{2 \delta_1} - \frac{Q_x(0) l^3}{2 \delta_1 EJ_y \beta_1}.\end{aligned}$$

Tablica 1

${}^* \xi \xi(\zeta) = \frac{1}{2 \delta_1} (\beta_1^2 \cos \alpha_1 \zeta + \alpha_1^2 \operatorname{ch} \beta_1 \zeta),$	${}^* \xi \xi'(\zeta) = \frac{1}{2 \delta_1} (\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \zeta + \alpha_1 \sin \alpha_1 \zeta),$
${}^* \xi' \xi(\zeta) = \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_1 \zeta}{\beta_1} - \frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\alpha_1} \right),$	${}^* \xi' \xi'(\zeta) = \frac{1}{2 \delta_1} (\beta_1^2 \operatorname{ch} \beta_1 \zeta + \alpha_1^2 \cos \alpha_1 \zeta),$
${}^* M \xi(\zeta) = \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} (\operatorname{ch} \beta_1 \zeta - \cos \alpha_1 \zeta),$	${}^* M \xi'(\zeta) = \frac{1}{2 \delta_1} (\beta_1^3 \operatorname{sh} \beta_1 \zeta - \alpha_1^3 \sin \alpha_1 \zeta),$
${}^* Q \xi(\zeta) = \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\alpha_1^2 \operatorname{sh} \beta_1 \zeta}{\beta_1} - \frac{\beta_1^2 \sin \alpha_1 \zeta}{\alpha_1} \right),$	${}^* Q \xi'(\zeta) = \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} (\operatorname{ch} \beta_1 \zeta - \cos \alpha_1 \zeta) = {}^* M \xi(\zeta),$

Podstawiając otrzymane stałe do wzorów (1.12), (1.17), (1.18) i (1.19) otrzymamy

$$(1.20) \left\{ \begin{array}{l} \xi(z) = \xi(0) \kappa_{\xi\xi}(\zeta) + \xi'(0) l \kappa_{\xi\xi'}(\zeta) - \frac{M_y(0) l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi M}(\zeta) - \frac{Q_x(0) l^3}{EJ_y} \kappa_{\xi Q}(\zeta), \\ \xi'(z) = \xi(0) \frac{1}{l} \kappa_{\xi\xi'}(\zeta) + \xi'(0) \kappa_{\xi\xi''}(\zeta) - \frac{M_y(0) l}{EJ_y} \kappa_{\xi'M}(\zeta) - \frac{Q_x(0) l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi'Q}(\zeta), \\ M_y(z) = -\xi(0) \frac{EJ_y}{l^2} \kappa_{M\xi}(\zeta) - \xi'(0) \frac{EJ_y}{l} \kappa_{M\xi'}(\zeta) + M_y(0) \kappa_{MM}(\zeta) + \\ \quad + Q_x(0) l \kappa_{MQ}(\zeta), \\ Q_x(z) = -\xi(0) \frac{EJ_y}{l^3} \kappa_{Q\xi}(\zeta) - \xi'(0) \frac{EJ_y}{l^2} \kappa_{Q\xi'}(\zeta) + M_y(0) \frac{1}{l} \kappa_{QM}(\zeta) + \\ \quad + Q_x(0) \kappa_{QQ}(\zeta), \end{array} \right.$$

gdzie $\kappa_{\xi\xi}(\zeta)$, $\kappa_{\xi\xi'}(\zeta)$ i $\kappa_{\xi\xi''}(\zeta)$, $\kappa_{MQ}(\zeta)$ są funkcjami wpływowymi podanymi w tabl. 1.

Otrzymana tablica funkcji wpływowych dla zginania poprzecznego pręta w płaszczyźnie xz , obciążonego statycznie siłą podłużną S , jest symetryczną względem przekątnej; z szesnastu funkcji wpływowych tylko dziesięć jest różnych.

Funkcje wpływowe $\kappa(\zeta)$ można rozbić na dwie grupy; jedna z nich zawiera parzyste, a druga nieparzyste funkcje. Łatwo stwierdzić, że nieparzyste funkcje wyrażają wpływ niesymetrycznych wskaźników zginania ξ' i Q na symetryczne ξ i M i odwrotnie.

Dla $\zeta=0$ funkcje wpływowe tabl. 1 przedstawiają jednostkową prostokątną macierz następującą:

$$(1.21) \left[\begin{array}{cccc} \kappa_{\xi\xi}(0) = 1 & \kappa_{\xi\xi'}(0) = 0 & \kappa_{\xi M}(0) = 0 & \kappa_{\xi Q}(0) = 0 \\ \kappa_{\xi\xi'}(0) = 0 & \kappa_{\xi\xi''}(0) = 1 & \kappa_{\xi'M}(0) = 0 & \kappa_{\xi'Q}(0) = 0 \\ \kappa_{M\xi}(0) = 0 & \kappa_{M\xi'}(0) = 0 & \kappa_{MM}(0) = 1 & \kappa_{MQ}(0) = 0 \\ \kappa_{Q\xi}(0) = 0 & \kappa_{Q\xi'}(0) = 0 & \kappa_{QM}(0) = 0 & \kappa_{QQ}(0) = 1 \end{array} \right]$$

Tablica 1

$$\begin{array}{ll} \kappa_{\xi M}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} (\text{ch } \beta_1 \zeta - \cos \alpha_1 \zeta), & \kappa_{\xi Q}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} \left(\frac{\text{sh } \beta_1 \zeta}{\beta_1} - \frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\alpha_1} \right), \\ \kappa_{\xi'M}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} (\beta_1 \text{ sh } \beta_1 \zeta + \alpha_1 \sin \alpha_1 \zeta), & \kappa_{\xi'Q}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} \text{ch } \beta_1 \zeta - \cos \alpha_1 \zeta = \kappa_{\xi M}, \\ \kappa_{MM}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} (\beta_1^2 \text{ ch } \beta_1 \zeta + \alpha_1^2 \cos \alpha_1 \zeta) = \kappa_{\xi'\xi'}, & \kappa_{MQ}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} (\beta_1 \text{ sh } \beta_1 \zeta + \alpha_1 \sin \alpha_1 \zeta) = \\ & = \kappa_{\xi'M}(\zeta) = \kappa_{\xi\xi''}(\zeta), \\ \kappa_{QM}(\zeta) = \frac{\lambda_1^2}{2\delta_1} \left(\frac{\text{sh } \beta_1 \zeta}{\beta_1} - \frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\alpha_1} \right) = \kappa_{\xi\xi}, & \kappa_{QQ}(\zeta) = \frac{1}{2\delta_1} (\beta_1^2 \cos \alpha_1 \zeta + \alpha_1^2 \text{ch } \beta_1 \zeta) = \\ & = \kappa_{\xi\xi'}(\zeta). \end{array}$$

W sposób analogiczny otrzymamy funkcje określające $\eta(z)$, $\eta'(z)$, $M_x(z)$ i $Q_y(z)$ dla zginania w płaszczyźnie yz :

$$(1.22) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta(z) &= \eta(0) \kappa_{\eta\eta}(\xi) + \eta'(0) l \kappa_{\eta\eta'}(\xi) - \frac{M_x(0) l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta M}(\xi) - \frac{Q_y(0) l^3}{EJ_x} \kappa_{\eta Q}(\xi), \\ \eta'(z) &= \eta(0) \frac{1}{l} \kappa_{\eta'\eta}(\xi) + \eta'(0) \kappa_{\eta'\eta'}(\xi) - \frac{M_x(0) l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta' M}(\xi) - \frac{Q_y(0) l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta' Q}(\xi), \\ M_x(z) &= -\eta(0) \frac{EJ_x}{l^2} \kappa_{M\eta}(\xi) - \eta'(0) \frac{EJ_x}{l} \kappa_{M\eta'}(\xi) + M_x(0) \kappa_{MM}(\xi) + \\ &\quad + Q_y(0) l \kappa_{MQ}(\xi), \\ Q_y(z) &= -\eta(0) \frac{EJ_x}{l^3} \kappa_{Q\eta}(\xi) - \eta'(0) \frac{EJ_x}{l^2} \kappa_{Q\eta'}(\xi) + M_x(0) \frac{1}{l} \kappa_{QM}(\xi) + \\ &\quad + Q_y(0) \kappa_{QQ}(\xi). \end{aligned} \right.$$

W równaniach tych funkcje wpływowe $\kappa_{\eta\eta}$, $\kappa_{\eta\eta'}$, ..., κ_{QQ} są identyczne z podanymi w tabl. 1 z tym zastrzeżeniem, że należy wszędzie w nich wstawić η zamiast ξ , z czym związana jest również zamiana wielkości α_1 , β_1 , δ_1 i λ_1 na α_2 , β_2 , δ_2 i λ_2 zgodnie z poprzednio wprowadzonymi oznaczeniami.

Dla skręcania (obrotu elementu pręta) około osi z otrzymamy

$$(1.23) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(0) \kappa_{\varphi\varphi}(\xi) + \varphi'(0) l \left[\kappa_{\varphi\varphi'}(\xi) - \frac{GJ_s l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M}(\xi) \right] - \\ &\quad - \frac{B(0) l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi B}(\xi) + \frac{M_s(0) l^3}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M}(\xi), \\ \varphi'(z) &= \varphi(0) \frac{1}{l} \kappa_{\varphi'\varphi}(\xi) + \varphi'(0) \kappa_{\varphi'\varphi'}(\xi) - \frac{B(0) l}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi' B}(\xi) - \\ &\quad - \frac{M_s(0) l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi' M}(\xi), \\ B(z) &= -\varphi(0) \frac{EJ_\omega}{l^2} \kappa_{B\varphi}(\xi) - \varphi'(0) \frac{EJ_\omega}{l} \kappa_{B\varphi'}(\xi) + B(0) \kappa_{BB}(\xi) + \\ &\quad + M_s(0) l \kappa_{BM}(\xi), \\ M_\omega(z) &= -\varphi(0) \frac{EJ_\omega}{l^3} \kappa_{M\varphi}(\xi) - \varphi'(0) \frac{EJ_\omega}{l^2} \kappa_{M\varphi'}(\xi) + B(0) \frac{1}{l} \kappa_{MB}(\xi) + \\ &\quad + M_s(0) l \kappa_{MM}(\xi). \end{aligned} \right.$$

Tablica 2

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\varphi\varphi}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\beta_3^2 \cos \alpha_3 \zeta + \alpha_3^2 \operatorname{ch} \beta_3 \zeta), \\
 \kappa_{\varphi\varphi'}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} \left[\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta + \alpha_3 \sin \alpha_3 \zeta - \frac{GJ_s l^2}{EJ\omega} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\beta_3} - \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\alpha_3} \right) \right], \\
 \kappa_{\varphi B}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\operatorname{ch} \beta_3 \zeta - \cos \alpha_3 \zeta), & \kappa_{\varphi M}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\beta_3} - \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\alpha_3} \right), \\
 \kappa_{\varphi'\varphi}(\zeta) &= \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\beta_3} - \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\alpha_3} \right), \\
 \kappa_{\varphi'\varphi'}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} \left[\beta_3^2 \operatorname{ch} \beta_3 \zeta + \alpha_3^2 \cos \alpha_3 \zeta - \frac{GJ_s l^2}{EJ\omega} (\operatorname{ch} \beta_3 \zeta - \cos \alpha_3 \zeta) \right], \\
 \kappa_{\varphi'B}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta + \alpha_3 \sin \alpha_3 \zeta), & \kappa_{\varphi'M}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\operatorname{ch} \beta_3 \zeta - \cos \alpha_3 \zeta) = \kappa_{\varphi B}(\zeta), \\
 \kappa_{M\varphi}(\zeta) &= \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\alpha_3^2 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\beta_3} + \frac{\beta_3^2 \sin \alpha_3 \zeta}{\alpha_3} \right), \\
 \kappa_{M\varphi'}(\zeta) &= \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left[\operatorname{ch} \beta_3 \zeta - \cos \alpha_3 \zeta - \frac{GJ_s l^2}{EJ\omega} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\beta_3} + \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\alpha_3} \right) \right], \\
 \kappa_{MB}(\zeta) &= \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\beta_3} - \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\alpha_3} \right) = \kappa_{\varphi'\varphi}, & \kappa_{MM}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\beta_3^2 \cos \alpha_3 \zeta + \alpha_3^2 \operatorname{ch} \beta_3 \zeta) = \kappa_{\varphi\varphi}, \\
 \kappa_{B\varphi}(\zeta) &= \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} (\operatorname{ch} \beta_3 \zeta - \cos \alpha_3 \zeta), \\
 \kappa_{B\varphi'}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} \left[\beta_3^2 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta - \alpha_3^3 \sin \alpha_3 \zeta - \frac{GJ_s l^2}{EJ\omega} (\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta + \alpha_3 \sin \alpha_3 \zeta) \right], \\
 \kappa_{BB}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\beta_3^2 \operatorname{ch} \beta_3 \zeta + \alpha_3^2 \cos \alpha_3 \zeta), & \kappa_{BM}(\zeta) &= \frac{1}{2\delta_3} (\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3 \zeta + \alpha_3 \sin \alpha_3 \zeta) = \kappa_{\varphi'B}.
 \end{aligned}$$

Wzór dla momentu giętno-skretnego M_ω napisaliśmy w oparciu o analogię do przypadków poprzednich. Wpływ siły podłużnej oraz bezwładności na moment M_ω został uwzględniony przez wprowadzenie dodatkowego wyrazu $\alpha_3 dq/d\zeta$:

$$M_\omega = -\frac{EJ\omega}{l^3} \left(\frac{d^3 q}{d\zeta^3} + \alpha_3 \frac{dq}{d\zeta} \right).$$

Dla przypadku powyżej rozpatrywanego na szesnastcie funkcji wpływowych dwanaście jest różnych.

Jak wynika z niżej podanej macierzy funkcji wpływowych obrotu elementu około osi z dla $\zeta=0$ jest ona taka sama jak w przypadku zginania poprzecznego:

$$(1.24) \cdot \begin{bmatrix} \kappa_{\varphi\varphi}(0) = 1 & \kappa_{\varphi\varphi'}(0) = 0 & \kappa_{\varphi B}(0) = 0 & \kappa_{\varphi M}(0) = 0 \\ \kappa_{\varphi'\varphi}(0) = 0 & \kappa_{\varphi'\varphi'}(0) = 1 & \kappa_{\varphi'B}(0) = 0 & \kappa_{\varphi'M}(0) = 0 \\ \kappa_{B\varphi}(0) = 0 & \kappa_{B\varphi'}(0) = 0 & \kappa_{BB}(0) = 1 & \kappa_{BM}(0) = 0 \\ \kappa_{M\varphi}(0) = 0 & \kappa_{M\varphi'}(0) = 0 & \kappa_{MB}(0) = 0 & \kappa_{MM}(0) = 1 \end{bmatrix}$$

Rozpatrzmy przypadek obciążenia pręta cienkościennego o otwartym profilu kilkoma harmonicznymi obciążeniami złożonymi z sił

$$\bar{P}_x = P_x \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{P}_y = P_y \sin(pt + \varepsilon),$$

momentów gnących

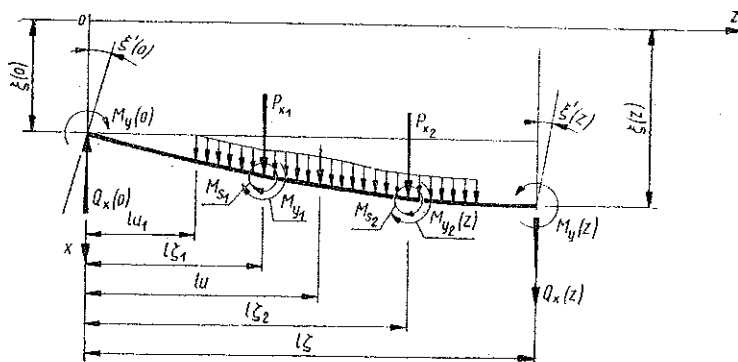
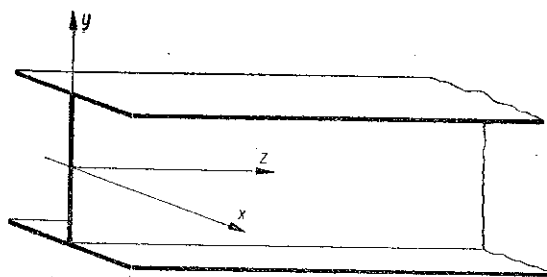
$$\bar{M}_x = M_x \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{M}_y = M_y \sin(pt + \varepsilon),$$

momentów skręcających

$$\bar{M}_s = M_s \sin(pt + \varepsilon),$$

bimomentów

$$\bar{B} = B \sin(pt + \varepsilon)$$



Rys. 2

oraz z obciążenia równomiernie rozłożonego

$$\bar{p}_x = p_x \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{p}_y = p_y \sin(pt + \varepsilon),$$

$$\bar{m}_x = m_x \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{m}_y = m_y \sin(pt + \varepsilon),$$

$$\bar{m}_s = m_s \sin(pt + \varepsilon), \quad \bar{b} = b \sin(pt + \varepsilon).$$

Wszystkie wyszczególnione obciążenia mają tę samą częstość podstawową i tę samą fazę. Działanie tego rodzaju obciążeń wywołuje drgania wymuszone, które po upływie pewnego czasu stają się ustalonymi harmonicznymi o częstości p .

Przy pominięciu oporu przesunięcie faz pomiędzy drganiami i obciążeniami wyniesie 0 lub 180° , wobec czego funkcje

$$\xi(z, t) = \xi(z) \sin(pt + \varepsilon),$$

$$\bar{\eta}(z, t) = \eta(z) \sin(pt + \varepsilon),$$

$$\varphi(z, t) = \varphi(z) \sin(pt + \varepsilon)$$

wystąpią również w przypadku drgań wymuszonych.

Wpływ obciążeń lokalnych na odcinku Oz (rys. 2) na amplitudy $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\varphi(z)$, $M_x(z)$, $M_y(z)$, $Q_x(z)$ i $Q_y(z)$ określimy posługując się zasadą głównych parametrów.

Przyjmując przekrój $z_i = l\zeta_i$ jako główny i nadając we wzorach (1.20) głównymi parametrami wartości $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) = 0$, $M_x(0) = M_{xi}$, $M_y(0) = M_{yi}$, $Q_x(0) = -P_{xi}$, $Q_y(0) = -P_{yi}$ i $M_s(0) = M_{si}$ otrzymamy wpływ powyższych obciążeń na amplitudy.

Dodając w ten sposób otrzymane funkcje dla oddzielnych skupionych obciążeń i biorąc pod uwagę, że przy obciążeniu rozłożonym sumy należy zastąpić całkami dla obciążeń elementarnych $p(z) dz$, znajdziemy amplitudy w przekroju z wywołane obciążeniami zewnętrznymi znajdującymi się z lewej strony przekroju. Dodając powyższe funkcje do prawych stron wzorów (1.20) i uwzględniając wpływ głównych parametrów otrzymamy pełne wyrażenia dla amplitud $\xi(z)$, $\xi'(z)$ itd., zawierające główne parametry oraz obciążenia zewnętrzne.

Wzory na amplitudy drgań wymuszonych powstałych w płaszczyźnie xz są następujące:

$$(1.25) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi(z) &= \zeta(0) \kappa_{\xi\xi}(\zeta) + \xi'(0) l \kappa_{\xi\xi'}(\zeta) - \frac{M_y(0) l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi M}(\zeta) - \frac{Q_x(0) l^3}{EJ_y} \kappa_{\xi Q}(\zeta) - \\ &\quad - \frac{l^2}{EJ_y} \sum_{i=1}^n M_{yi} \kappa_{\xi M}(\zeta - \zeta_i) + \frac{l^3}{EJ_y} \sum_{i=1}^n P_{xi} \kappa_{\xi Q}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^4}{EJ_y} \int_{u_1}^{u_2} p_x(u) \kappa_{\xi Q}(\zeta - u) du, \\ \xi'(z) &= \xi(0) \frac{1}{l} \kappa_{\xi\xi'}(\zeta) + \xi'(0) \kappa_{\xi\xi''}(\zeta) - \frac{M_y(0) l}{EJ_y} \kappa_{\xi M'}(\zeta) - \frac{Q_x(0) l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi Q'}(\zeta) - \end{aligned} \right.$$

(1.25)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{l}{EJ_y} \sum_{i=1}^n M_{yi} \kappa_{\xi M}(\zeta - \zeta_i) + \frac{l^2}{EJ_y} \sum_{i=1}^n P_{xi} \kappa_{\xi' Q}(\zeta - \zeta_i) + \\
 & + \frac{l^3}{EJ_y} \int_{u_1}^{u_2} p_x(u) \kappa_{\xi' Q}(\zeta - u) du, \\
 M_y(z) = & -\xi(0) \frac{EJ_y}{l^2} \kappa_{M\xi}(\zeta) - \xi'(0) \frac{EJ_y}{l} \kappa_{M\xi'}(\zeta) + M_y(0) \kappa_{MM}(\zeta) + \\
 & + Q_x(0) l \kappa_{MQ}(\zeta) + \sum_{i=1}^n M_{yi} \kappa_{MM}(\zeta - \zeta_i) - l \sum_{i=1}^n P_{xi} \kappa_{MQ}(\zeta - \zeta_i) - \\
 & - l^2 \int_{u_1}^{u_2} p_x(u) \kappa_{MQ}(\zeta - u) du, \\
 Q_x(z) = & -\zeta(0) \frac{EJ_y}{l^3} \kappa_{Q\xi}(\zeta) - \zeta'(0) \frac{EJ_y}{l^2} \kappa_{Q\xi'}(\zeta) + M_y(0) \kappa_{QM}(\zeta) + \\
 & + Q_x(0) \kappa_{QQ}(\zeta) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{yi} \kappa_{QM}(\zeta - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n P_{xi} \kappa_{QQ}(\zeta - \zeta_i) - \\
 & - l \int_{u_1}^{u_2} p_x(u) \kappa_{QQ}(\zeta - u) du.
 \end{aligned}$$

Identyczne wyrażenia otrzymamy dla amplitud występujących podczas drgań wymuszonych w płaszczyźnie yz z tym zastrzeżeniem, że w odpowiednie funkcje wpływowe wejdą argumenty $a_2 \beta_2$ itd., oraz na miejsce symbolu x wejdzie wszędzie y , a zamiast y wejdzie x .

Jak już uprzednio zaznaczyliśmy, sumy obciążeń oraz całki dotyczą cięzarów znajdujących się po lewej stronie rozpatrywanego przekroju. Łatwo zauważyć, że w przypadku równomiernego obciążenia p w przedziale od u_1 do u_2 powyżej podane całki przyjmą następującą postać:

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \int_{u_1}^{u_2} p(u) \kappa_{\xi Q}(\zeta - u) du &= \frac{p}{\lambda_1^4} [\kappa_{\xi\xi}(\zeta - u_1) - \kappa_{\xi\xi}(\zeta - u_2)], \\
 \int_{u_1}^{u_2} p(u) \kappa_{\xi' Q}(\zeta - u) du &= \frac{p}{\lambda_1^4} [\kappa_{\xi'\xi}(\zeta - u_1) - \kappa_{\xi'\xi}(\zeta - u_2)], \\
 \int_{u_1}^{u_2} p(u) \kappa_{MQ}(\zeta - u) du &= \frac{p}{\lambda_1^4} [\kappa_{M\xi}(\zeta - u_1) - \kappa_{M\xi}(\zeta - u_2)], \\
 \int_{u_1}^{u_2} p(u) \kappa_{QQ}(\zeta - u) du &= \frac{p}{\lambda_1^4} [\kappa_{Q\xi}(\zeta - u_1) - \kappa_{Q\xi}(\zeta - u_2)].
 \end{aligned} \right.$$

Przechodząc obecnie do skręcania napiszemy podobnie

$$\begin{aligned}
 \varphi(z) &= \varphi(0) \kappa_{\varphi\varphi}(\zeta) + \varphi'(0) l \kappa_{\varphi\varphi'}(\zeta) - \frac{B(0)l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi B}(\zeta) - \frac{M_s(0)l^3}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M}(\zeta) - \\
 &\quad - \frac{l^2}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n B_i \kappa_{\varphi B}(\zeta - \zeta_i) + \frac{l^3}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n M_{si} \kappa_{\varphi M}(\zeta - \zeta_i) + \\
 &\quad + \frac{l^4}{EJ_\omega} \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{\varphi M}(\zeta - u) du, \\
 \varphi'(z) &= \varphi(0) \frac{1}{l} \kappa_{\varphi'\varphi}(\zeta) + \varphi'(0) \kappa_{\varphi'\varphi'}(\zeta) - \frac{B(0)l}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi'B}(\zeta) - \frac{M_s(0)l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi'M}(\zeta) - \\
 &\quad - \frac{l}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n B_i \kappa_{\varphi'B}(\zeta - \zeta_i) + \frac{l^2}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n M_{si} \kappa_{\varphi'M}(\zeta - \zeta_i) + \\
 &\quad + \frac{l^3}{EJ_\omega} \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{\varphi'M}(\zeta - u) du, \\
 B(z) &= -\varphi(0) \frac{EJ_\omega}{l^2} \kappa_{B\varphi}(\zeta) - \varphi'(0) \frac{EJ_\omega}{l} \kappa_{B\varphi'}(\zeta) + B(0) \kappa_{BB}(\zeta) + \\
 &\quad + M_s(0) l \kappa_{BM}(\zeta) + \frac{l}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n B_i \kappa_{BB}(\zeta - \zeta_i) - \\
 &\quad - \frac{l}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n M_{si} \kappa_{BM}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l^2}{EJ_\omega} \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{BM}(\zeta - u) du, \\
 M_\omega(0) &= -\varphi(0) \frac{EJ_\omega}{l^3} \kappa_{M\varphi}(\zeta) - \varphi'(0) \frac{EJ_\omega}{l^2} \kappa_{M\varphi'}(\zeta) + B(0) \frac{1}{l} \kappa_{MB}(\zeta) + \\
 &\quad + M_s(0) l \kappa_{MM}(\zeta) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n B_i \kappa_{MB}(\zeta - \zeta_i) - \\
 &\quad - l \sum_{i=1}^n M_{si} \kappa_{MM}(\zeta - \zeta_i) - l^2 \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{MM}(\zeta - u) du.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Dla obciążenia rozłożonego w sposób ciągły o natężeniu m_s możemy napisać podobnie jak poprzednio

$$\begin{aligned}
 \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{\varphi M}(\zeta - u) du &= \frac{m_s}{\lambda_3^4} [\kappa_{\varphi\varphi}(\zeta - u_1) - \kappa_{\varphi\varphi}(\zeta - u_2)], \\
 \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{\varphi'M}(\zeta - u) du &= \frac{m_s}{\lambda_3^4} [\kappa_{\varphi'\varphi}(\zeta - u_1) - \kappa_{\varphi'\varphi}(\zeta - u_2)], \\
 \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{BM}(\zeta - u) du &= \frac{m_s}{\lambda_3^4} [\kappa_{B\varphi}(\zeta - u_1) - \kappa_{B\varphi}(\zeta - u_2)], \\
 \int_{u_1}^{u_2} m_s(u) \kappa_{MM}(\zeta - u) du &= \frac{m_s}{\lambda_3^4} [\kappa_{M\varphi}(\zeta - u_1) - \kappa_{M\varphi}(\zeta - u_2)].
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

2. Określenie częstości i siły krytycznej dla jednoprzęsłowego pręta

Rozpatrzmy pręt o przegubowo podpartych końcach oraz swobodnym spaceniu końcowych przekrojów poprzecznych.

W powyższym przypadku warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \text{dla } z=0 \quad \xi(0) &= 0, & M_y(0) &= 0, & \text{dla } z=l \quad \xi(l) &= 0, & M_y(l) &= 0, \\ & \eta(0) = 0, & M_x(0) &= 0, & & \eta(l) = 0, & M_x(l) &= 0, \\ & \varphi(0) = 0, & B(0) &= 0, & & \varphi(l) = 0, & B(l) &= 0. \end{aligned}$$

Z równań (1.20) otrzymamy po uwzględnieniu powyższych warunków brzegowych: dla $z=0$

$$\zeta = 0, \quad \kappa_{\xi\xi'} = 0, \quad \kappa_{\xi Q} = 0;$$

dla $z=l$

$$\zeta = 1, \quad \kappa_{\xi\xi'}(1), \quad \kappa_{\xi Q}(1),$$

$$(2.1) \quad \begin{cases} \xi'(0) l \kappa_{\xi\xi'}(1) - \frac{Q_x(0) l^3}{EJ_y} \kappa_{\xi Q}(1) = 0, \\ -\xi'(0) \frac{EJ_y}{l} \kappa_{M\xi'}(1) + Q_x(0) l \kappa_{MQ}(1) = 0. \end{cases}$$

Podobnie zapiszemy opierając się na równaniach (1.22) przy jednoczesnym uwzględnieniu warunków brzegowych dla zginania w płaszczyźnie yz :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \eta'(0) l \kappa_{\eta\eta'}(1) - \frac{Q_y(0) l^3}{EJ_x} \kappa_{\eta Q}(1) = 0, \\ -\eta'(0) \frac{EJ_x}{l} \kappa_{M\eta'}(1) + Q_y(0) l \kappa_{MQ}(1) = 0. \end{cases}$$

Dla skręcania otrzymamy również warunki podobne:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \varphi'(0) l \kappa_{\varphi\varphi'}(1) - \frac{M_s(0) l^3}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M}(1) = 0, \\ -\varphi'(0) \frac{EJ_\omega}{l} \kappa_{B\varphi'}(1) + M_s(0) l \kappa_{BM}(1) = 0. \end{cases}$$

Przyrównując do zera wyznaczniki odpowiednich równań utworzone ze współczynników $\xi'(0)$, $\eta'(0)$, $\varphi'(0)$, $Q_x(0)$, $Q_y(0)$ i $M_s(0)$ otrzymamy równania częstości oraz sił krytycznych:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \kappa_{\xi\xi'}(1) \kappa_{MQ}(1) - \kappa_{\xi Q}(1) \kappa_{M\xi'}(1) = 0, \\ \kappa_{\eta\eta'}(1) \kappa_{MQ}(1) - \kappa_{\eta Q}(1) \kappa_{M\eta'}(1) = 0, \\ \kappa_{\varphi\varphi'}(1) \kappa_{BM}(1) - \kappa_{\varphi M}(1) \kappa_{B\varphi'}(1) = 0. \end{cases}$$

Powyższe równania można przekształcić za pomocą tabl. 1 i 2 w następujące:

$$\sin a_1 = 0, \quad \sin a_2 = 0, \quad \sin a_3 = 0.$$

Pierwiastkami powyższych równań są liczby

$$a_1 = n\pi, \quad a_2 = n\pi, \quad a_3 = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Tak dla drgań giętnych jak i obrotów każdemu z poszczególnych pierwiastków odpowiada pewna postać drgań własnych.

Z pierwszego równania grupy (2.1) dla $a_1 = n\pi$ otrzymamy

$$\frac{Q_x(0) l^3}{EJ_y} = \xi'(0) l \frac{\kappa_{\xi\xi'}(1)}{\kappa_{\xi Q}(1)} = \xi'(0) l \beta_1^2.$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie do pierwszego z równań (1.20) oraz uwzględniając warunki brzegowe dla $z=0$, otrzymamy po przekształceniach odpowiednią postać drgań własnych w płaszczyźnie xz :

$$\xi(z) = \xi'(0) l \frac{1}{n\pi} \sin n\pi z.$$

Podobnie otrzymamy dla drgań własnych w płaszczyźnie yz oraz drgań skrętnych, gdzie wielkości $\xi'(0)$, $\eta'(0)$ i $\varphi'(0)$ są dowolnymi nieokreślonymi stałymi, funkcje

$$\eta(z) = \eta'(0) l \frac{1}{n\pi} \sin n\pi z, \quad \varphi(z) = \varphi'(0) l \frac{1}{n\pi} \sin n\pi z.$$

Podstawiając w wyrażenia na a_1 , a_2 i a_3 [wzory (1.13)-(1.16)] odpowiedni pierwiastek oraz wprowadzając wartości a_1 , a_2 i a_3 , otrzymamy

$$\lambda_1^2 = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{1 + \frac{Sl^2}{n^2 \pi^2 EJ_y}}{1 + \frac{n^2 \pi^2 r_y^2}{l^2}}}, \quad \lambda_2^2 = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{1 + \frac{Sl^2}{n^2 \pi^2 EJ_x}}{1 + \frac{n^2 \pi^2 r_x^2}{l^2}}},$$

$$\lambda_3^2 = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{1 + \frac{Sr_0^2 l^2}{n^2 \pi^2 EJ_\omega} + \frac{GJ_s l^2}{n^2 \pi^2 EJ_\omega}}{1 + \frac{r_\omega^2}{r_0^2} \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}}.$$

Mając wyznaczony parametr λ możemy określić za pomocą wzorów podanych poprzednio częstości poszczególnych drgań.

Częstość drgań w kierunku osi x wynosi

$$p_{n_1} = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{q}} g,$$

częstość drgań w kierunku osi y

$$p_{n_2} = \frac{\lambda_2^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{q}} g,$$

a częstość drgań skrętnych

$$p_{n_3} = \frac{\lambda_3^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_\omega}{q}} g.$$

Po wstawieniu odpowiednich wartości na λ powyższe wzory otrzymają postać:

dla kierunku osi x

$$p_{n_1} = \bar{p}_{n_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{S}{SEI}}{1 + \frac{n^2 \pi^2 r_y^2}{l^2}}}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{p}_{n_1} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{q}} g;$$

dla kierunku osi y

$$p_{n_2} = \bar{p}_{n_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{S}{SEI}}{1 + \frac{n^2 \pi^2 r_x^2}{l^2}}}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{p}_{n_2} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{q}} g;$$

dla obrotów około osi z

$$p_{n_3} = \bar{p}_{n_3} \sqrt{\frac{1 + \frac{Sr_0^2 l^2}{n^2 \pi^2 EJ_\omega} + \frac{GJ_s l^2}{n^2 \pi^2 EJ_\omega}}{1 + \frac{r_0^2 n^2 \pi^2}{r_0^2 l^2}}}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{p}_{n_3} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_\omega}{q}} g.$$

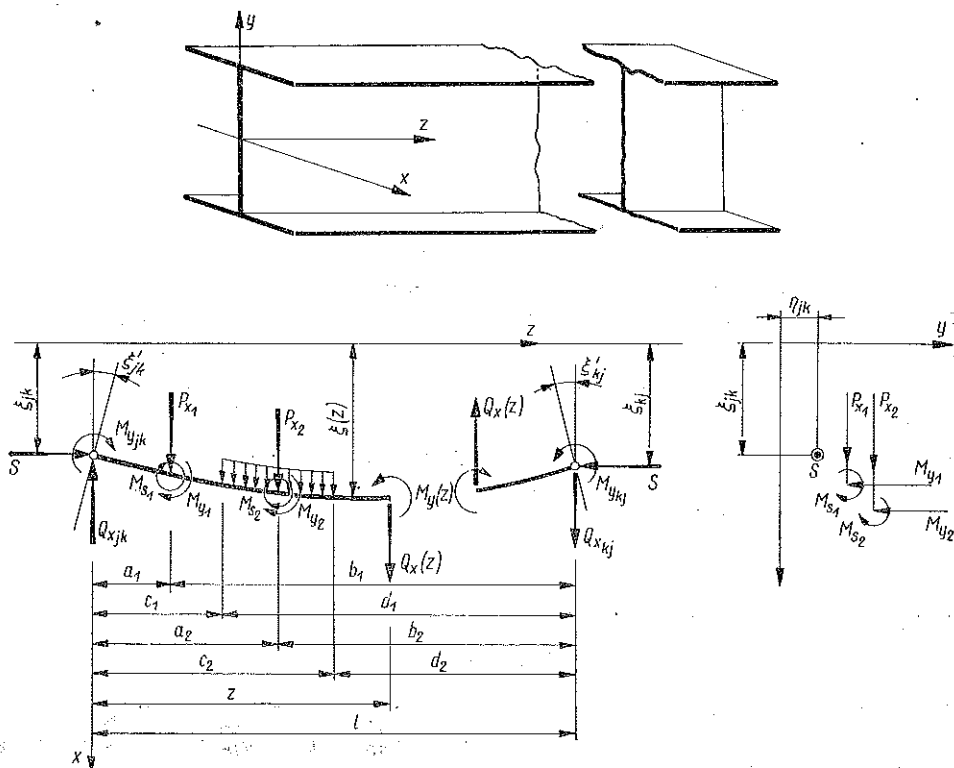
Wartości sił krytycznych dla wyżej rozpatrywanego pręta wyznaczmy przyrównując do zera licznik wyrażeń określających częstości drgań:

$$S_x = S_{EI} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_y}{l^2},$$

$$S_y = S_{EI} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{l^2}, \quad S_\omega = \left(\frac{n^2 \pi^2 EJ_\omega}{l^2} + GJ_s \right) \frac{1}{r_0^2}.$$

3. Drgania pręta jako jednoprzęsłowej belki

Przy rozpatrywaniu prętów jako belek ciągłych oraz układów ramowych uwzględnimy przypadek pręta na końcach przegubowo podpartego oraz utwierdzonego sztywnie.



Rys. 3

Zbadanie drgań konstrukcji złożonej podobnie jak w przypadku konstrukcji z prętów zwykłych wymaga określenia lokalnych oraz brzegowych oddziaływań, wyrażających wpływ pozostałej konstrukcji na wydzielony pręt. Wobec tego rozpatrzmy pręt cienkościenny o otwartym profilu przegubowo podparty, obciążony okresowymi siłami (rys. 3):

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= P_{x_i} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_x &= M_{x_i} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_s &= M_{s_i} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{P}_y &= P_{y_i} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_y &= M_{y_i} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B} &= B_i \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{p}_x &= p_x \sin(pt + \varepsilon), & \bar{p}_y &= p_y \sin(pt + \varepsilon), & \bar{b} &= b \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{m}_x &= m_x \sin(pt + \varepsilon), & \bar{m}_y &= m_y \sin(pt + \varepsilon), & \bar{m}_s &= m_s \sin(pt + \varepsilon). \end{aligned}$$

Momenty podporowe wynoszą:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{xjk} &= M_{xjk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{xkj} &= M_{xkj} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{M}_{yjk} &= M_{yjk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{ykj} &= M_{ykj} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{M}_{sjk} &= M_{sjk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{skj} &= M_{skj} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{B}_{jk} &= B_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B}_{kj} &= B_{kj} \sin(pt + \varepsilon);\end{aligned}$$

przemieszczenia i obroty pręta na podporach

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{jk} &= \xi_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\xi}_{kj} &= \xi_{kj} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{\eta}_{jk} &= \eta_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\eta}_{kj} &= \eta_{kj} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{\varphi}_{jk} &= \varphi_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\varphi}_{kj} &= \varphi_{kj} \sin(pt + \varepsilon).\end{aligned}$$

Podczas działania powyżej podanych obciążeń pojawią się ugięcia $\xi(z)$ i $\eta(z)$, obrót $\varphi(z)$, oraz kąty ugięć $\xi'(z)$ i $\eta'(z)$, spaczenie jednostkowe $\varphi'(z)$, momenty gnące $M_x(z)$ i $M_y(z)$, siły poprzeczne $Q_x(z)$ i $Q_y(z)$, moment skręcający $M_s(z)$, bimoment $B(z)$, które będą zmieniać się harmonicznym w czasie z częstością i fazą równą częstości i fazie sił wymuszających.

Amplitudy ugięć, kątów ugięć, momentów, sił poprzecznych i bimomentów określimy zgodnie ze wzorami (1.25) i (1.27).

Biorąc pod uwagę zginanie w płaszczyźnie xz zakładamy, że znane są główne parametry, tj. dla $z = 0$ mamy

$$\xi(0) = \xi_{jk}, \quad M_y(0) = M_{yjk},$$

natomiast dla $z = l$ mamy

$$\xi(l) = \xi_{kj}, \quad M_y(l) = M_{ykj}.$$

Podstawiając powyższe wielkości do pierwszego i trzeciego wzoru (1.25) przy jednoczesnym uwzględnieniu wzorów (1.26), otrzymamy po przekształceniu następujące równania:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'(0) l \kappa_{\xi\xi'}(1) - \frac{Q_x(0) l^3}{EJ_y} \kappa_{\xi Q}(1) &= \xi_{kj} - \xi_{jk} \kappa_{\xi\xi}(1) + \frac{M_{yjk} l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi M}(1) + \\ &+ \sum_{i=1}^n M_{yi} \frac{l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi M}(\bar{b}_i) - \sum_{i=1}^n P_{ix} \frac{l^3}{EJ_y} \kappa_{\xi Q}(\bar{b}_i) - \\ &- p_x \frac{l^4}{\lambda_1^4 EJ_y} [\kappa_{\xi\xi}(1 - u_1) - \kappa_{\xi\xi}(1 - u_2)], \\ \xi'(0) l \kappa_{M\xi'}(1) + \frac{Q_x(0) l^3}{EJ_y} \kappa_{MQ}(1) &= \xi_{jk} \kappa_{M\xi}(1) - \frac{M_{yjk} l^2}{EJ_y} \kappa_{MM}(1) + \\ &+ \frac{M_{ykj} l^2}{EJ_y} - \sum_{i=1}^n M_{iy} \frac{l^2}{EJ_y} \kappa_{MM}(\bar{b}_i) + \sum_{i=1}^n P_{ix} \frac{l^3}{EJ_y} \kappa_{MQ}(\bar{b}_i) + \\ &+ p_x \frac{l^4}{\lambda_1^4 EJ_y} [\kappa_{M\xi}(1 - u_1) - \kappa_{M\xi}(1 - u_2)], \end{aligned} \right.$$

gdzie $\bar{b}_i = b_i/l$.

Z powyższych równań wyznaczmy wartości $\xi'(0)$ i $Q_x(0)$, Podobnie: postąpimy w przypadku zginania w płaszczyźnie yz , określając wielkości $\eta'(0)$ i $Q_y(0)$. Z analogicznych równań napisanych dla skręcania wyznaczmy wielkości $\varphi'(0)$ i $M_s(0)$. Otrzymamy w ten sposób równania

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta'(0) l \kappa_{\eta\eta'}(1) - \frac{Q_y(0) l^3}{EJ_x} \kappa_{\eta Q}(1) &= \eta_{kj} - \eta_{jk} \kappa_{\eta\eta}(1) + \frac{M_{xjk} l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta M}(1) + \\ &+ \sum_{i=1}^n M_{ix} \frac{l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta M}(\bar{b}_i) - \sum_{i=1}^n P_{iy} \frac{l^3}{EJ_x} \kappa_{\eta Q}(\bar{b}_i) - \\ &- p_y \frac{l^4}{\lambda_2^4 EJ_x} [\kappa_{\eta\eta}(1-u_1) - \kappa_{\eta\eta}(1-u_2)], \\ -\eta'(0) l \kappa_{M\eta'}(1) + \frac{Q_y(0) l^3}{EJ_x} \kappa_{MQ}(1) &= \eta_{jk} \kappa_{M\eta}(1) - \frac{M_{xkj} l^2}{EJ_x} \kappa_{MM}(1) + \\ &+ \frac{M_{xkj} l^2}{EJ_x} - \sum_{i=1}^n M_{ix} \frac{l^2}{EJ_x} \kappa_{MM}(\bar{b}_i) + \sum_{i=1}^n P_{iy} \frac{l^3}{EJ_x} \kappa_{MQ}(\bar{b}_i) + \\ &+ p_y \frac{l^4}{\lambda_2^4 EJ_x} [\kappa_{M\eta}(1-u_1) - \kappa_{M\eta}(1-u_2)], \end{aligned} \right.$$

a dla skręcania

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'(0) l \kappa_{\varphi\varphi'}(1) - \frac{M_s(0) l^3}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M}(1) &= \varphi_{kj} - \varphi_{jk} \kappa_{\varphi\varphi}(1) + \frac{B_{jk} l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi B}(1) + \\ &+ \sum_{i=1}^n B_i \frac{l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi B}(\bar{b}_i) - \sum_{i=1}^n M_{is} \frac{l^3}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M}(\bar{b}_i) - \\ &- m_s \frac{l^4}{\lambda_3^4 EJ_\omega} [\kappa_{\varphi\varphi}(1-u_1) - \kappa_{\varphi\varphi}(1-u_2)], \\ -\varphi'(0) l \kappa_{B\varphi'}(1) + \frac{M_s(0) l^3}{EJ_\omega} \kappa_{BM}(1) &= \varphi_{jk} \kappa_{B\varphi}(1) - \frac{B_{jh} l^2}{EJ_\omega} \kappa_{BB}(1) + \\ &+ \frac{B_{kj} l^2}{EJ_\omega} - \sum_{i=1}^n B_i \frac{l^2}{EJ_\omega} \kappa_{BB}(\bar{b}_i) + \sum_{i=1}^n M_{is} \frac{l^3}{EJ_\omega} \kappa_{BM}(\bar{b}_i) + \\ &+ m_s \frac{l^4}{\lambda_3^4 EJ_\omega} [\kappa_{B\varphi}(1-u_1) - \kappa_{B\varphi}(1-u_2)] \end{aligned} \right.$$

Określone z równań (3.1), (3.2) i (3.3) wielkości $\xi'(0)$, $\eta'(0)$, $\varphi'(0)$, $Q_y(0)$, $Q_x(0)$ i $M_s(0)$ pozwalają wyznaczyć przy użyciu równań (1.25) i (1.27) oraz tabl. 1 i 2 amplitudy poszczególnych drgań w dowolnym przekroju pręta.

Dla drgań giętych w płaszczyźnie xz mamy:

$$(3.4) \quad \xi(z) = \tilde{\xi}(z) + \xi_{jk} \left(\alpha_1^2 \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta'}{\text{sh } \beta_1} + \beta_1^2 \frac{\sin \alpha_1 \zeta'}{\sin \alpha_1} \right) \frac{1}{2 \delta_1} + \\ + \xi_{kj} \left(\alpha_1^2 \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta}{\text{sh } \beta_1} + \beta_1^2 \frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\sin \alpha_1} \right) \frac{1}{2 \delta_1} + M_{yjk} \frac{l^2}{EJ_y 2 \delta_1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \zeta'}{\sin \alpha_1} - \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta'}{\text{sh } \beta_1} \right) + \\ + M_{ykj} \frac{l^2}{EJ_y 2 \delta_1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\sin \alpha_1} - \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta}{\text{sh } \beta_1} \right),$$

$$(3.5) \quad \xi'(z) = \tilde{\xi}'(z) - \frac{1}{l} \xi_{jk} \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \zeta'}{\alpha_1 \sin \alpha_1} + \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta'}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} \right) + \\ + \frac{1}{l} \xi_{kj} \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \zeta}{\alpha_1 \sin \alpha_1} + \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} \right) + M_{yjk} \frac{l}{EJ_y 2 \delta_1} \left(\alpha_1 \frac{\cos \alpha_1 \zeta'}{\sin \alpha_1} - \beta_1 \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta'}{\text{sh } \beta_1} \right) + \\ + M_{ykj} \frac{l}{EJ_y 2 \delta_1} \left(\alpha_1 \frac{\cos \alpha_1 \zeta}{\sin \alpha_1} - \beta_1 \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta}{\text{sh } \beta_1} \right),$$

$$(3.6) \quad M_y(z) = \tilde{M}_y(z) + \xi_{jk} \frac{EJ_y}{l^2} \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \zeta'}{\sin \alpha_1} - \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta'}{\text{sh } \beta_1} \right) + \\ + \xi_{kj} \frac{EJ_y}{l^2} \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\sin \alpha_1} - \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta}{\text{sh } \beta_1} \right) + M_{yjk} \left(\alpha_1^2 \frac{\sin \alpha_1 \zeta'}{\sin \alpha_1} + \beta_1^2 \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta'}{\text{sh } \beta_1} \right) + \\ + M_{ykj} \left(\alpha_1^2 \frac{\sin \alpha_1 \zeta}{\sin \alpha_1} + \beta_1^2 \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta}{\text{sh } \beta_1} \right),$$

$$(3.7) \quad Q_x(z) = \tilde{Q}_x(z) + \xi_{jk} \frac{EJ_y}{l^3} \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\alpha_1^2 \text{ch } \beta_1 \zeta'}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} - \frac{\beta_1^2 \cos \alpha_1 \zeta'}{\alpha_1 \sin \alpha_1} \right) + \\ + \xi_{kj} \frac{EJ_y}{l^3} \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\beta_1^2 \cos \alpha_1 \zeta}{\alpha_1 \sin \alpha_1} - \frac{\alpha_1^2 \text{ch } \beta_1 \zeta}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} \right) - M_{yjk} \frac{1 \cdot \lambda_1^4}{l \cdot 2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \zeta'}{\alpha_1 \sin \alpha_1} + \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta'}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} \right) + \\ + M_{ykj} \frac{1 \cdot \lambda_1^4}{l \cdot 2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \zeta}{\alpha_1 \sin \alpha_1} + \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} \right),$$

gdzie $\zeta' = 1 - \zeta$.

Dla drgań giętych w płaszczyźnie yz otrzymujemy:

$$(3.8) \quad \eta(z) = \tilde{\eta}(z) + \eta_{jk} \left(\alpha_2^2 \frac{\text{sh } \beta_2 \zeta'}{\text{sh } \beta_2} + \beta_2^2 \frac{\sin \alpha_2 \zeta'}{\sin \alpha_2} \right) \frac{1}{2 \delta_2} + \\ + \eta_{kj} \left(\alpha_2^2 \frac{\text{sh } \beta_2 \zeta}{\text{sh } \beta_2} + \beta_2^2 \frac{\sin \alpha_2 \zeta}{\sin \alpha_2} \right) \frac{1}{2 \delta_2} + M_{xjk} \frac{l^2}{EJ_x 2 \delta_2} \left(\frac{\sin \alpha_2 \zeta'}{\sin \alpha_2} - \frac{\text{sh } \beta_2 \zeta'}{\text{sh } \beta_2} \right) + \\ + M_{xkj} \frac{l^2}{EJ_x 2 \delta_2} \left(\frac{\sin \alpha_2 \zeta}{\sin \alpha_2} - \frac{\text{sh } \beta_2 \zeta}{\text{sh } \beta_2} \right),$$

$$(3.9) \quad \eta'(z) = \tilde{\eta}'(z) - \eta_{jk} \frac{1}{l} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \zeta'}{\alpha_2 \sin \alpha_2} + \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta'}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right) +$$

$$+ \eta_{kj} \frac{1}{l} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \zeta}{\alpha_2 \sin \alpha_2} + \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right) + M_{xjh} \frac{l}{EJ_x} \frac{1}{2\delta_2} \left(\alpha_2 \frac{\cos \alpha_2 \zeta'}{\sin \alpha_2} - \beta_2 \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_2} \right) +$$

$$+ M_{xkj} \frac{l}{EJ_x} \frac{1}{2\delta_2} \left(\alpha_2 \frac{\cos \alpha_2 \zeta}{\sin \alpha_2} - \beta_2 \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta}{\operatorname{sh} \beta_2} \right),$$

$$(3.10) \quad M_x(z) = \tilde{M}_x(z) + \eta_{jk} \frac{EJ_x}{l^2} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\sin \alpha_2 \zeta'}{\sin \alpha_2} - \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_2} \right) +$$

$$+ \eta_{kj} \frac{EJ_x}{l^2} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\sin \alpha_2 \zeta}{\sin \alpha_2} - \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \zeta}{\operatorname{sh} \beta_2} \right) + M_{xjh} \left(\alpha_2^2 \frac{\sin \alpha_2 \zeta'}{\sin \alpha_2} + \beta_2^2 \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_2} \right) +$$

$$+ M_{xkj} \left(\alpha_2^2 \frac{\sin \alpha_2 \zeta}{\sin \alpha_2} - \beta_2^2 \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \zeta}{\operatorname{sh} \beta_2} \right),$$

$$(3.11) \quad Q_y(z) = \tilde{Q}_y(z) + \eta_{jk} \frac{EJ_x}{2\delta_2} \frac{\lambda_2^4}{\beta_2} \left(\frac{\alpha_2^2 \operatorname{ch} \beta_2 \zeta'}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} - \frac{\beta_2^2 \cos \alpha_2 \zeta'}{\alpha_2 \sin \alpha_2} \right) +$$

$$+ \eta_{kj} \frac{EJ_x}{l^3} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\beta_2^2 \cos \alpha_2 \zeta}{\alpha_2 \sin \alpha_2} - \frac{\alpha_2^2 \operatorname{ch} \beta_2 \zeta}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right) - M_{xjh} \frac{1}{l} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \zeta'}{\alpha_2 \sin \alpha_2} + \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta'}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right) +$$

$$+ M_{xkj} \frac{1}{l} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \zeta}{\alpha_2 \sin \alpha_2} + \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right).$$

Dla drgań skrętnych otrzymujemy:

$$(3.12) \quad \varphi(z) = \tilde{\varphi}(z) + \varphi_{jk} \left(\alpha_3^2 \frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_3} + \beta_3^2 \frac{\sin \alpha_3 \zeta'}{\sin \alpha_3} \right) \frac{1}{2\delta_3} +$$

$$+ \varphi_{kj} \left(\alpha_3^2 \frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\operatorname{sh} \beta_3} + \beta_3^2 \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\sin \alpha_3} \right) \frac{1}{2\delta_3} + B_{jh} \frac{l^2}{EJ_\omega} \frac{1}{2\delta_3} \left(\frac{\sin \alpha_3 \zeta'}{\sin \alpha_3} - \frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_3} \right) +$$

$$+ B_{kj} \frac{l^2}{EJ_\omega} \frac{1}{2\delta_3} \left(\frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\sin \alpha_3} - \frac{\operatorname{sh} \beta_3 \zeta}{\operatorname{sh} \beta_3} \right),$$

$$(3.13) \quad \varphi'(z) = \tilde{\varphi}'(z) - \varphi_{jk} \frac{1}{l} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\cos \alpha_3 \zeta'}{\alpha_3 \sin \alpha_3} + \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \zeta'}{\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3} \right) +$$

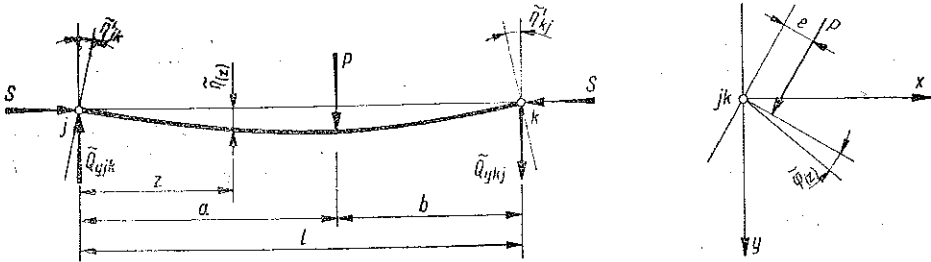
$$+ \varphi_{kj} \frac{1}{l} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\cos \alpha_3 \zeta}{\alpha_3 \sin \alpha_3} + \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \zeta}{\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3} \right) + B_{jh} \frac{l}{EJ_\omega} \frac{1}{2\delta_3} \left(\alpha_3 \frac{\cos \alpha_3 \zeta'}{\sin \alpha_3} - \beta_3 \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_3} \right) +$$

$$+ B_{kj} \frac{l}{EJ_\omega} \frac{1}{2\delta_3} \left(\alpha_3 \frac{\cos \alpha_3 \zeta}{\sin \alpha_3} - \beta_3 \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \zeta}{\operatorname{sh} \beta_3} \right),$$

$$(3.14) \quad B(z) = \tilde{B}(z) + \varphi_{jk} \frac{EJ_\omega}{l^2} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\sin \alpha_3 \zeta'}{\sin \alpha_3} - \frac{\text{sh } \beta_3 \zeta'}{\text{sh } \beta_3} \right) + \\ + \varphi_{kj} \frac{EJ_\omega}{l^2} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\sin \alpha_3} - \frac{\text{sh } \beta_3 \zeta}{\text{sh } \beta_3} \right) + B_{jk} \left(\alpha_3^2 \frac{\sin \alpha_3 \zeta'}{\sin \alpha_3} + \beta_3^2 \frac{\text{sh } \beta_3 \zeta'}{\text{sh } \beta_3} \right) + \\ + B_{kj} \left(\alpha_3^2 \frac{\sin \alpha_3 \zeta}{\sin \alpha_3} - \beta_3^2 \frac{\text{sh } \beta_3 \zeta}{\text{sh } \beta_3} \right),$$

$$(3.15) \quad M_\omega(z) = \tilde{M}_\omega(z) + \varphi_{jk} \frac{EJ_\omega}{l^3} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\alpha_3^2}{\beta_3} \frac{\text{ch } \beta_3 \zeta'}{\text{sh } \beta_3} - \frac{\beta_3^2}{\alpha_3} \frac{\cos \alpha_3 \zeta'}{\sin \alpha_3} \right) + \\ + \varphi_{kj} \frac{EJ_\omega}{l^3} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\beta_3^2}{\alpha_3} \frac{\cos \alpha_3 \zeta}{\sin \alpha_3} - \frac{\alpha_3^2}{\beta_3} \frac{\text{ch } \beta_3 \zeta}{\text{sh } \beta_3} \right) - B_{jk} \frac{1}{l} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\cos \alpha_3 \zeta'}{\alpha_3 \sin \alpha_3} + \frac{\text{ch } \beta_3 \zeta'}{\beta_3 \text{sh } \beta_3} \right) + \\ + B_{kj} \frac{1}{l} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\cos \alpha_3 \zeta}{\alpha_3 \sin \alpha_3} + \frac{\text{ch } \beta_3 \zeta}{\beta_3 \text{sh } \beta_3} \right).$$

We wszystkich wzorach począwszy od (3.4) do (3.15) wielkości oznaczone wężykiem u góry wyrażają działanie obciążeń lokalnych, pozostałe wyrazy przedstawiają wpływ warunków brzegowych.



Rys. 4

W przypadku działania siły skupionej $\bar{P} = P \sin(pt + \epsilon)$ w punkcie $z = a$ przy mimośrodku e , której składowe wynoszą $\bar{P}_x = P_1 \sin(pt + \epsilon)$ i $\bar{P}_y = P_2 \sin(pt + \epsilon)$ oraz pochodzącego od niej momentu skręcającego $\bar{M}_s = M \sin(pt + \epsilon)$, gdzie $M = Pe$, mamy w przedziale po lewej stronie siły \bar{P} :

ugięcie oraz kąt obrotu

$$(3.16) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}(z) = \frac{P_1 l^3}{EJ_y} \frac{1}{2\delta_1 \alpha_1 \beta_1} \left(\beta_1 \frac{\sin \alpha_1 \bar{b}}{\sin \alpha_1} \sin \alpha_1 \zeta - \alpha_1 \frac{\text{sh } \beta_1 \bar{b}}{\text{sh } \beta_1} \text{sh } \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{\eta}(z) = \frac{P_2 l^3}{EJ_x} \frac{1}{2\delta_2 \alpha_2 \beta_2} \left(\beta_2 \frac{\sin \alpha_2 \bar{b}}{\sin \alpha_2} \sin \alpha_2 \zeta - \alpha_2 \frac{\text{sh } \beta_2 \bar{b}}{\text{sh } \beta_2} \text{sh } \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{\psi}(z) = \frac{M_s l^3}{EJ_\omega} \frac{1}{2\delta_3 \alpha_3 \beta_3} \left(\beta_3 \frac{\sin \alpha_3 \bar{b}}{\sin \alpha_3} \sin \alpha_3 \zeta - \alpha_3 \frac{\text{sh } \beta_3 \bar{b}}{\text{sh } \beta_3} \text{sh } \beta_3 \zeta \right); \end{cases}$$

kąty ugięcia oraz spaczenie jednostkowe

$$(3.17) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}'(z) = \frac{P_1 l^2}{EJ_y} \frac{1}{2 \delta_1} \left(\frac{\sin a_1 \bar{b}}{\sin a_1} \cos a_1 \zeta - \frac{\text{sh } \beta_1 \bar{b}}{\text{sh } \beta_1} \text{ch } \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{\eta}'(z) = \frac{P_2 l^2}{EJ_x} \frac{1}{2 \delta_2} \left(\frac{\sin a_2 \bar{b}}{\sin a_2} \cos a_2 \zeta - \frac{\text{sh } \beta_2 \bar{b}}{\text{sh } \beta_2} \text{ch } \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{\varphi}'(z) = \frac{M_s l^2}{EJ_\omega} \frac{1}{2 \delta_3} \left(\frac{\sin a_3 \bar{b}}{\sin a_3} \cos a_3 \zeta - \frac{\text{sh } \beta_3 \bar{b}}{\text{sh } \beta_3} \text{ch } \beta_3 \zeta \right); \end{cases}$$

momenty i bimoment

$$(3.18) \quad \begin{cases} \tilde{M}_y(z) = \frac{P_1 l}{2 \delta_1} \left(a_1 \frac{\sin a_1 \bar{b}}{\sin a_1} \sin a_1 \zeta + \beta_1 \frac{\text{sh } \beta_1 \bar{b}}{\text{sh } \beta_1} \text{sh } \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{M}_x(z) = \frac{P_2 l}{2 \delta_2} \left(a_2 \frac{\sin a_2 \bar{b}}{\sin a_2} \sin a_2 \zeta + \beta_2 \frac{\text{sh } \beta_2 \bar{b}}{\text{sh } \beta_2} \text{sh } \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{B}(z) = \frac{M_s l}{2 \delta_3} \left(a_3 \frac{\sin a_3 \bar{b}}{\sin a_3} \sin a_3 \zeta + \beta_3 \frac{\text{sh } \beta_3 \bar{b}}{\text{sh } \beta_3} \text{sh } \beta_3 \zeta \right); \end{cases}$$

siły poprzeczne i giętno-skrętny moment

$$(3.19) \quad \begin{cases} \tilde{Q}_x(z) = \frac{P_1}{2 \delta_1} \left(\beta_1^2 \frac{\sin a_1 \bar{b}}{\sin a_1} \cos a_1 \zeta + a_1^2 \frac{\text{sh } \beta_1 \bar{b}}{\text{sh } \beta_1} \text{ch } \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{Q}_y(z) = \frac{P_2}{2 \delta_2} \left(\beta_2^2 \frac{\sin a_2 \bar{b}}{\sin a_2} \cos a_2 \zeta + a_2^2 \frac{\text{sh } \beta_2 \bar{b}}{\text{sh } \beta_2} \text{ch } \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{M}_\omega(z) = \frac{M_s}{2 \delta_3} \left(\beta_3^2 \frac{\sin a_3 \bar{b}}{\sin a_3} \cos a_3 \zeta + a_3^2 \frac{\text{sh } \beta_3 \bar{b}}{\text{sh } \beta_3} \text{ch } \beta_3 \zeta \right), \end{cases}$$

gdzie $\bar{b} = 1 - a/l$.

Dla przypadku pręta obciążonego siłą P w odległości z_i mamy

$$\bar{b} = 1 - \frac{z_i}{l} = 1 - \zeta_i = \zeta'_i.$$

W celu otrzymania wzorów dla odpowiednich amplitud po prawej stronie siły P , należy we wzorach (3.16)-(3.19) wstawić zamiast \bar{b} wielkość \bar{a} , zamiast ζ różnicę $1 - \zeta = \zeta'$ oraz zmienić znak przy ξ' , η' , φ' , Q_x , Q_y i M_ω . Podobnie gdy siła znajduje się w odległości z_i , $\bar{a} = \zeta_i$.

W przypadku działania siły P w środku rozpiętości pręta $\zeta = \bar{b} = 1/2$ otrzymujemy wzory:

$$(3.20) \quad \begin{cases} \tilde{\xi} \frac{l}{2} = \frac{P_1 l^3}{EJ_y} \frac{1}{4 \delta_1 a_1 \beta_1} \left(\beta_1 \text{tg } \frac{a_1}{2} - a_1 \text{tgh } \frac{\beta_1}{2} \right), \\ \tilde{\eta} \frac{l}{2} = \frac{P_2 l^3}{EJ_x} \frac{1}{4 \delta_2 a_2 \beta_2} \left(\beta_2 \text{tg } \frac{a_2}{2} - a_2 \text{tgh } \frac{\beta_2}{2} \right), \\ \tilde{\varphi} \frac{l}{2} = \frac{M_s l^3}{EJ_\omega} \frac{1}{4 \delta_3 a_3 \beta_3} \left(\beta_3 \text{tg } \frac{a_3}{2} - a_3 \text{tgh } \frac{\beta_3}{2} \right); \end{cases}$$

na kąty ugięcia i skręcenia

$$(3.21) \quad \tilde{\xi}_{(l/2)} = 0, \quad \tilde{\eta}_{(l/2)} = 0, \quad \tilde{\varphi}_{(l/2)} = 0;$$

na momenty i bimoment

$$(3.22) \quad \begin{cases} \tilde{M}_y \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{P_1 l}{4 \delta_1} \left(\alpha_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} + \beta_1 \operatorname{tgh} \frac{\beta_1}{2} \right), \\ \tilde{M}_x \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{P_2 l}{4 \delta_2} \left(\alpha_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} + \beta_2 \operatorname{tgh} \frac{\beta_2}{2} \right), \\ \tilde{B} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{M_s l}{4 \delta_3} \left(\alpha_3 \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} + \beta_3 \operatorname{tgh} \frac{\beta_3}{2} \right); \end{cases}$$

na siły poprzeczne i giętno-skrętny moment

$$(3.23) \quad \tilde{Q}_x \left(\frac{l}{2} \right) = \pm \frac{P_1}{2 \delta_1}, \quad \tilde{Q}_y \left(\frac{l}{2} \right) = \pm \frac{P_2}{2 \delta_2}, \quad \tilde{M}_\omega \left(\frac{l}{2} \right) = \pm \frac{M_s}{2 \delta_3}.$$

Jeżeli na pręt działa moment gnący $\bar{M} = M \sin(pt + \epsilon)$ przyłożony w przekroju $z = a$ przy mimośrodku e , wówczas dla $0 \leq z \leq a$ otrzymamy

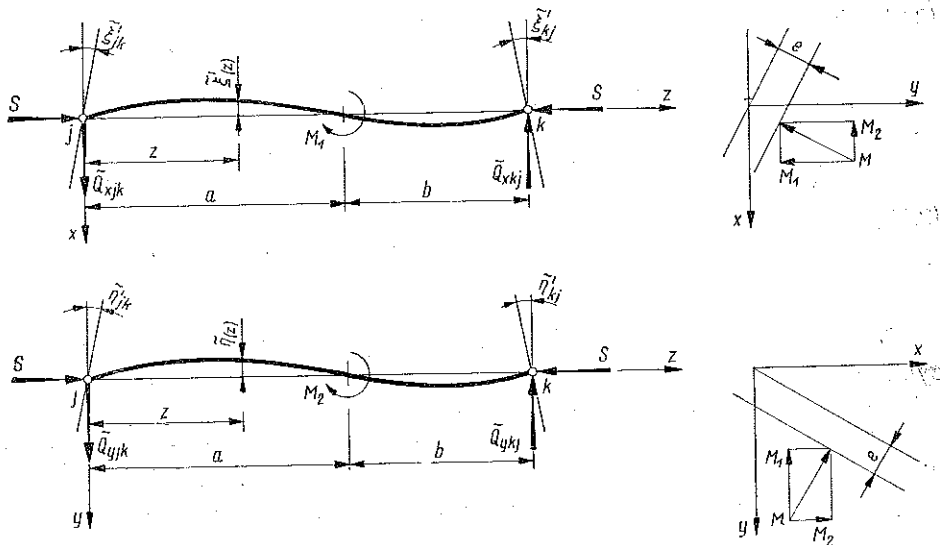
$$(3.24) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}(z) = -\frac{M_1 l^2}{EJ_y} \frac{1}{2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \bar{b}}{\sin \alpha_1} \sin \alpha_1 \zeta - \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_1} \operatorname{sh} \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{\eta}(z) = -\frac{M_2 l^2}{EJ_x} \frac{1}{2 \delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \bar{b}}{\sin \alpha_2} \sin \alpha_2 \zeta - \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_2} \operatorname{sh} \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{\varphi}(z) = -\frac{Bl^2}{EJ_\omega} \frac{1}{2 \delta_3} \left(\frac{\cos \alpha_3 \bar{b}}{\sin \alpha_3} \sin \alpha_3 \zeta - \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_3} \operatorname{sh} \beta_3 \zeta \right); \end{cases}$$

$$(3.25) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}'(z) = -\frac{M_1 l}{EJ_y} \frac{1}{2 \delta_1} \left(\alpha_1 \frac{\cos \alpha_1 \bar{b}}{\sin \alpha_1} \cos \alpha_1 \zeta - \beta_1 \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_1} \operatorname{ch} \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{\eta}'(z) = -\frac{M_2 l}{EJ_x} \frac{1}{2 \delta_2} \left(\alpha_2 \frac{\cos \alpha_2 \bar{b}}{\sin \alpha_2} \cos \alpha_2 \zeta - \beta_2 \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_2} \operatorname{ch} \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{\varphi}'(z) = -\frac{Bl}{EJ_\omega} \frac{1}{2 \delta_3} \left(\alpha_3 \frac{\cos \alpha_3 \bar{b}}{\sin \alpha_3} \cos \alpha_3 \zeta - \beta_3 \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_3} \operatorname{ch} \beta_3 \zeta \right); \end{cases}$$

$$(3.26) \quad \begin{cases} \tilde{M}_y(z) = -\frac{M_1}{2 \delta_1} \left(\alpha_1^2 \frac{\cos \alpha_1 \bar{b}}{\sin \alpha_1} \sin \alpha_1 \zeta + \beta_1^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_1} \operatorname{sh} \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{M}_x(z) = -\frac{M_2}{2 \delta_2} \left(\alpha_2^2 \frac{\cos \alpha_2 \bar{b}}{\sin \alpha_2} \sin \alpha_2 \zeta + \beta_2^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_2} \operatorname{sh} \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{B}(z) = -\frac{B}{2 \delta_3} \left(\alpha_3^2 \frac{\cos \alpha_3 \bar{b}}{\sin \alpha_3} \sin \alpha_3 \zeta + \beta_3^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \bar{b}}{\operatorname{sh} \beta_3} \operatorname{sh} \beta_3 \zeta \right), \end{cases}$$

$$(3.27) \quad \begin{cases} \tilde{Q}_x(z) = -\frac{M_1}{l} \frac{\lambda_1^4}{2\delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \bar{b}}{\alpha_1 \sin \alpha_1} \cos \alpha_1 \zeta + \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \bar{b}}{\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1} \operatorname{ch} \beta_1 \zeta \right), \\ \tilde{Q}_y(z) = -\frac{M_2}{l} \frac{\lambda_2^4}{2\delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \bar{b}}{\alpha_2 \sin \alpha_2} \cos \alpha_2 \zeta + \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \bar{b}}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \operatorname{ch} \beta_2 \zeta \right), \\ \tilde{M}_\omega(z) = -\frac{B}{l} \frac{\lambda_3^4}{2\delta_3} \left(\frac{\cos \alpha_3 \bar{b}}{\alpha_3 \sin \alpha_3} \cos \alpha_3 \zeta + \frac{\operatorname{ch} \beta_3 \bar{b}}{\beta_3 \operatorname{sh} \beta_3} \operatorname{ch} \beta_3 \zeta \right), \end{cases}$$

przy czym $B = Me$.



Rys. 5

W przypadku konieczności obliczenia powyższych wielkości na odcinku $\bar{a} \leq \zeta \leq 1$ postąpimy podobnie jak poprzednio podstawiając zamiast \bar{b} wielkość \bar{a} , a zamiast ζ wielkość $\zeta' = 1 - \zeta$ i zmieniając jednocześnie znaki przy $\xi'(z)$, $\eta'(z)$ i $\varphi'(z)$ oraz $Q_x(z)$, $Q_y(z)$, i $M_\omega(z)$.

Jeżeli na pręt działa obciążenie równomiernie rozłożone wzdłuż całej rozpiętości pręta, wówczas

$$(3.28) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}(z) = \frac{p_x l^4}{EJ_y} \frac{1}{2\delta_1 \lambda_1^4} \left(\beta_1^3 \frac{\sin \alpha_1 \zeta + \sin \alpha_1 \zeta' - \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1} + \alpha_1^3 \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \zeta + \operatorname{sh} \beta_1 \zeta' - \operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{sh} \beta_1} \right), \\ \tilde{\eta}(z) = \frac{p_y l^4}{EJ_x} \frac{1}{2\delta_2 \lambda_2^4} \left(\beta_2^3 \frac{\sin \alpha_2 \zeta + \sin \alpha_2 \zeta' - \sin \alpha_2}{\sin \alpha_2} - \alpha_2^3 \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \zeta + \operatorname{sh} \beta_2 \zeta' - \operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{sh} \beta_2} \right). \end{cases}$$

W przypadku obciążenia posiadającego pewien mimośród moglibyśmy w sposób analogiczny napisać wzory na $\tilde{\varphi}(z)$:

$$(3.29) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}'(z) = \frac{p_x l^3}{EJ_y} \frac{1}{2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \zeta - \cos \alpha_1 \zeta'}{\alpha_1 \sin \alpha_1} - \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \zeta - \operatorname{ch} \beta_1 \zeta'}{\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1} \right), \\ \tilde{\eta}'(z) = \frac{p_y l^3}{EJ_x} \frac{1}{2 \delta_2} \left(\frac{\cos \alpha_2 \zeta - \cos \alpha_2 \zeta'}{\alpha_2 \sin \alpha_2} - \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta - \operatorname{ch} \beta_2 \zeta'}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right); \end{cases}$$

$$(3.30) \quad \begin{cases} \tilde{M}_y(z) = \frac{p_x l^2}{EJ_y} \left(\frac{\sin \alpha_1 \zeta + \sin \alpha_1 \zeta'}{\sin \alpha_1} - \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \zeta + \operatorname{sh} \beta_1 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_1} \right), \\ \tilde{M}_x(z) = \frac{p_y l^2}{EJ_x} \left(\frac{\sin \alpha_2 \zeta + \sin \alpha_2 \zeta'}{\sin \alpha_2} - \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \zeta + \operatorname{sh} \beta_2 \zeta'}{\operatorname{sh} \beta_2} \right); \end{cases}$$

$$(3.31) \quad \begin{cases} \tilde{Q}_x(z) = \frac{p_x l}{2 \delta_1} \left(\beta_1^2 \frac{\cos \alpha_1 \zeta - \cos \alpha_1 \zeta'}{\alpha_1 \sin \alpha_1} - \alpha_1^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \zeta - \operatorname{ch} \beta_1 \zeta'}{\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1} \right), \\ \tilde{Q}_y(z) = \frac{p_y l}{2 \delta_2} \left(\beta_2^2 \frac{\cos \alpha_2 \zeta - \cos \alpha_2 \zeta'}{\alpha_2 \sin \alpha_2} - \alpha_2^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \zeta - \operatorname{ch} \beta_2 \zeta'}{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2} \right). \end{cases}$$

W przypadku działania na belkę kilku skupionych sił, momentów gnących, skręcających lub bimomentów posiadających jednakową częstość i kąt fazy, można określić amplitudy stosując zasadę superpozycji.

Wielkości amplitud $\xi(z)$, $\xi'(z)$, M_x , Q_x itd. stają się nieskończenie wielkie dla wartości α będących pierwiastkami równania $\sin \alpha_i = 0$.

Wzory określające amplitudy kątów ugięcia, spaczenia jednostkowego, sił poprzecznych oraz momentów giętno-skrętnych na końcach podpartej belki przy obciążeniu jej według rys. 3 otrzymamy bezpośrednio ze wzorów (3.5), (3.9), (3.13), (3.7), (3.11) i (3.15), podstawiając $\zeta = 0$, a następnie $\zeta = 1$ przy jednoczesnym uwzględnieniu, że

$$\xi'(0) = \xi'_{jk}, \quad \eta'(0) = \eta'_{jk}, \quad \varphi'(0) = \varphi'_{jk}, \quad Q_x(0) = Q_{xjk}, \quad Q_y(0) = Q_{yjk}$$

$$\xi'(l) = \xi'_{kj}, \quad \eta'(l) = \eta'_{kj}, \quad \varphi'(l) = \varphi'_{kj}, \quad Q_x(l) = Q_{xkj}, \quad Q_y(l) = Q_{ykj}.$$

Postać powyższych amplitud po uporządkowaniu jest następująca:

$$(3.32) \quad \begin{cases} \xi'_{jk} = \tilde{\xi}'_{jk} + \frac{M_{yjk} l}{EJ_y} a_1(\lambda_1) + \frac{M_{xkj} l}{EJ_y} b_1(\lambda_1) - \frac{\xi_{jk}}{l} c_1(\lambda_1) + \frac{\xi_{kj}}{l} d_1(\lambda_1), \\ \eta'_{jk} = \tilde{\eta}'_{jk} + \frac{M_{xjk} l}{EJ_x} a_2(\lambda_2) + \frac{M_{ykj} l}{EJ_x} b_2(\lambda_2) - \frac{\eta_{jk}}{l} c_2(\lambda_2) + \frac{\eta_{kj}}{l} d_2(\lambda_2), \\ \varphi'_{jk} = \tilde{\varphi}'_{jk} + \frac{B_{jk} l}{EJ_\omega} a_3(\lambda_3) + \frac{B_{kj} l}{EJ_\omega} b_3(\lambda_3) - \frac{\varphi_{jk}}{l} c_3(\lambda_3) + \frac{\varphi_{kj}}{l} d_3(\lambda_3); \end{cases}$$

$$(3.33) \quad \begin{cases} Q_{xjk} = \tilde{Q}_{xjk} - \frac{M_{yjk}}{l} c_1(\lambda_1) + \frac{M_{yjk}}{l} d_1(\lambda_1) + \xi_{jk} \frac{EJ_y}{l} e_1(\lambda_1) + \xi_{kj} \frac{EJ_y}{l} f_1(\lambda_1), \\ Q_{yjk} = \tilde{Q}_{yjk} - \frac{M_{xjk}}{l} c_2(\lambda_2) + \frac{M_{xkj}}{l} d_2(\lambda_2) + \eta_{jk} \frac{EJ_x}{l} e_2(\lambda_2) + \eta_{kj} \frac{EJ_x}{l} f_2(\lambda_2), \\ M_{\omega jk} = \tilde{M}_{\omega jk} - \frac{B_{jk}}{l} c_3(\lambda_3) + \frac{B_{kj}}{l} d_3(\lambda_3) + \varphi_{jk} \frac{EJ_\omega}{l^3} e_3(\lambda_3) + \varphi_{kj} \frac{EJ_\omega}{l} f_3(\lambda_3), \end{cases}$$

gdzie

$$(3.34) \quad \begin{cases} a_1(\lambda_1) = \frac{1}{2\delta_1} (a_1 \operatorname{ctg} a_1 - \beta_1 \operatorname{ctgh} \beta_1), \\ a_2(\lambda_2) = \frac{1}{2\delta_2} (a_2 \operatorname{ctg} a_2 - \beta_2 \operatorname{ctgh} \beta_2), \\ a_3(\lambda_3) = \frac{1}{2\delta_3} (a_3 \operatorname{ctg} a_3 - \beta_3 \operatorname{ctgh} \beta_3), \\ b_1(\lambda_1) = \frac{1}{2\delta_1} \left(\frac{a_1}{\sin a_1} - \frac{\beta_1}{\operatorname{sh} \beta_1} \right), \\ c_1(\lambda_1) = \frac{\lambda_1^4}{2\delta_1} \left(\frac{1}{a_1} \operatorname{ctg} a_1 + \frac{1}{\beta_1} \operatorname{ctgh} \beta_1 \right), \\ d_1(\lambda_1) = \frac{\lambda_1^4}{2\delta_1} \left(\frac{1}{a_1 \sin a_1} - \frac{1}{\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1} \right), \\ e_1(\lambda_1) = \frac{\lambda_1^4}{2\delta_1} \left(\frac{a_1^2}{\beta_1} \operatorname{ctgh} \beta_1 - \frac{\beta_1^2}{a_1} \operatorname{ctg} a_1 \right), \\ f_1(\lambda_1) = \frac{\lambda_1^4}{2\delta_1} \left(\frac{\beta_1^2}{a_1 \sin a_1} - \frac{a_1^2}{\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1} \right). \end{cases}$$

Wielkości $b_2, b_3, c_2, c_3, d_2, d_3, e_2, e_3, f_2$ i f_3 znajduje się w sposób oczywisty.

We wzorach (3.32) i (3.33) oznaczono wężykami amplitudy kątów, sił poprzecznych i momentu giętno-skrętnego na końcach j i k przegubowo opartej belki j - k , wywołanych działaniem zewnętrznych obciążeń lokalnych. Wzory te mają następującą postać:

$$(3.35) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{ix} l^2}{EJ_y} \Phi_{1P}(\lambda_1 \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \frac{M_{iy} l}{EJ_y} \Phi_{1M}(\lambda_1 \zeta_i) + \frac{p_x l^3}{EJ_y} \Phi_{1P}(\lambda_1), \\ \tilde{\eta}_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{iy} l^2}{EJ_x} \Phi_{2P}(\lambda_2 \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \frac{M_{ix} l}{EJ_x} \Phi_{2M}(\lambda_2 \zeta_i) + \frac{p_y l^3}{EJ_x} \Phi_{2P}(\lambda_2), \\ \tilde{\varphi}_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{is} l^2}{EJ_\omega} \Phi_{3P}(\lambda_3 \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \frac{B_i l}{EJ_\omega} \Phi_{3M}(\lambda_3 \zeta_i) + \frac{m_s l^4}{EJ_\omega} \Phi_{3P}(\lambda_3); \end{cases}$$

$$(3.36) \quad \begin{cases} \tilde{\xi}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{ix} l^2}{EJ_y} \Phi_{1P}(\lambda_1 \zeta_i) + \sum_{i=1}^n \frac{M_{iy} l}{EJ_y} \Phi_{1M}(\lambda_1 \zeta_i) + \frac{p_x l^3}{EJ_y} \Phi_{1P}(\lambda_1), \\ \tilde{\eta}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{iy} l^2}{EJ_x} \Phi_{2P}(\lambda_2 \zeta_i) + \sum_{i=1}^n \frac{M_{ix} l}{EJ_x} \Phi_{2M}(\lambda_2 \zeta_i) + \frac{p_y l^3}{EJ_x} \Phi_{2P}(\lambda_2), \\ \tilde{\varphi}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{is} l^2}{EJ_\omega} \Phi_{3P}(\lambda_3 \zeta_i) + \sum_{i=1}^n \frac{B_i l}{EJ_\omega} \Phi_{3M}(\lambda_3 \zeta_i) + \frac{m_s l^4}{EJ_\omega} \Phi_{3P}(\lambda_3), \end{cases}$$

$$\tilde{Q}_{xjk} = \sum_{i=1}^n P_{ix} \Psi_{1P}(\lambda_1 \zeta_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{iy} \Psi_{1M}(\lambda_1 \zeta_i) + p_x l \Psi_{1P}(\lambda_1),$$

$$\tilde{Q}_{yjk} = \sum_{i=1}^n P_{iy} \Psi_{2P}(\lambda_2 \zeta_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{ix} \Psi_{2M}(\lambda_2 \zeta_i) + p_y l \Psi_{2P}(\lambda_2),$$

$$\tilde{M}_{\omega jk} = \sum_{i=1}^n M_{is} \Psi_{3P}(\lambda_3 \zeta_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n B_i \Psi_{3M}(\lambda_3 \zeta_i) + m_s l \Psi_{3P}(\lambda_3),$$

$$\tilde{Q}_{xkj} = - \sum_{i=1}^n P_{ix} \Psi_{1P}(\lambda_1 \zeta_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{iy} \Psi_{1M}(\lambda_1 \zeta_i) - p_x l \Psi_{1P}(\lambda_1),$$

$$\tilde{Q}_{ykj} = - \sum_{i=1}^n P_{iy} \Psi_{2P}(\lambda_2 \zeta_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{ix} \Psi_{2M}(\lambda_2 \zeta_i) - p_y l \Psi_{2P}(\lambda_2),$$

$$\tilde{M}_{\omega kj} = - \sum_{i=1}^n M_{is} \Psi_{3P}(\lambda_3 \zeta_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n B_i \Psi_{3M}(\lambda_3 \zeta_i) - m_s l \Psi_{3P}(\lambda_3).$$

W powyższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia:

$$\Phi_{1P}(\lambda_1 \zeta_i) = \frac{1}{2 \delta_1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \zeta_i}{\sin \alpha_1} - \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta_i'}{\text{sh } \beta_1} \right),$$

$$\Psi_{1P}(\lambda_1 \zeta_i) = \frac{1}{2 \delta_1} \left(\beta_1^2 \frac{\sin \alpha_1 \zeta_i}{\sin \alpha_1} + \alpha_1^2 \frac{\text{sh } \beta_1 \zeta_i'}{\text{sh } \beta_1} \right),$$

$$\Phi_{1M}(\lambda_1 \zeta_i) = \frac{1}{2 \delta_1} \left(\alpha_1 \frac{\cos \alpha_1 \zeta_i}{\sin \alpha_1} - \beta_1 \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta_i'}{\text{sh } \beta_1} \right),$$

$$\Psi_{1M}(\lambda_1 \zeta_i) = \frac{\lambda_1^4}{2 \delta_1} \left(\frac{\cos \alpha_1 \zeta_i}{\alpha_1 \sin \alpha_1} + \frac{\text{ch } \beta_1 \zeta_i'}{\beta_1 \text{sh } \beta_1} \right),$$

$$\Phi_{1P}(\lambda_1) = \frac{1}{2 \delta_1} \left(\frac{\text{tg } \frac{\alpha_1}{2}}{\alpha_1} - \frac{\text{tgh } \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right),$$

$$\Psi_{1P}(\lambda_1) = \frac{1}{2 \delta_1} \left(\frac{\beta_1^2 \text{tg } \frac{\alpha_1}{2}}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1^2 \text{tgh } \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right).$$

We wzorach o numerach wyższych wystąpią odpowiednio $\delta_2, \delta_3, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ i β_3 , we wzorach odpowiadających wielkościom na końcu k zamiast ζ_i' wejdzie ξ_i .

4. Metoda odkształceń i jej zastosowanie do obliczania drgań układów z cienkościennych prętów otwartych

Przy obliczaniu bardziej złożonych zagadnień teorii stateczności i drgań układów ze zwykłych prętów, którymi są właśnie konstrukcje ramowe, najbardziej efektywną okazała się metoda odkształceń.

Metoda odkształceń w dynamice konstrukcji ramowych znajduje w ostatnim czasie wielu zwolenników. Zastosowanie tej metody do obliczeń drgań układów ramowych z cienkościennych prętów o otwartym profilu okazuje się, jak dalej zobaczymy, rzeczą bardzo celową.

Przechodząc do wyprowadzenia wzorów dla metody odkształceń przyjmijmy, że belka na obu końcach utwierdzona wykonuje drgania pod wpływem obciążeń lokalnych:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1x} &= P_{1x} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{P}_{2x} &= P_{2x} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{P}_{1y} &= P_{1y} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{P}_{2y} &= P_{2y} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_s &= M_s \sin(pt + \varepsilon), \end{aligned}$$

wywołując przemieszczenia punktów podparcia

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{jk} &= \xi_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\eta}_{jk} &= \eta_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\varphi}_{jk} &= \varphi_{jk} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{\xi}_{kj} &= \xi_{kj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\eta}_{kj} &= \eta_{kj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\varphi}_{kj} &= \varphi_{kj} \sin(pt + \varepsilon), \end{aligned}$$

kąty obrotów przekrojów końcowych oraz spaczenie jednostkowe

$$\begin{aligned} \bar{\xi}'_{jk} &= \xi'_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\eta}'_{jk} &= \eta'_{jk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\varphi}'_{jk} &= \varphi'_{jk} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{\xi}'_{kj} &= \xi'_{kj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\eta}'_{kj} &= \eta'_{kj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\varphi}'_{kj} &= \varphi'_{kj} \sin(pt + \varepsilon). \end{aligned}$$

Wielkości amplitud momentów podporowych i bimomentów pojawiających się w utwierdzonych przekrojach belki, jak również i sił poprzecznych oraz momentów giętno-skrętnych są następujące:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xjh} &= M_{xjh} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{yjh} &= M_{yjh} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B}_{jh} &= B_{jh} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{M}_{xhj} &= M_{xhj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{yhj} &= M_{yhj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B}_{hj} &= B_{hj} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{Q}_{xjk} &= Q_{xjk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{Q}_{yjk} &= Q_{yjk} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{\omega jk} &= M_{\omega jk} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{Q}_{xkj} &= Q_{xkj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{Q}_{ykj} &= Q_{ykj} \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_{\omega kj} &= M_{\omega kj} \sin(pt + \varepsilon). \end{aligned}$$

Określamy je w zależności od amplitud obciążeń lokalnych P_1, P_2, M_s , przemieszczeń punktów podparcia $\xi_{jk}, \eta_{jk}, \varphi_{jk}, \xi_{kj}, \eta_{kj}, \varphi_{kj}$ oraz kątów obrotu i spaczenia jednostkowego w utwierdzonych przekrojach $\xi'_{jk}, \eta'_{jk}, \varphi'_{jk}, \xi'_{kj}, \eta'_{kj}, \varphi'_{kj}$.

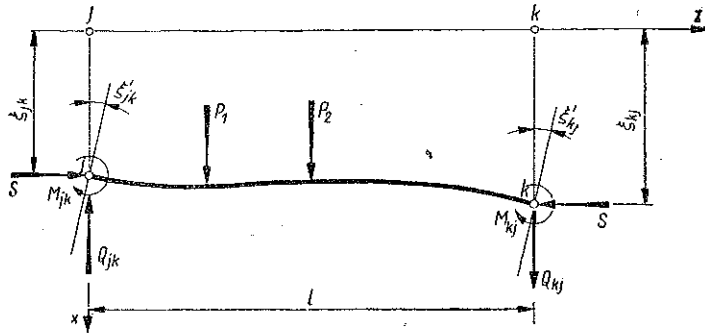
Dodatnie kierunki przemieszczeń oraz sił na końcach belki podane są na rys. 6.

Przyjmując we wzorach (1.25) i (1.27)

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \xi_{jk}, & \eta(0) &= \eta_{jk}, & \varphi(0) &= \varphi_{jk}, \\ \xi'(0) &= \xi'_{jk}, & \eta'(0) &= \eta'_{jk}, & \varphi'(0) &= \varphi'_{jk}, \\ M_x(0) &= M_{xjk}, & M_y(0) &= M_{yjk}, & B(0) &= B_{jk}, \\ Q_x(0) &= Q_{xjk}, & Q_y(0) &= Q_{yjk}, & M_\omega(0) &= M_{\omega jk} \end{aligned}$$

oraz czyniąc zadość warunkom na prawym końcu belki, tj. dla $z=l$ i przyjmując

$$\begin{aligned} \xi(l) &= \xi_{kj}, & \eta(l) &= \eta_{kj}, & \varphi(l) &= \varphi_{kj}, \\ \xi'(l) &= \xi'_{kj}, & \eta'(l) &= \eta'_{kj}, & \varphi'(l) &= \varphi'_{kj}, \end{aligned}$$



Rys. 6

otrzymamy odpowiednio po dwa równania:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \xi_{kj} = \xi_{jk} \alpha_{\xi\xi} + \xi'_{jk} l \alpha_{\xi\xi'} - \frac{M_{yjk} l^2}{EJ_y} \alpha_{\xi M} - \frac{Q_{xjk} l^3}{EJ_y} \alpha_{\xi Q} + |\xi_l|, \\ \xi'_{kj} = \xi_{jk} \frac{1}{l} \alpha_{\xi'\xi} + \xi'_{jk} \alpha_{\xi'\xi'} - \frac{M_{yjk} l}{EJ_y} \alpha_{\xi' M} - \frac{Q_{xjk} l^2}{EJ_y} \alpha_{\xi' Q} + |\xi'_l|; \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} \eta_{kj} = \eta_{jk} \alpha_{\eta\eta} + \eta'_{jk} l \alpha_{\eta\eta'} - \frac{M_{xjk} l^2}{EJ_x} \alpha_{\eta M} - \frac{Q_{yjk} l^3}{EJ_x} \alpha_{\eta Q} + |\eta_l|, \\ \eta'_{kj} = \eta_{jk} \frac{1}{l} \alpha_{\eta'\eta} + \eta'_{jk} \alpha_{\eta'\eta'} - \frac{M_{xjk} l}{EJ_x} \alpha_{\eta' M} - \frac{Q_{yjk} l^2}{EJ_x} \alpha_{\eta' Q} + |\eta'_l|; \end{cases}$$

$$(4.3) \quad \begin{cases} \varphi_{kj} = \varphi_{jk} \alpha_{\varphi\varphi} + \varphi'_{jk} l \alpha_{\varphi\varphi'} - \frac{B_{jk} l^2}{EJ_\omega} \alpha_{\varphi B} - \frac{M_{s/jk} l^3}{EJ_\omega} \alpha_{\varphi M} + |\varphi_l|, \\ \varphi'_{kj} = \varphi_{jk} \frac{1}{l} \alpha_{\varphi'\varphi} + \varphi'_{jk} \alpha_{\varphi'\varphi'} - \frac{B_{jk} l}{EJ_\omega} \alpha_{\varphi' B} - \frac{M_{s/jk} l^2}{EJ_\omega} \alpha_{\varphi' M} + |\varphi'_l|; \end{cases}$$

W powyższych równaniach $|\xi_i|$, $|\eta_i|$, $|\varphi_i|$ oraz $|\xi'_i|$, $|\eta'_i|$, $|\varphi'_i|$ odpowiadają wielkościom obciążeń lokalnych we wzorach (1.25) i (1.27):

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{aligned} |\xi_i| &= \frac{l^3}{EJ_y} \sum_{i=1}^n P_{ix} \kappa_{\xi Q}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l^3}{EJ_y} \sum_{i=1}^n M_{iy} \kappa_{\xi M}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^4}{EJ_y} \int_{u_i}^{u_2} p_x(u) \kappa_{\xi Q}(\zeta - u) du, \\ |\eta_i| &= \frac{l^3}{EJ_x} \sum_{i=1}^n P_{iy} \kappa_{\eta Q}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l^3}{EJ_x} \sum_{i=1}^n M_{ix} \kappa_{\eta M}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^4}{EJ_x} \int_{u_i}^{u_2} p_y(u) \kappa_{\eta Q}(\zeta - u) du, \\ |\varphi_i| &= \frac{l^3}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n M_{is} \kappa_{\varphi M}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l^3}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n B_i \kappa_{\varphi B}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^4}{EJ_\omega} \int_{u_i}^{u_2} m_s(u) \kappa_{\varphi M}(\zeta - u) du; \end{aligned} \right.$$

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{aligned} |\xi'_i| &= \frac{l^2}{EJ_y} \sum_{i=1}^n P_{ix} \kappa_{\xi' Q}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l}{EJ_y} \sum_{i=1}^n M_{iy} \kappa_{\xi' M}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^3}{EJ_y} \int_{u_i}^{u_2} p_x(u) \kappa_{\xi' Q}(\zeta - u) du, \\ |\eta'_i| &= \frac{l^2}{EJ_x} \sum_{i=1}^n P_{iy} \kappa_{\eta' Q}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l}{EJ_x} \sum_{i=1}^n M_{ix} \kappa_{\eta' M}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^3}{EJ_x} \int_{u_i}^{u_2} p_y(u) \kappa_{\eta' Q}(\zeta - u) du, \\ |\varphi'_i| &= \frac{l^2}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n M_{is} \kappa_{\varphi' M}(\zeta - \zeta_i) - \frac{l}{EJ_\omega} \sum_{i=1}^n B_i \kappa_{\varphi' B}(\zeta - \zeta_i) + \\ &\quad + \frac{l^3}{EJ_\omega} \int_{u_i}^{u_2} m_s(u) \kappa_{\varphi' M}(\zeta - u) du. \end{aligned} \right.$$

Kolejne układy po dwa równania określające przemieszczenia i kąty obrotu w odpowiedniej płaszczyźnie zginania oraz spłaszczenie przekroju poprzecznego na prawym końcu belki otrzymamy ze wzorów (1.25) i (1.27),

umieszczając układ współrzędnych na prawym końcu belki i uwzględniając, że

$$\begin{aligned}\xi(0) &= \xi_{kj}, & \xi'(0) &= \xi'_{kj}, & M_x(0) &= -M_{xkj}, & Q_x(0) &= Q_{xkj}, \\ \eta(0) &= \eta_{kj}, & \eta'(0) &= \eta'_{kj}, & M_y(0) &= -M_{ykj}, & Q_y(0) &= Q_{ykj}, \\ \varphi(0) &= \varphi_{kj}, & \varphi'(0) &= \varphi'_{kj}, & B(0) &= -B_{kj}, & M_\omega(0) &= M_{\omega kj}\end{aligned}$$

oraz spełniając warunki na lewym końcu belki $z = -l$

$$\begin{aligned}\xi(-l) &= \xi_{jk}, & \xi'(-l) &= \xi'_{jk}, \\ \eta(-l) &= \eta_{jk}, & \eta'(-l) &= \eta'_{jk}, \\ \varphi(-l) &= \varphi_{jk}, & \varphi'(-l) &= \varphi'_{jk}.\end{aligned}$$

Równania te otrzymują postać:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \xi_{jk} = \xi_{kj} \kappa_{\xi\xi} - \xi'_{kj} l \kappa_{\xi\xi'} + \frac{M_{ykj} l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi M} + \frac{Q_{xkj} l^3}{EJ_y} \kappa_{\xi Q} + |\xi_l|, \\ \xi'_{jk} = -\xi_{kj} \frac{1}{l} \kappa_{\xi'\xi} + \xi'_{kj} \kappa_{\xi'\xi'} - \frac{M_{ykj} l}{EJ_y} \kappa_{\xi' M} - \frac{Q_{xkj} l^2}{EJ_y} \kappa_{\xi' Q} + |\xi'_l|; \end{cases}$$

$$(4.7) \quad \begin{cases} \eta_{jk} = \eta_{kj} \kappa_{\eta\eta} - \eta'_{kj} l \kappa_{\eta\eta'} + \frac{M_{xkj} l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta M} + \frac{Q_{ykj} l^3}{EJ_x} \kappa_{\eta Q} + |\eta_l|, \\ \eta'_{jk} = -\eta_{kj} \frac{1}{l} \kappa_{\eta'\eta} + \eta'_{kj} \kappa_{\eta'\eta'} - \frac{M_{xkj} l}{EJ_x} \kappa_{\eta' M} - \frac{Q_{ykj} l^2}{EJ_x} \kappa_{\eta' Q} + |\eta'_l|; \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \begin{cases} \varphi_{jk} = \varphi_{kj} \kappa_{\varphi\varphi} - \varphi'_{kj} l \kappa_{\varphi\varphi'} + \frac{B_{kj} l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi B} + \frac{M_{\omega kj} l^3}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi M} + |\varphi_l|, \\ \varphi'_{jk} = -\varphi_{kj} \frac{1}{l} \kappa_{\varphi'\varphi} + \varphi'_{kj} \kappa_{\varphi'\varphi'} - \frac{B_{kj} l}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi' B} - \frac{M_{\omega kj} l^2}{EJ_\omega} \kappa_{\varphi' M} + |\varphi'_l|. \end{cases}$$

Rozwiązując równania (4.1), (4.2) i (4.3) względem M_{xjk} , Q_{xjk} , M_{yjk} , Q_{yjk} , B_{jk} , $M_{\omega jk}$ oraz równania (4.6), (4.7) i (4.8) względem M_{xkj} , Q_{xkj} , M_{ykj} , B_{kj} , $M_{\omega kj}$, Q_{ykj} z odpowiednim uwzględnieniem wielkości κ otrzymamy:

$$(4.9) \quad \begin{cases} M_{yjk} = M'_{yjk} + \frac{EJ_y}{l} \left(A_{xjk} \xi'_{jk} + B_{xjk} \xi'_{kj} + C_{xjk} \frac{\xi_{jk}}{l} - D_{xjk} \frac{\xi_{kj}}{l} \right), \\ M_{xjk} = M'_{xjk} + \frac{EJ_x}{l} \left(A_{yjk} \eta'_{jk} + B_{yjk} \eta'_{kj} + C_{yjk} \frac{\eta_{jk}}{l} - D_{yjk} \frac{\eta_{kj}}{l} \right), \\ B_{jk} = B'_{jk} + \frac{EJ_\omega}{l} \left(A_{jk} \varphi'_{jk} + B_{jk} \varphi'_{kj} + C_{jk} \frac{\varphi_{jk}}{l} - D_{jk} \frac{\varphi_{kj}}{l} \right); \end{cases}$$

$$(4.10) \quad \begin{cases} Q_{xjk} = Q'_{xjk} - \frac{EJ_y}{l^2} \left(C_{xjk} \xi'_{jk} + D_{xjk} \xi'_{kj} + G_{xjk} \frac{\xi_{jk}}{l} - H_{xjk} \frac{\xi_{kj}}{l} \right), \\ Q_{yjk} = Q'_{yjk} - \frac{EJ_x}{l^2} \left(C_{yjk} \eta'_{jk} + D_{yjk} \eta'_{kj} + G_{yjk} \frac{\xi_{jk}}{l} - H_{yjk} \frac{\xi_{kj}}{l} \right), \\ M_{\omega jk} = M'_{\omega jk} - \frac{EJ_{\omega}}{l^2} \left(C_{jk} \varphi'_{jk} + D_{jk} \varphi'_{kj} + G_{jk} \frac{\varphi_{jk}}{l} - H_{jk} \frac{\varphi_{kj}}{l} \right); \end{cases}$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} M_{yjk} = M'_{yjk} + \frac{EJ_y}{l} \left(A_{xkj} \xi'_{kj} + B_{xkj} \xi'_{jk} + D_{xkj} \frac{\xi_{jk}}{l} - C_{xkj} \frac{\xi_{kj}}{l} \right), \\ M_{xkj} = M'_{xkj} + \frac{EJ_x}{l} \left(A_{yjk} \eta'_{kj} + B_{yjk} \eta'_{jk} + D_{yjk} \frac{\eta_{jk}}{l} - C_{yjk} \frac{\eta_{kj}}{l} \right), \\ B_{kj} = B'_{kj} + \frac{EJ_{\omega}}{l} \left(A_{kj} \varphi'_{kj} + B_{kj} \varphi'_{jk} + D_{kj} \frac{\varphi_{jk}}{l} - C_{kj} \frac{\varphi_{kj}}{l} \right); \end{cases}$$

$$(4.12) \quad \begin{cases} Q_{xkj} = Q'_{xkj} - \frac{EJ_y}{l^2} \left(C_{xkj} \xi'_{kj} + D_{xkj} \xi'_{jk} - G_{xkj} \frac{\xi_{kj}}{l} + H_{xkj} \frac{\xi_{jk}}{l} \right), \\ Q_{ykj} = Q'_{ykj} - \frac{EJ_x}{l^2} \left(C_{yjk} \eta'_{kj} + D_{yjk} \eta'_{jk} - G_{yjk} \frac{\eta_{kj}}{l} + H_{yjk} \frac{\eta_{jk}}{l} \right), \\ M_{\omega kj} = M'_{\omega kj} - \frac{EJ_{\omega}}{l^2} \left(C_{kj} \varphi'_{kj} + D_{kj} \varphi'_{jk} - G_{kj} \frac{\varphi_{kj}}{l} + H_{kj} \frac{\varphi_{jk}}{l} \right). \end{cases}$$

Symbolami A, B, C, D, G i H z odpowiednimi znaczkami oznaczono współczynniki reakcji dynamicznych. Współczynniki te są funkcjami częstości drgań o następującej postaci:

$$(4.13) \quad \begin{cases} A_{xjk} = A_{xkj} = 2 \delta_1 \frac{\frac{1}{a_1} \sin a_1 \operatorname{ch} \beta_1 - \frac{1}{\beta_1} \cos a_1 \operatorname{sh} \beta_1}{2(1 - \cos a_1 \operatorname{ch} \beta_1) - \frac{a_1}{a_1 \beta_1} \sin a_1 \operatorname{sh} \beta_1}, \\ B_{xjk} = B_{xkj} = 2 \delta_1 \frac{\frac{1}{\beta_1} \operatorname{sh} \beta_1 - \frac{1}{a_1} \sin a_1}{2(1 - \cos a_1 \operatorname{ch} \beta_1) - \frac{a_1}{a_1 \beta_1} \sin a_1 \operatorname{sh} \beta_1}, \\ C_{xjk} = C_{xkj} = \frac{a_1(1 - \cos a_1 \operatorname{ch} \beta_1) + 2 a_1 \beta_1 \sin a_1 \operatorname{sh} \beta_1}{2(1 - \cos a_1 \operatorname{ch} \beta_1) - \frac{a_1}{a_1 \beta_1} \sin a_1 \operatorname{sh} \beta_1}, \\ D_{xjk} = D_{xkj} = 2 \delta_1 \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos a_1}{2(1 - \cos a_1 \operatorname{ch} \beta_1) - \frac{a_1}{a_1 \beta_1} \sin a_1 \operatorname{sh} \beta_1}, \\ G_{xjk} = G_{xkj} = 2 \delta_1 \frac{a_1 \sin a_1 \operatorname{ch} \beta_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \cos a_1}{2(1 - \cos a_1 \operatorname{ch} \beta_1) - \frac{a_1}{a_1 \beta_1} \sin a_1 \operatorname{sh} \beta_1}, \end{cases}$$

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{xjk} = H_{xkj} = 2 \delta_1 \frac{a_1 \sin \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1}{2(1 - \cos \alpha_1 \operatorname{ch} \beta_1) - \frac{a_1}{\alpha_1 \beta_1} \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \beta_1}, \\ C_{jk} = C_{kj} = \frac{a_3(1 - \cos \alpha_3 \operatorname{ch} \beta_3) + 2a_3 \beta_3 \sin \alpha_3 \operatorname{sh} \beta_3}{2(1 - \cos \alpha_3 \operatorname{ch} \beta_3) - \frac{a_3}{\alpha_3 \beta_3} \sin \alpha_3 \operatorname{sh} \beta_3} + \frac{GJ_s l^3}{EJ_\omega}. \end{array} \right.$$

Symbole A_{yjk} , B_{yjk} itd. mają tę samą postać z tą tylko różnicą, że zamiast wskaźnika 1 należy wszędzie wstawić wskaźnik 2.

Jeżeli chodzi o wielkości A_{jk} , B_{jk} , D_{jk} , G_{jk} , H_{jk} , to sprawa wygląda podobnie, należy tylko wszędzie wstawić wskaźnik 3. Pewną różnicę spotykamy w wyrazie C_{jk} , który podano powyżej.

Symbolami M'_{xjk} , M'_{xkj} , M'_{yjk} , M'_{yki} , Q'_{xkj} , ..., $M'_{\omega kj}$ oznaczono amplitudy momentów gnących, sił poprzecznych, momentów giętno-skrętnych powstałych wskutek działania obciążeń lokalnych w przekrojach utwierdzonych końców belki.

5. Drgania przestrzennych ram prostokątnych z elementów cienkościennych

Otrzymane w poprzednich paragrafach wzory na odkształcenia określające w końcowym etapie reakcje dynamiczne, przedstawione za pomocą współczynników wpływających na częstość drgań pręta, posłużą do dalszych rozważań. W praktyce jednak niektóre ze współczynników mają nieznaczny wpływ, tak że niekiedy mogą być pomijane. Wzory metody odkształceń pozostają jednak słuszne we wszystkich przypadkach. Reakcje dynamiczne mogą się różnić jedynie współczynnikami w nich zawartymi, co ma miejsce w zależności od rodzaju rozpatrywanych układów, sposobu podparć i obciążeń.

Przechodząc do obliczenia ram przestrzennych z elementów cienkościennych przyjmijmy układ współrzędnych x, y, z w węźle k , w którym spotyka się sześć cienkościennych prętów o symetrycznych przekrojach schodzących się pod prostymi kątami.

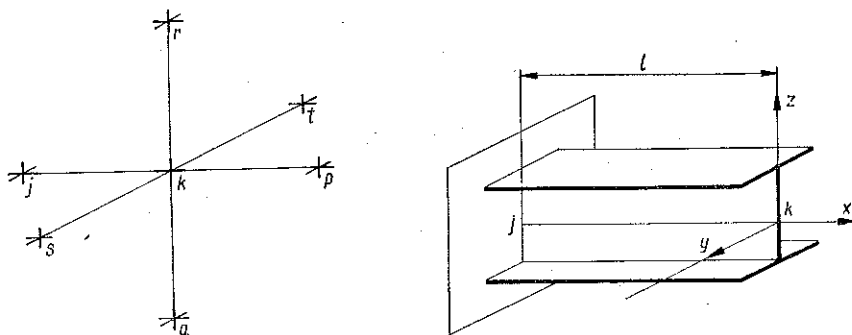
Pręty ułożone są w ten sposób, że główne osie bezwładności są osiami współrzędnych.

W przypadku harmonicznych drgań ramy z częstością p przemieszczenia węzła k w dowolnej chwili czasu t są określone dziewięcioma współrzędnymi — oczywiście jest to przypadek najogólniejszy, odpowiadający paczeniu się węzła.

Powyższe przemieszczenia mają następującą postać:

$$\begin{array}{lll} \bar{u}_k = u_k \sin(pt + \varepsilon), & \bar{v}_k = v_k \sin(pt + \varepsilon), & \bar{x}_{kx} = x_{kx} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{v}_k = v_k \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\varphi}_k = \varphi_k \sin(pt + \varepsilon), & \bar{x}_{ky} = x_{ky} \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{w}_k = w_k \sin(pt + \varepsilon), & \bar{\psi}_k = \psi_k \sin(pt + \varepsilon), & \bar{x}_{kz} = x_{kz} \sin(pt + \varepsilon). \end{array}$$

Pierwsze trzy współrzędne $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$ przedstawiają rzuty przemieszczeń węzła k na kierunki osi x, y, z , drugie $\bar{\vartheta}_k, \bar{\varphi}_k, \bar{\psi}$ kąty obrotu wokół poszczególnych osi x, y, z , trzecie — spaczenia końcowych przekrojów pręta w odpowiednich kierunkach. Przez u_k, v_k, w_k itd. oznaczono amplitudy tych przemieszczeń, które uważamy za dodatnie, jeżeli ich wektory mają dodatnie zwroty osi x, y, z .



Rys. 7

Jeżeli rama posiada n węzłów, to ogólna liczba przemieszczeń będzie $9n$. Dla ich określenia należy z warunków równowagi węzłów ramy opierając się na zasadzie d'Alemberta ułożyć $9n$ równań.

W istocie na węzeł ramy od każdego pręta działa siedem sił równych reakcjom uogólnionym, działającym od węzła na koniec każdego z prętów. Jeżeli nie będziemy uwzględniać tłumienia, jak już poprzednio podkreślaliśmy, pomiędzy siłami i przemieszczeniami kąt przesunięcia fazowego będzie równy zeru lub 180° . Wobec tego siły działające na węzeł będą zmieniać się harmonicznie. Ogólnie biorąc możemy napisać:

$$\begin{aligned} \bar{R}_x &= R_x \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_x &= M_x \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B}_x &= B_x \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{R}_y &= R_y \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_y &= M_y \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B}_y &= B_y \sin(pt + \varepsilon), \\ \bar{R}_z &= R_z \sin(pt + \varepsilon), & \bar{M}_z &= M_z \sin(pt + \varepsilon), & \bar{B}_z &= B_z \sin(pt + \varepsilon). \end{aligned}$$

Składając wszystkie siły od prętów działające w danej chwili na węzeł oraz uwzględniając siły bezwładności otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum R_{xkj} - m_k p^2 u_k &= 0, & \sum M_{xkj} - J_{xk} p^2 \vartheta_k &= 0, & \sum B_{xhj} - J_{xk} p^2 \kappa_{xk} &= 0, \\ \sum R_{ykj} - m_k p^2 v_k &= 0, & \sum M_{ykj} - J_{yk} p^2 \varphi_k &= 0, & \sum B_{yhj} - J_{yk} p^2 \kappa_{yh} &= 0, \\ \sum R_{zkj} - m_k p^2 w_k &= 0, & \sum M_{zkj} - J_{zk} p^2 \psi_k &= 0, & \sum B_{zhj} - J_{zk} p^2 \kappa_{zk} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie m_k oznacza masę skupioną w węźle k , J_{xk}, J_{yk}, J_{zk} są to momenty bezwładności tej masy względem osi x, y, z . Dziewięć analogicznych równań możemy napisać dla wszystkich n węzłów ramy.

Zależność pomiędzy przemieszczeniami i siłami, działającymi na końce prętów przylegających do węzła k można przedstawić za pomocą następujących wzorów (uwzględniając odpowiednie znaki):

dla pręta $k-j$

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{xkj} &= \frac{EA}{l} \nu (u_k \operatorname{ctg} \nu - u_j \operatorname{csc} \nu) \quad \text{albo} \quad S_{kj}, \\ R_{yhj} &= -\frac{EJ_z}{l^2} \left(C_y \varphi_k + D_y \varphi_j - G_y \frac{v_k}{l} + H_y \frac{v_j}{l} \right), \\ R_{zkh} &= \frac{EJ_y}{l^2} \left(C_z \varphi_k + D_z \varphi_j + G_z \frac{w_k}{l} - H_z \frac{w_j}{l} \right), \\ M_{xhj} &= -\frac{EJ_\omega}{l^2} \left(C \vartheta'_k + D \vartheta'_j - G \frac{\vartheta_k}{l} + H \frac{\vartheta_j}{l} \right) = M_{\omega jk}, \\ M_{ykh} &= \frac{EJ_y}{l} \left(A_z \varphi_k + B_z \varphi_j + C_z \frac{w_k}{l} - D_z \frac{w_j}{l} \right), \\ M_{zkh} &= \frac{EJ_z}{l} \left(A_y \varphi_k + B_y \varphi_j - C_y \frac{v_k}{l} + D_y \frac{v_j}{l} \right), \\ B_{xhj} &= -\frac{EJ_\omega}{l} \left(A \vartheta'_k + B \vartheta'_j - C \frac{\vartheta_k}{l} + D \frac{\vartheta_j}{l} \right) \end{aligned} \right.$$

(wzory dla R_{xkj} , jako dobrze znane z teorii drgań podłużnych pręta, [5], zostały napisane bez wyprowadzeń);

dla pręta $k-p$

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{xkp} &= \frac{EA}{l} \nu (u_k \operatorname{ctg} \nu - u_p \operatorname{csc} \nu) \quad \text{albo} \quad -S_{kp}, \\ R_{ykp} &= \frac{EJ_z}{l^2} \left(C_y \varphi_k + D_y \varphi_p + G_y \frac{v_k}{l} - H_y \frac{v_p}{l} \right), \\ R_{zhp} &= -\frac{EJ_y}{l^2} \left(C_z \varphi_k + D_z \varphi_p - G_z \frac{w_k}{l} + H_z \frac{w_p}{l} \right), \\ M_{xkp} &= M_{\omega kp} = \frac{EJ_\omega}{l^2} \left(C \vartheta'_k + D \vartheta'_p + G \frac{\vartheta_k}{l} - H \frac{\vartheta_p}{l} \right), \\ M_{ykp} &= \frac{EJ_y}{l} \left(A_z \varphi_k + B_z \varphi_p - C_z \frac{w_k}{l} + D_z \frac{w_p}{l} \right), \\ M_{zhp} &= \frac{EJ_z}{l} \left(A_y \varphi_k + B_y \varphi_p + C_y \frac{v_k}{l} - D_y \frac{v_p}{l} \right), \\ B_{xkp} &= \frac{EJ_\omega}{l} \left(A \vartheta'_k + B \vartheta'_p + C \frac{\vartheta_k}{l} - D \frac{\vartheta_p}{l} \right); \end{aligned} \right.$$

dla pręta $k-r$

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{xkq} &= -\frac{EJ_y}{l^2} \left(C_x \varphi_k + D_x \varphi_q - G_x \frac{u_k}{l} + H_x \frac{u_q}{l} \right), \\ R_{ykq} &= \frac{EJ_x}{l^2} \left(C_y \vartheta_k + D_y \vartheta_q + G_y \frac{v_k}{l} - H_y \frac{v_q}{l} \right), \\ R_{zkq} &= \frac{EA}{l} \nu (w_k \operatorname{ctg} \nu - w_q \operatorname{cosec} \nu) \quad \text{albo} \quad S_{kq}, \\ M_{xkq} &= \frac{EJ_x}{l} \left(A_y \vartheta_k + B_y \vartheta_q + C_y \frac{v_k}{l} - D_y \frac{v_q}{l} \right), \\ M_{ykq} &= \frac{EJ_y}{l} \left(A_x \varphi_k + B_x \varphi_q - C_x \frac{u_k}{l} + D_x \frac{u_q}{l} \right), \\ M_{zkq} &= M_{\omega kq} = -\frac{EJ_\omega}{l^2} \left(C \varphi'_k + D \varphi'_q - G \frac{\psi_k}{l} + H \frac{\psi_q}{l} \right), \\ B_{zkq} &= \frac{EJ_\omega}{l} \left(A \varphi'_k + B \varphi'_q + C \frac{\psi_k}{l} - D \frac{\psi_q}{l} \right); \end{aligned} \right.$$

dla pręta $k-q$

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{xkr} &= \frac{EJ_y}{l^2} \left(C_x \varphi_k + D_x \varphi_r + G_x \frac{u_k}{l} - H_x \frac{u_r}{l} \right), \\ R_{ykr} &= -\frac{EJ_x}{l^2} \left(C_y \vartheta_k + D_y \vartheta_r - G_y \frac{v_k}{l} + H_y \frac{v_r}{l} \right), \\ R_{zkr} &= \frac{EA}{l} \nu (w_k \operatorname{ctg} \nu - w_r \operatorname{cosec} \nu) \quad \text{albo} \quad -S_{kr}, \\ M_{xkr} &= \frac{EJ_x}{l} \left(A_y \vartheta_k + B_y \vartheta_r - C_y \frac{v_k}{l} + D_y \frac{v_r}{l} \right), \\ M_{ykr} &= \frac{EJ_y}{l} \left(A_x \varphi_k + B_x \varphi_r + C_x \frac{u_k}{l} - D_x \frac{u_r}{l} \right), \\ M_{zkr} &= M_{\omega kr} = \frac{EJ_\omega}{l^2} \left(C \varphi'_k + D \varphi'_r + G \frac{\psi_k}{l} - H \frac{\psi_r}{l} \right), \\ B_{zkr} &= \frac{EJ_\omega}{l} \left(A \varphi'_k + B \varphi'_r - C \frac{\psi_k}{l} + D \frac{\psi_r}{l} \right); \end{aligned} \right.$$

dla pręta $k-t$

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{xkt} &= \frac{EJ_z}{l^2} \left(C_x \psi_k + D_x \psi_t + G_x \frac{u_k}{l} - H_x \frac{u_t}{l} \right), \\ R_{ykt} &= \frac{EA}{l} \nu (v_k \operatorname{ctg} \nu - v_t \operatorname{cose} \nu) \quad (\text{albo } S_{ht}), \\ R_{zkt} &= -\frac{EJ_x}{l^2} \left(C_z \vartheta_k + D_z \vartheta_t - G_z \frac{w_k}{l} + H_z \frac{w_t}{l} \right), \\ M_{xkt} &= \frac{EJ_x}{l} \left(A_z \vartheta_k + B_z \vartheta_t - C_z \frac{w_k}{l} + D_z \frac{w_t}{l} \right), \\ M_{ykt} &= M_{\omega kt} = -\frac{EJ_\omega}{l^2} \left(C\varphi'_k + D\varphi'_t - G \frac{\varphi_k}{l} + H \frac{\varphi_t}{l} \right), \\ M_{zkt} &= \frac{EJ_z}{l} \left(A_x \psi_k + B_x \psi_t + C_x \frac{u_k}{l} - D_x \frac{u_t}{l} \right), \\ B_{ykt} &= \frac{EJ_\omega}{l} \left(A\varphi'_k + B\varphi'_t - C \frac{\varphi_k}{l} + D \frac{\varphi_t}{l} \right); \end{aligned} \right.$$

dla pręta $k-s$

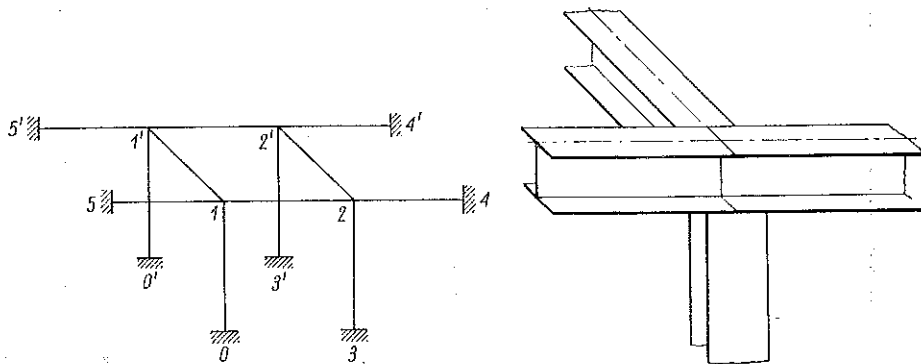
$$(5.6) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{xks} &= -\frac{EJ_z}{l^2} \left(C_x \psi_k + D_x \psi_s - G_x \frac{u_k}{l} + H_x \frac{u_s}{l} \right), \\ R_{yks} &= \frac{EA}{l} \nu (u_k \operatorname{ctg} \nu - \operatorname{cose} \nu) \quad (\text{albo } -S_{hs}), \\ R_{zks} &= \frac{EJ_x}{l^2} \left(C_z \vartheta_k + D_z \vartheta_s + G_z \frac{w_k}{l} - H_z \frac{w_s}{l} \right), \\ M_{xks} &= \frac{EJ_x}{l} \left(A_z \vartheta_k + B_z \vartheta_s + C_z \frac{w_k}{l} - D \frac{w_s}{l} \right), \\ M_{yks} &= M_{\omega ks} = \frac{EJ_\omega}{l^2} \left(C\varphi'_k + D\varphi'_s + G \frac{\varphi_k}{l} - H \frac{\varphi_s}{l} \right), \\ M_{zks} &= \frac{EJ_z}{l} \left(A_x \psi_k + B_x \psi_s + C_x \frac{u_k}{l} - D_x \frac{u_s}{l} \right), \\ B_{yks} &= \frac{EJ_\omega}{l} \left(A\varphi'_k + B\varphi'_s + C \frac{\varphi_k}{l} - D \frac{\varphi_s}{l} \right). \end{aligned} \right.$$

Mając przygotowane reakcje dynamiczne dla węzła k przejdźmy obecnie do konkretnego przypadku. Weźmy pod uwagę ramę podaną na rys. 8. W każdym węźle ilość nieznanymi wielkości przemieszczeń dla poszczególnego pręta wynosi siedem.

Z możliwych postaci pojawiających się drgań ramy zatrzymajmy się na chwilę nad drganiami antysymetrycznymi przyjmując sztywność, tj. niepacznie się węzłów. Antysymetria drgań odnosi się względem płaszczyzny xOz . W powyższym przypadku przemieszczenia symetrycznych węzłów są równe pod względem wielkości i znaku, tzn.

$$v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2, \quad \vartheta_1' = \vartheta_1, \quad \vartheta_2' = \vartheta_2,$$

$$\varphi_1' = \varphi_1, \quad \varphi_2' = \varphi_2, \quad \psi_1' = \psi_1, \quad \psi_2' = \psi_2.$$



Rys. 8

Dla określenia przemieszczeń napiszemy dwa równania wyrażające równowagę sił działających na rygle ram poprzecznych oraz cztery równania momentów działających na węzły 1 i 2; równań bimomentów rozpatrywać nie będziemy ze względu na przyjęcie sztywności węzłów:

$$(5.7) \quad R_{y15} + R_{y10} + R_{y12} - m_1 p^2 v_1 = 0, \quad R_{y23} + R_{y21} + R_{y24} - m_2 p^2 v_2 = 0;$$

$$(5.8) \quad \begin{cases} M_{x15} + M_{x10} + M_{x12} + M_{x11'} = 0, & M_{x21} + M_{x24} + M_{x23} + M_{x22'} = 0, \\ M_{z15} + M_{z10} + M_{z12} + M_{z11'} = 0, & M_{z21} + M_{z24} + M_{z23} + M_{z22'} = 0. \end{cases}$$

Podstawiając wzory |5.7| i |5.8| wielkości sił i momentów przedstawione przez |5.1| do |5.6|, otrzymamy po przekształceniach układ sześciu równań przemieszczeniowych:

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad v_1 \left[\left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_x}{l^3} G_y \right)_{10} + \left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{12} - m_1 p^2 \right] - v_2 \left(\frac{EJ_z}{l^3} H_y \right)_{12} + \\
 & \quad + \psi_1 \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{12} \right] + \psi_2 \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{12} + \vartheta_1 \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{10} = 0, \\
 & 2) \quad -v_1 \left(\frac{EJ_z}{l^3} H_y \right)_{21} + v_2 \left[\left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_x}{l^3} G_y \right)_{23} + \left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{24} - m_2 p^2 \right] - \\
 & \quad - \psi_1 \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{21} + \psi_2 \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{24} \right] + \vartheta_2 \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{23} = 0, \\
 & 3) \quad \vartheta_1 \left[\left(\frac{EJ_\omega}{l^2} G \right)_{15} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_y \right)_{10} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{12} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_z \right)_{11'} + \left(\frac{EJ_x}{l} B_z \right)_{11'} \right] - \\
 & \quad - \vartheta_2 \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} H \right)_{12} + \vartheta_1' \left[- \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} C \right)_{15} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} C \right)_{12} \right] + \\
 & \quad + \vartheta_2' \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} D \right)_{12} + v_1 \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{10} = 0, \\
 & (5.9) \\
 & 4) \quad -\vartheta_1 \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} H \right)_{21} + \vartheta_2 \left[\left(\frac{EJ_\omega}{l^2} G \right)_{21} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{24} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_z \right)_{22'} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{EJ_x}{l} B_z \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_y \right)_{23} \right] - \vartheta_1' \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} D \right)_{21} - \vartheta_2' \left[\left(\frac{EJ_\omega}{l^2} C \right)_{21} - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} C \right)_{24} \right] + v_2 \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{23} = 0, \\
 & 5) \quad \psi_1 \left[\left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_x \right)_{11'} + \left(\frac{EJ_z}{l} B_x \right)_{11'} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{12} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{10} + \right. \\
 & \quad \left. + \psi_2 \left(\frac{EJ_z}{l} B_y \right)_{12} - \psi_1' \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} C \right)_{10} + v_1 \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{12} \right] - \right. \\
 & \quad \left. - v_2 \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{12} \right] = 0, \\
 & 6) \quad \psi_1 \left(\frac{EJ_z}{l} B_y \right)_{21} + \psi_2 \left[\left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{24} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_x \right)_{22'} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{EJ_z}{l} B_x \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} G \right)_{23} \right] - \psi_2' \left(\frac{EJ_\omega}{l} C \right)_{10} + v_1 \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{21} + \\
 & \quad + v_2 \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{24} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Pamiętając o tym, że $\vartheta'_1 = \vartheta'_2 = \psi'_1 = \psi'_2 = 0$ oraz wprowadzając w równania 3 i 4 ze wzoru (5.9) następujące oznaczenia:

$$(5.10) \quad \begin{cases} \delta_{11} = \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{15} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_y \right)_{10} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{12} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_z \right)_{11'} + \left(\frac{EJ_x}{l} B_z \right)_{11'}, \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} H \right)_{12} = \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} H \right)_{21}, \\ \delta_{22} = \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{21} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{24} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_z \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_x}{l} B_z \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_x}{l} A_y \right)_{23} \end{cases}$$

oraz rozwiązując je względem ϑ_1 i ϑ_2 , otrzymamy

$$(5.10.1) \quad \vartheta_1 = \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2, \quad \vartheta_2 = \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2,$$

gdzie

$$(5.11) \quad \begin{cases} \beta_{11} = -\frac{\delta_{22}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{10}, \\ \beta_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{23}, \\ \beta_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{10}, \\ \beta_{22} = \frac{\delta_{11}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{23}. \end{cases}$$

Wprowadzając następnie oznaczenia do równań 5 i 6 ze wzoru (5.9)

$$(5.12) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_x \right)_{11'} + \left(\frac{EJ_z}{l} B_x \right)_{11'} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{12} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} G \right)_{10}, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(\frac{EJ_z}{l} B_y \right)_{12}, \\ \gamma_{22} = \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{24} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_x \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_z}{l} B_x \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^2} G \right)_{23} \end{cases}$$

i rozwiązując je względem ψ_1 i ψ_2 otrzymamy

$$(5.12.1) \quad \psi_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2, \quad \psi_2 = \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2,$$

$$(5.13) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11} &= \frac{\gamma_{12} \left(\frac{EJ_z}{l^3} D_y \right)_{12} - \gamma_{22} \left[\left(-\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{12} \right]}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \\ a_{12} &= \frac{\gamma_{22} \left(\frac{EJ_z}{l^3} D_y \right)_{12} + \gamma_{12} \left[\left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{21} - \left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{24} \right]}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \\ a_{21} &= \frac{\gamma_{12} \left[-\left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{12} \right] - \gamma_{11} \left(\frac{EJ_z}{l^3} D_y \right)_{12}}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \\ a_{22} &= \frac{\gamma_{11} \left[\left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{21} - \left(\frac{EJ_z}{l^3} C_y \right)_{24} \right] + \gamma_{12} \left(\frac{EJ_z}{l^3} D_y \right)_{21}}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}. \end{aligned} \right.$$

Po podstawieniu w równania 1 i 2 układu (5.9) wyrażeń określających kąty ϑ i ψ otrzymamy

$$(5.13.1) \quad v_1 r_{11} + v_2 r_{12} = 0, \quad v_1 r_{21} + v_2 r_{22} = 0;$$

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{aligned} r_{11} &= \left[\left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_x}{l^3} G_y \right)_{10} + \left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{12} - m_1 p^2 \right] + \\ &\quad + \beta_{11} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{10} + a_{11} \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{12} + a_{21} \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{12}, \\ r_{12} &= - \left(\frac{EJ_z}{l^3} H_y \right)_{12} + \beta_{12} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{10} + \\ &\quad + a_{12} \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{12} \right] + a_{22} \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{12}, \\ r_{21} &= - \left(\frac{EJ_z}{l^3} H_y \right)_{21} + \beta_{21} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{23} - a_{11} \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{21} + \\ &\quad + a_{11} \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{24} \right], \\ r_{22} &= \left[\left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_x}{l^3} G_y \right)_{23} + \left(\frac{EJ_z}{l^3} G_y \right)_{24} - m_2 p^2 \right] + \\ &\quad + \beta_{22} \left(\frac{EJ_x}{l^2} C_y \right)_{23} + a_{22} \left[- \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l^2} C_y \right)_{24} \right] - a_{12} \left(\frac{EJ_z}{l^2} D_y \right)_{21}. \end{aligned} \right.$$

$$(5.23) \quad \left[\left(\frac{EJ_y}{l} A_z \right)_{15} + \left(\frac{EJ_y}{l} A_x \right)_{10} + \left(\frac{EJ_y}{l} A_z \right)_{12} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{11'} + \right. \\ \left. + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} H \right)_{11'} \right] \left[\left(\frac{EJ_y}{l} A_z \right)_{21} + \left(\frac{EJ_y}{l} A_x \right)_{13} + \left(\frac{EJ_y}{l} A_z \right)_{24} + \right. \\ \left. + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} H \right)_{22'} \right] - \left(\frac{EJ_y}{l} B_z \right)_{12}^2 = 0,$$

$$(5.24) \quad \left[\left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{15} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{12} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_x \right)_{11'} - \left(\frac{EJ_z}{l} B_x \right)_{11'} + \right. \\ \left. + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{10} \right] \left[\left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{21} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_y \right)_{24} + \left(\frac{EJ_z}{l} A_x \right)_{22'} - \right. \\ \left. - \left(\frac{EJ_z}{l} B_x \right)_{22'} + \left(\frac{EJ_\omega}{l^3} G \right)_{23} \right] - \left(\frac{EJ_z}{l} B_y \right)_{12}^2 = 0.$$

Otrzymane w ten sposób równania określają trzy serie częstości symetrycznych drgań własnych ramy przestrzennej (rys. 7), przy których pominięto liniowe przemieszczenia oraz spaczenie węzłów. Ponieważ w równaniach tych częstość występuje niejawnie, wobec tego rozwiązanie ich może być wykonane jedynie na drodze kolejnych prób. W przypadku szczególnym, gdy wszystkie pręty ramy mają jednakową długość i przekrój poprzeczny, otrzymane równania znacznie się upraszczają przyjmując postać:

$$(5.25) \quad \left(A_y + A_z - B_z + 2 \frac{J_\omega \cdot 1}{J_x l^3} G \right)^2 - \left(\frac{J_\omega \cdot 1}{J_x l^3} H \right)^2 = 0,$$

$$(5.26) \quad \left(2 A_z + A_x + \frac{J_\omega}{J_y} \frac{1}{l^2} (G + H) \right)^2 - B_z^2 = 0,$$

$$(5.27) \quad \left(2 A_y + A_x - B_x + \frac{J_\omega}{J_z} \frac{1}{l^2} G \right)^2 - B_y^2 = 0.$$

Rozpatrzmy także przykład liczbowy. Określmy częstość drgań własnych, symetrycznych ramy przestrzennej przedstawionej na rys. 8 za pomocą równania (5.26). Długości $l = 4$ m oraz przekroje wszystkich prętów są jednakowe, $A = 14,3$ cm². Materiał ramy o module sprężystości $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $G = 0,4 E$, ciężar właściwy $\gamma = 7,8$ gr/cm³.

Momenty bezwładności przekroju poprzecznego: względem osi y (na zginanie) $J_y = 245$ cm⁴, na skręcanie $J_s = 2873$ cm⁴,

wycinkowy moment bezwładności

$$J_{\omega} = 644,3 \text{ cm}^6, \quad \frac{J_{\omega}}{J_y} = 2,629 \text{ cm}^2,$$

$$\lambda_1 = l \sqrt[4]{\frac{qP^2}{gEJ_y}}, \quad \lambda_3 = l \sqrt[4]{\frac{qP^2}{gEJ_{\omega}}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \sqrt[4]{\frac{J_{\omega}}{J_y}} = 1,273,$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1^4 r_y^4}{l^2}, \quad r_y = 3,820, \quad a_3 = \frac{\lambda_3^4}{l^2} \frac{r_{\omega}^2}{r_0^2} - \frac{GJ_s l^2}{EJ_{\omega}}, \quad \frac{r_{\omega}^2}{r_0^2} = 2,6.$$

Przyjmując $\lambda_3 = 7,270$ lub $7,280$, otrzymujemy $\lambda_1 = 9,257$ lub $9,260$, $a_1 = 9,777$ lub $9,787$, $a_3 = -256$. Obliczając następnie $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3$ i β_3 na podstawie podanych wzorów oraz wyliczając wielkości A_x, A_z, G i H według wzorów (4.13), otrzymamy po wstawieniu do (5.26), obliczeniu i interpolacji

$$\lambda_3 = 7,2715, \quad \lambda_1 = 9,259.$$

Wobec tego zgodnie ze wzorem podanym na s. 97 otrzymamy częstotliwość drgań:

$$p = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{q}} g = \frac{9,259^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{q}} g.$$

Literatura cytowana w tekście

- [1] Я. В. Ананьев, *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем*, 1946.
- [2] А. А. Белоус, *Метод деформации в динамике рамных конструкций*, Сборник, Исследования по теории сооружений, Стройиздат, Москва 1939.
- [3] Н. И. Безухов, *Обобщение методов статики сооружений в динамике сооружений*, Сборник, Исследования по теории сооружений, Стройиздат, Москва 1939.
- [4] I. Kisiel, *Dynamika ustrojów prętowych*, Warszawa 1957 r.
- [5] I. Kisiel, *Dynamika fundamentów pod maszyny*, Warszawa 1957 r.
- [6] A. Lisowski, *Drgania prętów prostych i ram. Wybrane zagadnienia i przykłady*, Warszawa 1957 r.
- [7] H. Reissner, *Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerkes*, Berlin 1903 r.
- [8] J. Rutecki, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957 r.
- [9] С. П. Тимошенко, *Теория колебаний в инженерном деле*, 1937.
- [10] А. П. Смирнов, *Статическая и динамическая устойчивость сооружений*, 1947.
- [11] Н. А. Соколов, *Колебания сжатых и растянутых стержней*, Труды ЦАТИ 1952.
- [12] И. В. Урбан, *Теория изгибного кручения тонкостенных конструкции открытого и закрытого профиля*, Изд. МЕМНИТ, Москва 1950.

[13] H. Wagner i W. Pretschner, *Verdrehung und Knickung von offenen profile*, Luft. Forschg., 6, 11, 1934.

[14] В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания)*, Госстройиздат, Moskwa-Leningrad 1940.

[15] В. З. Власов, *Строительная механика тонкостенных пространственных систем*, 1949,

Резюме

КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТКРЫТОГО СЕЧЕНИЯ

Исходя из системы дифференциальных уравнений колебания тонкостенного стержня открытого сечения, находящегося под действием произвольной нагрузки, а затем сводя систему к двум независимым уравнениям путем предположения симметрии сечения стержня по отношению к двум взаимно перпендикулярным осям, проводится интегрирование уравнений. При интегрировании вводятся значения краевых функций как слабых параметров. Далее, проводится анализ колебаний тонкостенного стержня открытого сечения, находящегося под действием обобщенных сил, определяя амплитуды колебаний в отдельных плоскостях вместе с крутильными колебаниями. Одновременно определяются амплитуды изгибающих моментов, поперечных сил, бимоментов и изгибно-крутильных моментов. После проведения подробного анализа колебаний стержня для различных случаев нагрузки выводятся формулы, необходимые для метода деформаций, который был применен в настоящей работе для определения колебаний стержневых систем. Получив в конечном этапе выведения динамические реакции, рассматриваются колебания пространственной рамы, ограничиваясь одним числовым примером, касающимся симметрических колебаний рамы, возникающих по отношению к оси y , при пренебрежении депланацией узлов рамы.

Summary

VIBRATION OF SPACE FRAMES OF THIN-WALLED ELEMENTS WITH OPEN CROSS-SECTION

The system of differential equations of vibration of a thin-walled bar with open cross-section loaded in any manner is integrated by separation, assuming that the bar is symmetric in relation to two mutually perpendicular axes. The values of the edge functions are introduced as principal parameters. Next, vibration of a thin-walled bar with open cross-section and loaded by generalized forces is analyzed, the amplitudes being determined in every plane. The torsional amplitudes are also considered. At

the same time, the amplitudes of bending moments, transverse forces, bimoments and bending-twisting moments are determined. After a detailed analysis of vibration of the bar in various cases of load, equations necessary for the method of strains are derived. This method is used in the present paper for the purpose of calculating the vibration of a system of bars. In the final stage, the dynamic reactions are obtained and the vibration of a spatial frame is considered, considerations being confined to a single numerical example concerning symmetric vibration of a frame in relation to the y -axis, the warping at the nodal points of the frame being disregarded.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1958 r.