

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

**OGÓLNA TEORIA STATECZNOŚCI PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH
Z UWZGLĘDNIENIEM ODKSZTAŁCALNOŚCI PRZEKROJU
POPZRZECZNEGO**

CZĘŚĆ II. PRĘTY O ZŁOŻONYM PRZEKROJU POPZRZECZNYM

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXVII**

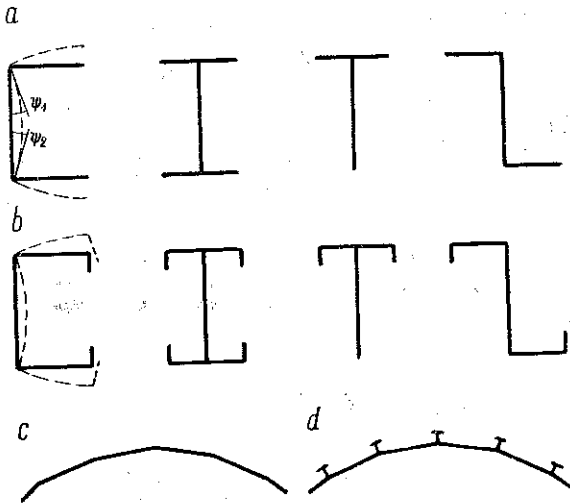
TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	805
2. Metoda ścisła	807
3. Przykłady zastosowania rozwiązań ścisłych	814
4. Metoda uproszczona	823
5. Przykłady zastosowań metody uproszczonej. Przykład liczbowy	825
6. Możliwości dalszych uproszczeń. Pręt cienkościenny jako nieodkształcalny element konstrukcji	833

1. Uwagi wstępne

Praca niniejsza jest kontynuacją dłuższego cyklu i stanowi drugą część pracy [1], traktującej o przekrojach prostych. Przypomnimy tu kryterium podziału prętów cienkościennych na pręty o przekrojach prostych i złożonych. Według definicji podanej i uzasadnionej w pracy [1] przekrój poprzeczny pręta jest prosty (rys. 1a), jeżeli jego zniekształcenie nie powoduje bezpośrednio przemieszczeń punktów w płaszczyźnie danej ścianki, a jedynie przemieszczenia w kierunku normalnym do ścianki. W przeciwnym przypadku przekrój jest



Rys. 1

złożony (rys. 1b). Wskutek tych własności naprężenia normalne σ i styczne τ od zginania i skrępowanego skręcania, powstałe w chwili utraty stateczności, nie zależą w przekroju prostym od jego zniekształcenia, lecz wyłącznie od trzech składowych przemieszczeń przekroju poprzecznego: ξ , η , φ .

Przedmiotem tej pracy są przekroje złożone, przy czym ograniczymy się do wielobocznych przekrojów otwartych. Założenia będą identyczne z przyjętymi dla prętów o przekrojach prostych, mianowicie pełna sprężystość materiału; ścisłanie osiowe, wolne podparcie pręta, swoboda spaczenia przekrojów

skrajnych, dwie niepodatne w swej płaszczyźnie przepony uniemożliwiające zniekształcenie przekrojów podporowych. Poza tym przyjmiemy wszystkie założenia klasycznej teorii prętów cienkościennych o przekroju otwartym z wyjątkiem założenia nieodkształcalności przekroju poprzecznego.

Jak wykazano w pracy [1], dla dowolnego przekroju prostego można uzyskać rozwiązanie przez ułożenie równań równowagi ścianek i równań równowagi wewnętrznych krawędzi (równań sum zginających momentów poprzecznych). W przypadku przekrojów złożonych wymienione równania też muszą być spełnione, lecz sił ścinających, które wchodzą w ich skład, nie można w pełni określić przez przemieszczenia przekroju poprzecznego całego pręta. Siły te jednak mogą być określone przez przemieszczenia przekroju prostego. Wynika stąd możliwość zastosowania teorii podanej poprzednio dla prętów o przekrojach prostych jako podstawy dla rozwiązywania prętów o przekrojach złożonych. Wystarczy w tym celu podzielić dany przekrój złożony na części, które będziemy nazywali elementami i które spełniać będą założenia przekrojów prostych. Wówczas wpływ przemieszczeń ξ , η , φ poszczególnych elementów da się uwzględnić metodami stosowanymi dla przekrojów prostych, ponieważ zniekształcenie elementu nie będzie miało bezpośredniego wpływu na równania równowagi. Z drugiej strony podział na elementy traktowane niezależnie wymaga spełnienia dodatkowych warunków wynikających z faktu, iż stanowią one jedną współpracującą całość. Będą to warunki natury geometrycznej, z których część, mianowicie odnoszące się do przemieszczeń w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, będzie spełniona wprost przy pisaniu równań równowagi; pozostaną zatem warunki zgodności przemieszczeń osiowych, które dadzą dodatkowe równania. Dodatkowymi niewiadomymi będą przy tym siły ścinające, działające pomiędzy poszczególnymi elementami, które to siły należy oczywiście uwzględnić również w równaniach równowagi. Naskicowana tu metoda będzie szczegółowo omówiona w rozdziale drugim jako «metoda ścisła». W rozdziale czwartym przedstawiona jest «metoda uproszczona», w której pomija się odkształcalność poprzeczną niektórych ścianek, np. ścianek zewnętrznych lub wewnętrznych o stosunkowo dużej grubości. Jak wykazano w pracy [1] metoda ta może znaleźć zastosowanie w większości przypadków spotykanych w praktyce, przy czym jakkolwiek na ogół nie zmniejsza ilości niewiadomych, to jednak znacznie zmniejsza nakład pracy rachunkowej; metoda ta jednak może być stosowana tylko przy badaniu wyboczenia podług jednej półfali. W rozdziale szóstym wprowadzone będą dalsze uproszczenia polegające na przyjęciu nieodkształcalności całych elementów. Elementy takie (lub ścianki) będziemy krótko nazywali nieodkształcalnymi, mając na uwadze oczywiście tylko nieodkształcalność ich przekroju poprzecznego.

Pod względem matematycznym przekroje złożone nie nastęrczają żadnych trudności w rozwiązaniu, ponieważ wszystkie warunki zadania są spełnione przez podstawienie funkcji trygonometrycznych $\sin(n\pi x/l)$ oraz $\cos(n\pi x/l)$, gdzie

n jest ilością półfal wyboczenia. Podstawiając różne wartości n można otrzymać obciążenia krytyczne dla różnych postaci wyboczenia. Pamiętać przy tym należy, że o ile w przekrojach prostych można dla większych wartości n pominąć zawsze odkształcenia prętowe; to znaczy rozważać czyste wyboczenie płytowe ścianek, zwane wyboczeniem lokalnym, to pominięcie ich w przekrojach złożonych może prowadzić do istotnych błędów, tym większych, im mniejsze są sztywności giętne ścianek.

Przedstawiona metoda pozwala również na przybliżone obliczanie naprężeń krytycznych dla równomiernie ściskanych powłok walcowych przy założeniu wolnego podparcia i swobody spaczenia przekrojów podporowych i przy dowolnych warunkach podparcia na krawędziach równoległych. Daną powłokę walcową należy zamienić na wieloboczną (rys. 1c), która spełnia już założenia niniejszej pracy. Nie można jednak zapominać, że zgodnie z założeniami teorii prętów cienkościennych nie uwzględniamy wpływu naprężeń stycznych na odkształcenia i przemieszczenia. Ponieważ wpływ ten szybko rośnie ze zmniejszeniem długości półfali wyboczenia oraz ze zmniejszaniem długości powłoki, zaś powłoki typu c na rys. 1 wybaczą się z reguły przy dużej ilości półfal — należy się spodziewać, że możliwości zastosowania tej metody do tego rodzaju powłok są raczej problematyczne. Natomiast w przypadku długich lub średniej długości powłok wzmocnionych w kierunku podłużnym (rys. 1d), które wybaczą się będą na ogół podług jednej półfali, zatem w których wpływ naprężeń stycznych jest znikomy — wyniki otrzymane w ten sposób powinny być znacznie bardziej dokładne i metoda powinna dać tutaj realne możliwości praktycznego rozwiązania szeregu zagadnień bardzo trudnych w innym ujęciu.

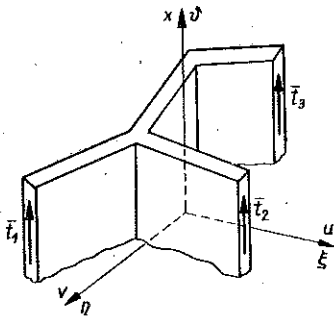
Na zakończenie tych uwag ogólnych podkreślimy, że — jak wykazują przykłady zamieszczone w rozdziałach 3, 5 i 6 — wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na naprężenia krytyczne jest w przekrojach złożonych znacznie a nawet wielokrotnie większy niż w przekrojach prostych, gdzie w większości przypadków jest znikomy.

2. Metoda ścisła

Dowolny złożony przekrój poprzeczny można podzielić na części (elementy), które spełniają założenia przekrojów prostych. Do elementów tych, to znaczy do ścianek, z których się składają, nie można jednak stosować równań wyprowadzonych w pracy [1], ponieważ mamy tu do czynienia z bardziej skomplikowanym stanem odkształceń. Wzdłuż krawędzi łączących w poszczególne elementy występują bowiem naprężenia styczne, które powodują powstanie sił normalnych oraz związanych z nimi odkształceń i przemieszczeń osiowych. W związku z tym równania równowagi ścianek wyprowadzone w [1] wymagają uzupełnienia.

Dla każdego elementu założymy oddzielny układ współrzędnych (rys. 2). Ośie u i v są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego

elementu, oś x pokrywa się z jego osią ciężkości, punkt C oznacza środek ciężkości, zaś punkt A — środek zginania. Przemieszczenia przekroju opisane będą następującymi wielkościami: dwiema składowymi ξ , η przemieszczeń



Rys. 2

środką zginania, równoległymi odpowiednio do osi u , v , składową ϑ równoległą do osi x (przemieszczeniem osiowym) oraz kątem obrotu φ przekroju poprzecznego względem środka zginania. Dodatnie składowe ξ , η , φ będą skierowane zgodnie z kierunkiem odpowiednich osi, dodatni kąt obrotu φ widziany od strony dodatniej osi x będzie miał zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara. Poszczególne ścianki pręta będą numerowane: grubość ścianki r oznaczona będzie przez δ , jej szerokość przez b , zaś powierzchnia

przekroju poprzecznego przez A . Elementy będą oznaczane małymi literami, zaś krawędzie ścianek będą numerowane cyframi rzymskimi.

Naprężenia normalne równomiernie rozłożone wzdłuż grubości ścianki, powstałe wskutek odkształcenia pręta przy wyobczeniu, oznaczać będziemy przez σ , zaś naprężenia styczne równomiernie rozłożone przez τ . Wypadkową siłę $t = \tau\delta$ naprężeń tnących będziemy nazywać siłą ścinającą. Wzdłuż krawędzi łączących poszczególne elementy działać będą krawędziowe siły ścinające \bar{t} ; dodatni kierunek sił krawędziowych będzie zgodny z dodatnim kierunkiem osi x (por. rys. 2). Osie x dla wszystkich elementów powinny być jednakowo skierowane.

Naprężenia normalne σ , powstałe przy ogólnym stanie przemieszczeń pręta cienkościennego, określone są wzorem wyprowadzonym przez WŁASOWA (por. [2])¹:

$$(2.1) \quad \sigma = E(\vartheta' - \xi''u - \eta''v - \varphi''\omega).$$

Odnosnie współrzędnej wycinkowej ω obowiązuje przy tym następująca umowa: przyrost tej współrzędnej jest dodatni, jeżeli przyrostowi ds zmiennej całkowania odpowiada zgodny z ruchem wskazówek zegara obrót względem środka zginania. Otrzymane z powyższego wzoru naprężenia dodatnie oznaczają rozciąganie. Zależność (2.1) pozwala na wyprowadzenie odpowiedniego wzoru dla sił ścinających t ; otrzymujemy (por. [2])

$$(2.2) \quad t = t_0 + E(-\vartheta'''F + \xi'''S_v + \eta'''S_u + \varphi'''S_\omega).$$

We wzorze tym przyjęto następujące znane z elementarnej teorii prętów cienkościennych oznaczenia:

$$(2.3) \quad S_v = \int_{s_0}^s u dA, \quad S_u = \int_{s_0}^s v dA, \quad S_\omega = \int_{s_0}^s \omega dA.$$

¹ W pracy niniejszej przyjęto oznaczenia częściowo różne od stosowanych w pracy [2].

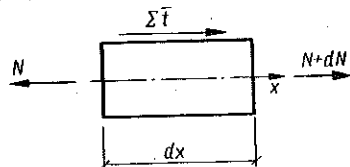
Wielkość F występująca w pierwszym wyrazie przedstawia pole powierzchni bieżącej części przekroju poprzecznego:

$$(2.4) \quad F = \int_{s_0}^s dA,$$

zaś t_0 jest siłą ścinającą w dowolnym punkcie początkowym s_0 na konturze przekroju poprzecznego. Dodatnia siła ścinająca t widziana od dodatniej strony osi x będzie działać w kierunku zgodnym z przyjętym do obliczenia całek we wzorach (2.3), (2.4) kierunkiem s całkowania.

Zrównoważenie elementu dx (rys. 3) daje prostą zależność między siłą normalną i krawędziowymi siłami ścinającymi:

$$(2.5) \quad \frac{dN}{dx} = - \sum \bar{t},$$



Rys. 3

przy czym $\sum \bar{t}$ oznacza sumę algebraiczną sił ścinających, zaś N siłę normalną powstałą wskutek odkształcenia pręta przy wyoboczeniu. Biorąc dalej pod uwagę, że jednostkowe odkształcenie osiowe ε dane jest wzorem

$$(2.6) \quad \varepsilon = \vartheta' = \frac{N}{EA},$$

otrzymamy

$$(2.7) \quad \vartheta'' = -\frac{1}{EA} \sum \bar{t}.$$

Można zatem wzór (2.2) przepisać jak następuje:

$$(2.8) \quad t = E(\xi''' S_v + \eta''' S_u + \varphi''' S_\omega) t_0 + \frac{F}{A} \sum \bar{t}$$

lub krócej

$$(2.9) \quad t = E(\xi''' S_v + \eta''' S_u + \varphi''' S_\omega) + \Delta t,$$

przy czym pierwszy wyraz jest identyczny ze wzorem dla pręta cienkościennego swobodnie pracującego, zaś Δt przedstawia dodatkową siłę ścinającą

$$(2.10) \quad \Delta t = t_0 + \frac{F}{A} \sum \bar{t},$$

zależną od obciążenia krawędziowymi siłami ścinającymi \bar{t} , powstałymi wskutek współpracy rozważanego elementu z pozostałymi częściami pręta.

Możemy obecnie przejść do wyprowadzenia równania równowagi dla ścianek pręta, wchodzących w skład dowolnego elementu spełniającego warunki pracy [1] i ma postać (por. rys. 4 i 5):

$$(2.11) \quad P_r \frac{d^2 \zeta_r}{dx^2} - \frac{dT_r}{dx} - p_r = 0,$$

gdzie ζ_r jest przemieszczeniem ścianki r w jej płaszczyźnie, T_r siłą tnącą, p_r obciążeniem rozłożonym, działającym w płaszczyźnie ścianki, zaś P_r siłą ściskającą daną ściankę: $P_r = A_r \sigma_0$. Siła tnąca T_r jest sumą sił ścinających t , działających na całej szerokości ścianki i można ją obliczyć przez całkowanie:

$$T_r = \int_{-\frac{b_r}{2}}^{\frac{b_r}{2}} t dy_r.$$

Po podstawieniu pod całkę pierwszej części wzoru (2.9) otrzymamy (por. [1])

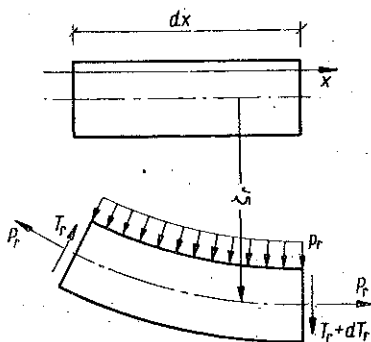
$$T_r^* = \frac{1}{2} E b_r (S_v^{(r)} \xi''' + S_u^{(r)} \eta''' + S_\omega^{(r)} \varphi''') - E I_r \zeta_r''',$$

zaś po podstawieniu drugiej części, biorąc pod uwagę, że przy stałej grubości δ_r ścianki wykres Δt jest na całej szerokości ścianki prostoliniowy, będziemy mieli

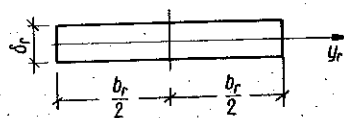
$$T_r^{**} = b_r \Delta t^{(r)},$$

gdzie $\Delta t^{(r)}$ oznacza wartość siły ścinającej Δt w środku szerokości ścianki² (czyli dla $y_r = 0$). Zatem pełna siła tnąca będzie określona wzorem

$$(2.12) \quad T_r = \frac{1}{2} E b_r (S_v^{(r)} \xi''' + S_u^{(r)} \eta''' + S_\omega^{(r)} \varphi''') - E I_r \zeta_r''' + b_r \Delta t^{(r)}.$$



Rys. 4



Rys. 5

Podstawiając ten wzór do (2.11) otrzymamy przyjmując $P_r = k E A_r$

$$(2.13) \quad E A_r k \zeta_r'' + E I_r \zeta_r^{IV} - \frac{1}{2} E b_r (S_v^{(r)} \xi^{IV} + S_u^{(r)} \eta^{IV} + S_\omega^{(r)} \varphi^{IV}) - b_r \Delta t^{(r)'} - p_r = 0$$

lub po podzieleniu przez $E A_r$:

$$(2.14) \quad k \zeta_r'' + \frac{b_r^2}{12} \zeta_r^{IV} - \frac{1}{2 \delta_r} (S_v^{(r)} \xi^{IV} + S_u^{(r)} \eta^{IV} + S_\omega^{(r)} \varphi^{IV}) - \frac{1}{E \delta_r} \Delta t^{(r)'} - \frac{p_r}{E A_r} = 0.$$

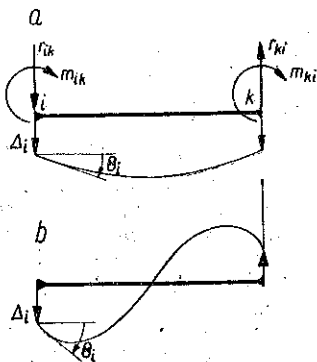
² Jeżeli wykres Δt jest na danej ściance nieciągły, wówczas należy T_r^{**} obliczać wprost jako jego pole powierzchni uwzględniając znaki wykresu.

W równaniach tych podobnie jak w analogicznym równaniu wyprowadzonym w pracy [1], $S_v^{(r)}$, $S_u^{(r)}$ i $S_w^{(r)}$ przedstawiają sumy wartości odpowiednich momentów statycznych na obu krawędziach ścianki, $k = \sigma_0/E$ jest bezwymiarowym współczynnikiem odpowiadającym naprężeniom osiowego ściskania σ_0 , zaś I_r jest momentem bezwładności ścianki względem osi głównej prostopadłej do jej płaszczyzny: $I_r = b_r^3 \delta_r / 12$. Wielkość $\Delta t^{(r)}$ zależy od obciążenia krawędziowymi siłami ścinającymi i na zasadzie superpozycji da się zawsze przedstawić w postaci sumy

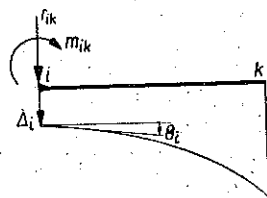
$$(2.15) \quad \Delta t^{(r)} = \bar{t}_1 \chi_{r1} + \bar{t}_2 \chi_{r2} + \dots = \sum_i \bar{t}_i \chi_{ri},$$

gdzie χ_{ri} przedstawia wartość siły ścinającej $\Delta t^{(r)}$, powstałej od obciążenia $\bar{t}_i = 1$. Współczynniki χ_{ri} można odczytać z wykresów sił ścinających Δt_i , skonstruowanych na podstawie wzoru (2.10) dla poszczególnych obciążeń jednostkowych $\bar{t}_i = 1$. Sposób konstruowania tego rodzaju wykresów niestosowanych w elementarnej teorii prętów cienkościennych będzie objaśniony w rozdziale 3.

Przy korzystaniu z równań (2.13) lub (2.14) należy pamiętać, że wyprowadzone są w założeniu, że dodatni kierunek s całkowania we wzorach (2.3) i (2.4) musi być identyczny z dodatnim kierunkiem przemieszczeń ζ_r oraz obciążeń p_r .



Rys. 6



Rys. 7

Równania równowagi ścianek (2.13) lub (2.14) stanowią pierwszą grupę równań. Drugą grupę otrzymamy ze zrównoważenia krawędzi wewnętrznych; będą to równania typu

$$(2.16) \quad \sum m_{ik} = 0.$$

Poprzeczne momenty zginające m_{ik} , działające na krawędzi, podobnie jak obciążenia p_r , ścianek dadzą się zawsze wyznaczyć jako reakcje jednokierunkowo ściskanej płyty przy danych przemieszczeniach brzegowych za pomocą wzorów, które zostały wyprowadzone i objaśnione w pracy [1]. Przypomnimy tu tylko ogólną budowę tych wzorów i umowę o znakach (rys. 6 i 7).

Dla płyty o danych przemieszczeniach na obu krawędziach podłużnych mamy w przypadku symetrii (rys. 6a)

$$(2.17) \quad \begin{cases} m_{ik}(x) = -m_{ki}(x) = D(\alpha_n^2 M_{\Delta s} \Delta_i(x) + \alpha_n M_{\Theta s} \Theta_i(x)), \\ r_{ik}(x) = -r_{ki}(x) = D(\alpha_n^3 R_{\Delta s} \Delta_i(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta s} \Theta_i(x)), \end{cases}$$

zaś w przypadku antysymetrii (rys. 6b)

$$(2.18) \quad \begin{cases} m_{ik}(x) = m_{ki}(x) = D(\alpha_n^2 M_{\Delta a} \Delta_i(x) + \alpha_n M_{\Theta a} \Theta_i(x)), \\ r_{ik}(x) = r_{ki}(x) = D(\alpha_n^3 R_{\Delta a} \Delta_i(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta a} \Theta_i(x)). \end{cases}$$

Dla płyty o danych przemieszczeniach brzegowych na jednej krawędzi podłużnej i swobodnej przeciwległej krawędzi (rys. 7) mamy

$$(2.19) \quad \begin{cases} m_{ik} = D(\alpha_n^2 M_{\Delta} \Delta_i(x) + \alpha_n M_{\Theta} \Theta_i(x)), \\ r_{ik} = D(\alpha_n^3 R_{\Delta} \Delta_i(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta} \Theta_i(x)). \end{cases}$$

Przy wyprowadzeniu powyższych wzorów założono wolne podparcie płyt na krawędziach poprzecznych (tzn. wolne podparcie ścianek pręta na przeponach skrajnych) oraz że przemieszczenia brzegowe określone są wzorami typu

$$(2.20) \quad \Delta(x) = \Delta \sin \alpha_n x, \quad \Theta(x) = \Theta \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} x,$$

tzn. są proporcjonalne do funkcji $\sin \alpha_n x$.

Równania równowagi ścianek wystarczają w przypadku pręta o prostym przekroju poprzecznym. W przypadku przekroju złożonego konieczne jest ułożenie dalszych równań, mianowicie równań zgodności odkształceń poszczególnych elementów składowych pręta. Dzieliąc bowiem pręt na elementy i rozwiązując je oddzielnie musimy założyć ich wzajemne oddziaływania reakcjami rozłożonymi wzdłuż krawędzi podziału. Poprzeczne reakcje i poprzeczne momenty zginające nie stanowią wielkości niewiadomych, ponieważ dadzą się wyznaczyć przez przemieszczenia według wzorów (2.17)–(2.19). Niewiadomymi będą zatem jedynie krawędziowe siły ścinające \bar{t}_i , które należy tak dobrać, aby odkształcenia jednostkowe w kierunku osi pręta, obliczone dla obu połączonych elementów, były wzdłuż danej krawędzi jednakowe. Otrzymamy w ten sposób trzecią grupę równań.

Pomijając zgodnie z przyjętymi w teorii prętów cienkościennych zasadami drugorzędne naprężenia obwodowe będziemy mieli $\varepsilon = \sigma/E$, zatem według (2.1) otrzymamy

$$\varepsilon = \vartheta' - \xi'' u - \eta'' v - \varphi'' \omega.$$

Ze wzoru (2.6), korzystając z zależności (2.5) i biorąc pod uwagę, że na obu końcach pręta ($x = 0$, $x = l$) siła normalna musi być równa zeru otrzymamy

$$\vartheta' = -\frac{1}{EA} \int_0^x \sum \bar{t} dx.$$

Ostatecznie zatem wzdłuż krawędzi łączącej elementy m , p musi być spełniony warunek

$$(2.21) \quad \frac{1}{EA_m} \int_0^x \bar{t}_m dx + \xi_m'' \bar{u}_m + \eta_m'' \bar{v}_m + \varphi_m'' \bar{\omega}_m = \\ = \frac{1}{EA_p} \int_0^x \bar{t}_p dx + \xi_p'' \bar{u}_p + \eta_p'' \bar{v}_p + \varphi_p'' \bar{\omega}_p.$$

W równaniu tym A_m , A_p oznaczają pola powierzchni przekroju poprzecznego elementów m i p , wielkości ξ_m , η_m , φ_m oraz ξ_p , η_p , φ_p przemieszczenia odpowiednich elementów, zaś \bar{u}_m , \bar{v}_m , $\bar{\omega}_m$, \bar{u}_p , \bar{v}_p , $\bar{\omega}_p$ współrzędne punktu przekroju poprzecznego, leżącego na krawędzi łączącej elementy m i p w odpowiednich układach współrzędnych obu elementów.

Równania typu (2.21) stanowią trzecią grupę równań, która wspólnie z równaniami równowagi umożliwi rozwiązanie każdego przekroju poprzecznego. Przeszaczenia każdej ścianki da się zawsze wyznaczyć przez przeszaczenia ξ, η, φ tego elementu, w skład którego wchodzi dana ścianka, zatem niewiadomymi wielkościami będą zawsze przeszaczenia elementów (w ogólnym przypadku trzy składowe dla każdego elementu), kąty obrotu krawędzi ψ (kąty zniekształcenia) potrzebne do określenia kątów obrotu Θ oraz siły krawędziowe ścinające \bar{t} . Ponieważ pochodne przeszaczeń są wyłącznie parzystego rzędu, zaś siły ścinające występują wyłącznie pod znakiem całki lub pierwszej pochodnej, zatem każde równanie spełnione będzie przez przyjęcie dla wszystkich niewiadomych geometrycznych (ξ, η, φ i ψ) zmienności podług funkcji $\sin \alpha_n x$; zaś dla sił ścinających zmienności podług funkcji $\cos \alpha_n x$. Tak przyjęte funkcje spełnią poza tym wszystkie warunki brzegowe, wynikające z wolnego podparcia pręta i swobody spaczenia jego przekrojów skrajnych, mianowicie:

$$(2.22) \quad \text{dla } x = 0, x = l \quad \xi = \eta = \varphi = \xi'' = \eta'' = \varphi'' = \psi = 0.$$

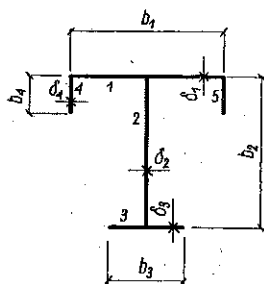
Po skreśleniu we wszystkich równaniach funkcji $\sin \alpha_n x$ otrzymamy ostatecznie układ równań jednorodnych; przyrównanie do zera jego wyznacznika da warunek wybozeniowy w postaci równania przestępnego, w którym niewiadomą będzie współczynnik k odpowiadający krytycznej wartości σ_{kr} naprężeń normalnych osiowego ściskania σ_0 .

W przypadku pręta o prostym przekroju poprzecznym niewiadome były jedynie wielkości geometryczne ξ, η, φ i wobec tego metoda miała charakter metody odkształceń, zaś wszystkie równania były równaniami równowagi. W przypadku pręta o przekroju złożonym dochodzą według przedstawionej powyżej teorii również niewiadome statyczne \bar{t}_i , którym odpowiadają równania natury geometrycznej — równania zgodności odkształceń; zmienia to charakter metody, która staje się tu metodą mieszaną. Oczywiście nie nastęrcza żadnych trudności opracowanie «czyste» metody odkształceń również dla prętów o prze-

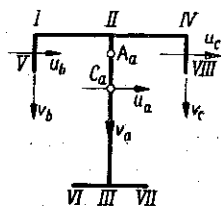
krojach złożonych. Niewiadomymi byłyby wówczas funkcje ξ , η , φ , ψ oraz, dodatkowo, funkcje przemieszczeń osiowych ϑ poszczególnych elementów. Odpowiednie równania otrzymalibyśmy z warunków zgodności naprężeń normalnych σ i stycznych τ wzdłuż krawędzi połączenia elementów. Jak widać sposób ten jest mniej dogodny, ponieważ daje większą ilość niewiadomych.

3. Przykłady zastosowania rozwiązań ścisłych; przekrój dwuteowy wzmocniony

Jako przykład rozpatrzmy wyboczenie przekroju dwuteowego wzmocnionego symetrycznymi płaskownikami. Rysunek 8 przedstawia numerację ścianek; rysunek 9 — podział na trzy elementy oznaczone literami a , b i c , to znaczy na dwuteownik i dwa płaskowniki; oraz przyjęte układy współrzędnych u , v .



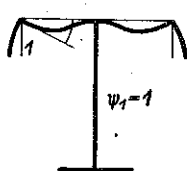
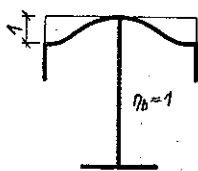
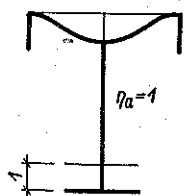
Rys. 8



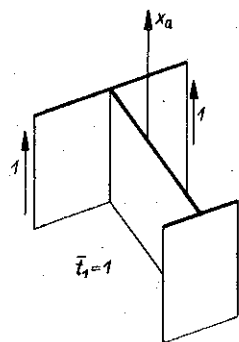
Rys. 9

Punkt C_a na rys. 9 oznacza środek ciężkości elementu a , to znaczy dwuteownika bez wzmocnień, zaś punkt A_a — jego środek zginania. Rozpatrzmy oddzielnie dwie możliwe postaci wyboczenia: symetryczną (wyboczenie giętne) i antysymetryczną (wyboczenie giętno-skrętne). W obu wypadkach wystarczy rozważyć połowę przekroju poprzecznego wykorzystując przy tym symetrię układu.

Wyboczenie symetryczne. Przy wyboczeniu symetrycznym będziemy mieli $\xi_a = \varphi_a = 0$, przy tym zniekształcenie przekroju musi być symetryczne.



Rys. 10



Rys. 11

Przyjęte w związku z tym stany jednostkowych przemieszczeń przedstawia rys. 10. Ze względu na symetrię odkształceń niewiadome siły ścinające, dzia-

lające wzdłuż krawędzi I i IV, przyjmiemy symetryczne, przy czym dodatnie kierunki oddziaływania na dwuteownik pokazano na rys. 11. Mamy zatem dla dwuteownika a : $\sum \bar{t}_a = 2\bar{t}_1$, dla płaskowników b i c : $\sum \bar{t}_b = -\bar{t}_1$.

Równania równowagi ścianek 1 i 3 będą spełnione tożsamościowo wskutek symetrii odkształceń.

Równanie równowagi ścianki 2 przedstawia się według (2.13) następująco:

$$(3.1) \quad EA_2 k \zeta_2'' + EI_2 \zeta_2^{IV} - \frac{1}{2} Eb_2 S_u^{(2)} \eta_a^{IV} - b_2 \Delta t^{(2)'} - p_2 = 0;$$

podobnie otrzymamy dla ścianki 4:

$$(3.2) \quad EA_4 k \zeta_4'' + EI_4 \zeta_4^{IV} - b_4 \Delta t^{(4)'} - p_4 = 0.$$

Wielkości $\Delta t^{(2)}$ i $\Delta t^{(4)}$ wyrażamy za pomocą wzoru (2.15) przez niewiadomą \bar{t}_1 :

$$(3.3) \quad \Delta t^{(2)} = \bar{t}_1 \chi_{21}, \quad \Delta t^{(4)} = \bar{t}_1 \chi_{41},$$

przy czym współczynniki χ odczytamy z wykresu sił ścinających Δt_1 od obciążenia $\bar{t}_1 = 1$.

Dla konstrukcji tego wykresu na konturze dwuteownika zakładamy na ściankach kierunek obejścia konturu s (rys. 12) i przyjmujemy punkt I jako początkowy — w punkcie tym mamy $\Delta t_1 = t_0 = -1$. Dalej korzystamy ze wzoru (2.10); w punkcie II z lewej strony będziemy mieli

$$\Delta t_1 = -1 + \frac{1}{2} \frac{A_1}{A_a} 2 = \frac{A_1}{A_a} - 1;$$

w tym samym punkcie z prawej strony

$$\Delta t_1 = -1 + \frac{A_a - \frac{1}{2} A_1}{A_a} 2 = 1 - \frac{A_1}{A_a},$$

zaś w punkcie IV

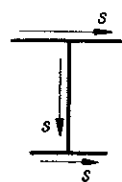
$$\Delta t_1 = -1 + \frac{A_a}{A_a} 2 = 1.$$

Jak widać, wykres Δt_1 na półce jest antysymetryczny; wynika to zresztą z symetrii obciążenia $\bar{t}_1 = 1$ oraz antysymetrii dodatnich kierunków s dla obu połówek półki i mogło być przyjęte jako założenie. Ponieważ kierunek s na środniku jest przedłużeniem kierunku s na lewej części półki, wobec tego dla środnika będziemy mieli $t_0 = -2$, zatem w punkcie II z dołu otrzymamy

$$\Delta t_1 = -2 + \frac{A_1}{A_a} 2 = 2 \left(\frac{A_1}{A_a} - 1 \right),$$

zaś w punkcie III z góry

$$\Delta t_1 = -2 + \frac{A_a - A_3}{A_a} 2 = -2 \frac{A_3}{A_a}.$$



Rys. 12

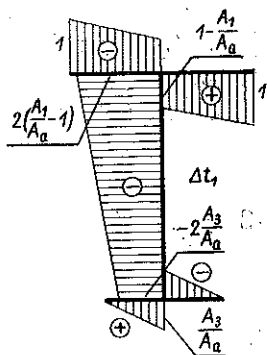
Wykres na półce dolnej będzie również antysymetryczny, przy czym w punkcie III z prawej strony będziemy mieli

$$\Delta t_1 = -2 + \frac{A_a - \frac{1}{2}A_3}{A_a} \cdot 2 = -\frac{A_3}{A_a},$$

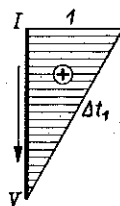
zaś w punktach końcowych otrzymamy wartości zerowe, co jest sprawdzeniem prawidłowości otrzymanego wykresu. Wykres Δt_1 dla dwuteownika przedstawia rys. 13. Obliczamy z niego χ_{21} jako średnią wartość Δt_1 dla środnika:

$$\chi_{21} = \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{A_1}{A_a} - 1 \right) - 2 \frac{A_3}{A_a} \right] = - \left(1 + \frac{A_3 - A_1}{A_a} \right).$$

Podobny wykres dla elementu b (ścianka 4) przedstawia rys. 14; przy założonym kierunku s mamy w punkcie I: $t_0 = 1$, zaś na drugim końcu wartość zerową; zatem otrzymujemy $\chi_{41} = 1/2$.



Rys. 13



Rys. 14

Równania równowagi krawędzi II oraz III spełnione są tożsamościowo wskutek symetrii odkształceń. Pozostaje zatem równanie dla krawędzi I:

$$(3.4) \quad m_{I-V} + m_{I-II} = 0.$$

W celu wyznaczenia momentów w równaniu (3.4) oraz obciążeń p w równaniach (3.2) i (3.1) określamy przemieszczenia brzegowe dla odkształcających się płytowo ścianek. Biorąc pod uwagę umowę o znakach według rysunków 6 i 7 otrzymamy dla lewej połowy górnej półki

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Delta_{sym} = \frac{1}{2}(\eta_b + \eta_a), & \Delta_{antys} = \frac{1}{2}(\eta_b - \eta_a), \\ \Theta_{sym} = \frac{1}{2}\psi_1, & \Theta_{antys} = \frac{1}{2}\psi_1; \end{cases}$$

podobnie dla ścianki 4

$$(3.6) \quad \Delta = 0, \quad \Theta = \psi_1,$$

zaś dla lewej połowy półki dolnej

$$(3.7) \quad \Delta = -\eta_a, \quad \Theta = 0.$$

Podstawiając odpowiednio wielkości (3.5) do równań (2.17) i (2.18) oraz (3.6) i (3.8) do (2.19) otrzymamy:

$$(3.8) \quad p_2 = 2D_1 \left[-\alpha_n^3 \frac{1}{2} (\eta_b + \eta_a) R_{Ds}^{(1)} + \alpha_n^3 \frac{1}{2} (\eta_b - \eta_a) R_{Ds}^{(1)} - \right. \\ \left. -\alpha_n^2 \frac{1}{2} \psi_1 R_{\Theta s}^{(1)} + \alpha_n^2 \frac{1}{2} \psi_1 R_{\Theta a}^{(1)} \right] - 2D_3 \alpha_n^3 \eta_a R_D^{(3)},$$

$$(3.9) \quad p_4 = -D_1 \left[\alpha_n^3 \frac{1}{2} (\eta_b + \eta_a) R_{Ds}^{(1)} + \alpha_n^3 \frac{1}{2} (\eta_b - \eta_a) R_{Da}^{(1)} + \alpha_n^2 \frac{1}{2} \psi_1 (R_{\Theta s}^{(1)} + R_{\Theta a}^{(1)}) \right],$$

$$(3.10) \quad m_{I-V} = D_4 \alpha_n \psi_1 M_{\Theta}^{(4)},$$

$$(3.11) \quad m_{I-II} = D_1 \left[\alpha_n^3 \frac{1}{2} (\eta_b + \eta_a) M_{Ds}^{(1)} + \alpha_n^3 \frac{1}{2} (\eta_b - \eta_a) M_{Da}^{(1)} + \alpha_n^2 \frac{1}{2} \psi_1 (M_{\Theta s}^{(1)} + M_{\Theta a}^{(1)}) \right].$$

Czwartym i ostatnim równaniem będzie równanie zgodności odkształceń elementów a i b . Otrzymamy tu według (2.21)

$$\frac{1}{EA_a} \int_0^x \sum \bar{t}_a dx - \eta_a'' e = \frac{1}{EA_b} \int_0^x \sum \bar{t}_b dx - \eta_b'' \frac{b_4}{2}$$

lub

$$(3.12) \quad -\eta_b'' \frac{b_4}{2} + \eta_a'' e - \frac{1}{E} \left(\frac{2}{A_a} + \frac{1}{A_b} \right) \int_0^x \bar{t}_1 dx = 0.$$

Podstawiając wielkości p i m według wzorów (3.7) - (3.11) do równań (3.1), (3.2) i (3.4), uwzględniając (3.3) i podstawiając $\xi_2 = \eta_a$, $\xi_4 = \eta_b$, otrzymamy ostatecznie układ czterech równań jednorodnych, w którym niewiadomymi funkcjami są: η_b , η_a , ψ_1 i \bar{t}_1 . Zakładając dalej

$$(3.13) \quad \begin{cases} \eta_b = C_1 \sin \alpha_n x, & \eta_a = C_2 \sin \alpha_n x, \\ \psi_1 = C_3 \sin \alpha_n x, & \bar{t}_1 = C_4 \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \end{cases}$$

dochodzimy po wykonaniu całkowania w równaniu (3.12) oraz różniczkowań do układu czterech równań liniowych i jednorodnych ze względu na stałe C_1, \dots ,

C_4 , którego macierz przedstawiona jest w tablicy 1³. Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje warunek wyboczeniowy w postaci nader skomplikowanego równania przestępnego.

Tablica 1

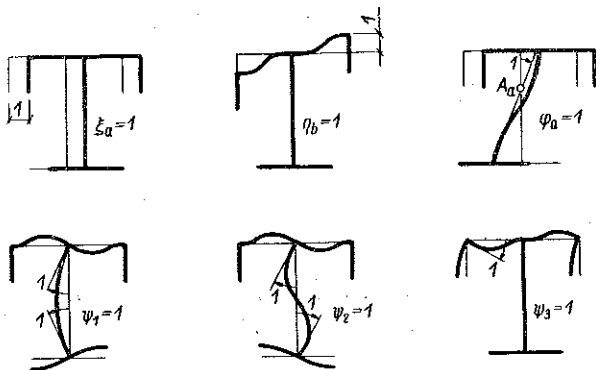
η_b	η_a	ψ_1	\bar{t}_1
$\alpha_n^4 I_4 + \alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} \times$ $\times (R_{D_s}^{(1)} + R_{D_a}^{(1)}) - \alpha_n^2 A_4 k$	$\alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{D_s}^{(1)} - R_{D_a}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta_s}^{(1)} +$ $+ R_{\theta_a}^{(1)})$	$\alpha_n \frac{b_4}{2}$
$\alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{D_s}^{(1)} - R_{D_a}^{(1)})$	$\alpha_n^4 \left(\frac{1}{2} I_2 - \frac{1}{4} b_2 S_u^{(2)} \right) +$ $+ \alpha_n^3 \frac{1}{24(1-\nu^2)} [\delta_1^3 (R_{D_s}^{(1)} +$ $+ R_{D_a}^{(1)}) + 2\delta_3^3 R_D^{(3)}] -$ $- \frac{1}{2} \alpha_n^2 A_4 k$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta_s}^{(1)} -$ $- R_{\theta_a}^{(1)})$	$\alpha_n \frac{1}{2} \chi_{21} b_2$
$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{D_s}^{(1)} + M_{D_a}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{D_s}^{(1)} - M_{D_a}^{(1)})$	$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} \left[\delta_4^3 M_{\theta}^{(4)} +$ $+ \frac{1}{2} \delta_1^3 (M_{\theta_s}^{(1)} + M_{\theta_a}^{(1)}) \right]$	
$\alpha_n \frac{1}{2} b_4$	$-\alpha_n e$		$-\frac{1}{\alpha_n^2} \left(\frac{1}{A_4} + \frac{2}{A_a} \right)$

Wyboczenie antysymetryczne. W przypadku tym należy przyjąć wszystkie składowe symetryczne odkształceń równe zero. Różne od zera pozostają jedynie składowe antysymetryczne, które pokazano na rys. 15. Siły ścinające w krańcach I i IV będą również działać antysymetrycznie (rys. 16); mamy zatem dla elementu a : $\Sigma \bar{t}_a = 0$, dla elementu b : $\Sigma \bar{t}_b = -\bar{t}_1$.

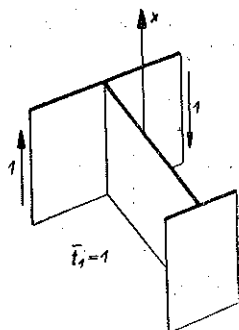
Jak widać, stan $\varphi_a = 1$ nie odpowiada ściśle definicji; mianowicie według definicji jest to obrót nieodkształcalnego dwuteownika wokół środka zginania. Przyjęcie tego stanu według rys. 15 (podobnie zresztą jak stanu $\eta_a = 1$ według rys. 10) jest możliwe, ponieważ zniekształcenie przekroju prostego nie wpływa bezpośrednio na rozkład naprężeń normalnych stycznych wywołanych tymi

³ Trzy pierwsze równania podzielono przez E , wyrazy czwartej kolumny pomnożono przez E , drugie równanie podzielono przez 2, czwarte równanie podzielono przez α_n .

stanami, a tylko te wielkości wchodzą do naszych równań. Przyjęcie ściśle odpowiadające definicji prowadzi do bardziej skomplikowanych wzorów dla niektórych wyrazów wyznacznika, który jednak da się drogą czysto formalnych przekształceń doprowadzić do prostszej postaci otrzymanej w tej pracy.



Rys. 15



Rys. 16

Równanie równowagi ścianki 2 spełnia się tożsamościowo; dla pozostałych ścianek otrzymamy:

ścianka 1
 (3.14) $EA_1 k \zeta_1'' + EI_1 \zeta_1^{IV} - b_1 \Delta t^{(1)'} - p_1 = 0;$

ścianka 3
 (3.15) $EA_3 k \zeta_3'' + EI_3 \zeta_3^{IV} - b_3 \Delta t^{(3)'} - p_3 = 0;$

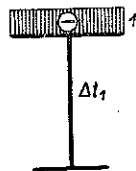
ścianka 4
 (3.16) $EA_4 k \zeta_4'' + EI_4 \zeta_4^{IV} - b_4 \Delta t^{(4)'} - p_4 = 0.$

Wykres Δt_1 dla dwuteownika przedstawia rys. 17, dla ścianki 4 wykres jest identyczny z otrzymanym dla symetrii (rys. 14). Wynikają stąd następujące zależności:

$$\chi_{II} = -1, \quad \chi_{3I} = 0, \quad \chi_{4I} = \frac{1}{2},$$

zatem będziemy mieli

(3.17) $\Delta t^{(1)} = -\bar{t}_1, \quad \Delta t^{(3)} = 0, \quad \Delta t^{(4)} = \frac{1}{2} \bar{t}_1.$



Rys. 17

Równania równowagi krawędzi przedstawiają się następująco:
 dla krawędzi I

(3.18) $m_{I-V} + m_{I-II} = 0;$

dla krawędzi II

(3.19) $m_{II-I} + m_{II-IV} + m_{II-III} = 0;$

dla krawędzi III

(3.20) $m_{III-II} + m_{III-VI} + m_{III-VII} = 0.$

Przemieszczenia brzegowe wynoszą dla lewej części górnej półki

$$(3.21) \quad \begin{cases} \Delta_{sym} = \frac{1}{2} \eta_b, & \Delta_{antys} = \frac{1}{2} \eta_b, \\ \Theta_{sym} = \frac{1}{2} (\psi_3 - \psi_1 - \psi_2), & \Theta_{antys} = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3); \end{cases}$$

dla ścianki 4

$$(3.22) \quad \Delta = -\xi_a - a_1 \varphi_a, \quad \Theta = \psi_3;$$

dla środniaka

$$(3.23) \quad \begin{cases} \Delta_{sym} = -\xi_a + \frac{1}{2} \varphi_a (a_3 - a_1), & \Delta_{antys} = -\frac{1}{2} \varphi_a (a_3 + a_1), \\ \Theta_{sym} = \psi_1, & \Theta_{antys} = \psi_2. \end{cases}$$

Korzystając dalej odpowiednio ze wzorów (2.17)-(2.19) otrzymujemy, po podstawieniu do nich wielkości określonych wzorami (3.21)-(3.23),

$$p_1 = D_2 \left[\alpha_n^3 \left(R_{\Delta s}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi_a - R_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi_a \right) + \alpha_n^2 (R_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 + R_{\Theta a}^{(2)} \psi_2) \right] + \\ + 2D_4 \left[\alpha_n^3 R_{\Delta}^{(4)} (-\xi_a - a_1 \varphi_a) + \alpha_n^2 R_{\Theta}^{(4)} \psi_3 \right],$$

$$p_3 = D_2 \left[\alpha_n^3 \left(R_{\Delta s}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi_a + R_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi_a \right) + \alpha_n^2 (R_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 - R_{\Theta a}^{(2)} \psi_2) \right],$$

$$p_4 = -D_1 \left\{ \alpha_n^3 \left(R_{\Delta s}^{(1)} \frac{1}{2} \eta_b + R_{\Delta a}^{(1)} \eta_b \right) + \alpha_n^2 \left[R_{\Theta s}^{(1)} \frac{1}{2} (\psi_3 - \psi_1 - \psi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + R_{\Theta a}^{(1)} \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \right] \right\},$$

$$m_{I-V} = D_4 \left[\alpha_n^3 M_{\Delta}^{(4)} (-\xi_a - a_1 \varphi_a) + \alpha_n M_{\Theta}^{(4)} \psi_3 \right],$$

$$m_{I-II} = D_1 \left\{ \alpha_n^2 \left(M_{\Delta s}^{(1)} \frac{1}{2} \eta_b + M_{\Delta a}^{(1)} \frac{1}{2} \eta_a \right) + \right. \\ \left. + \alpha_n \left[M_{\Theta s}^{(1)} \frac{1}{2} (\psi_3 - \psi_1 - \psi_2) + M_{\Theta a}^{(1)} \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \right] \right\},$$

$$m_{II-I} = m_{II-IV} = D_1 \left\{ \alpha_n^2 \left(-M_{\Delta s}^{(1)} \frac{1}{2} \eta_b + M_{\Delta a}^{(1)} \frac{1}{2} \eta_b \right) + \right. \\ \left. + \alpha_n \left[M_{\Theta s}^{(1)} \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + M_{\Theta a}^{(1)} \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \right] \right\},$$

$$m_{II-III} = D_2 \left\{ \alpha_n^2 \left[M_{\Delta s}^{(2)} \left(-\xi_a + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi_a \right) - M_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi_a \right] + \alpha_n (M_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 + M_{\Theta a}^{(2)} \psi_2) \right\},$$

$$m_{III-II} = D_2 \left\{ \alpha_n^2 \left[-M_{\Delta s}^{(2)} \left(\xi_a - \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi_a \right) - M_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi_a \right] + \right. \\ \left. + \alpha_n (-M_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 + M_{\Theta a}^{(2)} \psi_2) \right\},$$

$$m_{III-VI} = m_{III-VII} = D_3 \alpha_n M_{\Theta}^{(3)} (\psi_2 - \psi_1).$$

Tablica 2

C. d. tabl. 2 na s. 822

ξ_a	φ_a	η_b
$\alpha_n^4 I_1 + \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} [\delta_2^3 R_{Ds}^{(2)} + 2\delta_4^3 R_{Da}^{(4)}] - \alpha_n^2 A_1 k$	$\alpha_n^4 a_1 I_1 + \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} \left[2\delta_4^3 a_1 R_{Da}^{(4)} - \delta_2^3 \left(\frac{a_3 - a_1}{2} R_{Ds}^{(2)} + \frac{1}{2} b_2 R_{Da}^{(2)} \right) \right] - \alpha_n^2 A_1 a_1 k$	
$\alpha_n^4 I_3 + \alpha_n^3 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{Ds}^{(2)} - \alpha_n^2 A_3 k$	$-\alpha_n^4 a_3 I_3 - \alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) R_{Ds}^{(2)} + b_2 R_{Da}^{(2)}] + \alpha_n^2 A_3 a_3 k$	
		$\alpha_n^4 I_4 + \alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{Ds}^{(1)} + R_{Da}^{(1)}) - \alpha_n^2 A_4 k$
$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} (M_{Ds}^{(2)} + M_{Da}^{(2)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) M_{Ds}^{(2)} - b_2 M_{Da}^{(2)}]$	$\alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{12(1-\nu^2)} (M_{Da}^{(1)} - M_{Ds}^{(1)})$
$\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} (M_{Ds}^{(2)} - M_{Da}^{(2)})$	$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) M_{Ds}^{(2)} + b_2 M_{Da}^{(2)}]$	
$-\alpha_n^2 \frac{\delta_4^3}{12(1-\nu^2)} M_{Da}^{(4)}$	$-\alpha_n^2 \frac{\delta_4^3}{12(1-\nu^2)} a_1 M_{Da}^{(4)}$	$\alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{Ds}^{(1)} + M_{Da}^{(1)})$
$\alpha_n^2 \frac{1}{2} b_1$	$\alpha_n^2 \frac{1}{2} b_1 a_1$	$-\alpha_n^2 \frac{1}{2} b_4$

Powyżej podane wartości obciążeń p i momentów m należy podstawić do równań równowagi (3.14)-(3.16) oraz (3.17)-(3.19). Ostatnim równaniem jest równanie zgodności odkształceń. Otrzymamy według wzoru (2.21)

$$(3.24) \quad -\frac{1}{EA_4} \int_0^x \bar{t}_1 dx - \eta_b'' \frac{b_4}{2} = -\xi_a'' \frac{b_1}{2} + \varphi_a'' \omega_1,$$

gdzie $\omega_1 = -a_1 b_1 / 2$.

ψ_1	ψ_2	ψ_3	\bar{t}_1
$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{\theta s}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 \frac{\delta_4^3}{6(1-\nu^2)} R_{\theta}^{(4)}$	$-\alpha_n b_1$
$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{\theta s}^{(2)}$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a}^{(2)}$		
$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta a}^{(1)} - R_{\theta s}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta a}^{(1)} - R_{\theta s}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta s}^{(1)} + R_{\theta a}^{(1)})$	$\alpha_n \frac{1}{2} b_4$
$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} [\delta_2^3 M_{\theta s}^{(2)} + \delta_1^3 (M_{\theta s}^{(1)} + M_{\theta a}^{(1)})]$	$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} [\delta_2^3 M_{\theta a}^{(2)} + \delta_1^3 (M_{\theta s}^{(1)} + M_{\theta a}^{(1)})]$	$\alpha_n \frac{\delta_1^3}{12(1-\nu^2)} (M_{\theta a}^{(1)} - M_{\theta s}^{(1)})$	
$-\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} (\delta_2^3 M_{\theta s}^{(2)} + 2\delta_3^3 M_{\theta}^{(3)})$	$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} (\delta_2^3 M_{\theta a}^{(2)} + 2\delta_3^3 M_{\theta}^{(3)})$		
$\alpha_n \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{\theta a}^{(1)} - M_{\theta s}^{(1)})$	$\alpha_n \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{\theta a}^{(1)} - M_{\theta s}^{(1)})$	$\frac{\alpha_n}{24(1-\nu^2)} [2\delta_4^3 M_{\theta}^{(4)} + \delta_1^3 (M_{\theta s}^{(1)} + M_{\theta a}^{(1)})]$	
			$\frac{1}{\alpha_n} \frac{1}{A_4}$

Podstawiając do otrzymanych w ten sposób siedmiu równań jednorodnych niewiadome funkcje w postaci

$$\xi_a = C_1 \sin \alpha_n x, \quad \varphi_a = C_2 \sin \alpha_n x, \quad \eta_b = C_3 \sin \alpha_n x,$$

$$\psi_1 = C_4 \sin \alpha_n x, \quad \psi_2 = C_5 \sin \alpha_n x, \quad \psi_3 = C_6 \sin \alpha_n x, \quad \bar{t}_1 = C_7 \cos \alpha_n x,$$

dochodzimy do układu siedmiu równań liniowych i jednorodnych ze względu na stałe C , którego macierz przedstawiono w tablicy 2⁴.

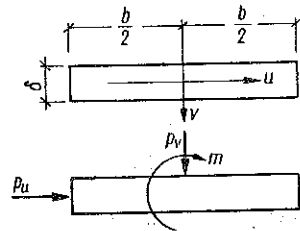
⁴ Pierwsze sześć równań podzielono przez E , wyrazy siódmej kolumny pomnożono przez E .

4. Metoda uproszczona

Przedstawiona w poprzednich rozdziałach metoda ścisła pozwala na obliczenie naprężeń krytycznych przez rozwiązanie równania przestępnego, które otrzymuje się z rozwinięcia odpowiedniego wyznacznika układu równań jednorodnych. W pracach przygotowawczych, to znaczy przy obliczaniu współczynników tego układu równań (wyrazów wyznacznika), najbardziej żmudne i pracochłonne jest obliczanie współczynników $M_{A_0}, M_{\Theta_0}, \dots, R_A, R_{\Theta}$, występujących we wzorach (2.17)-(2.19). Przy tym współczynniki dotyczące płyty symetrycznie lub antysymetrycznie odkształconej [równania (2.17)-(2.18)] są dane prostszymi wzorami niż współczynniki dotyczące płyty o brzegu swobodnym [równania (2.19)]. Obliczania właśnie tych bardziej skomplikowanych współczynników można często uniknąć stosując metodę uproszczoną.

Metoda ta polega na przyjęciu nieodkształcalności poprzecznej niektórych ścianek; założenie takie pozwala traktować je jako pręty i w prosty sposób wyznaczyć reakcje w zależności od przemieszczeń. Założenie nieodkształcalności jest z reguły dopuszczalne dla ścianek zewnętrznych, to znaczy dla ścianek krańcowych konturu przekroju poprzecznego, ponieważ swobodna krawędź takich ścianek, jak również ich duża przeważnie w porównaniu ze ściankami wewnętrznymi grubość (np. grubość półek w porównaniu z grubością środka w przekrojach dwuteowym lub ceowym) powodują, iż odkształcenia poprzeczne są znikome i nie mają większego wpływu na stateczność. Tego rodzaju metoda uproszczona dla przekrojów prostych była porównana z metodą ścisłą w pracy [1], gdzie udowodniono na przykładach, że tylko w przypadkach bardzo cienkich półek blachowych pominięcie ich odkształceń poprzecznych prowadzi do istotniejszych błędów, zresztą i wtedy nie-dużych. W zasadzie stosowanie tej metody jest możliwe tylko dla $n = 1$, to znaczy przy badaniu wpływu odkształcalności przekroju poprzecznego na stateczność ogólną całego pręta. Natomiast przy badaniu stateczności lokalnej z uwzględnieniem odkształceń prętowych stosowanie jej nie jest — ogólnie biorąc — możliwe, ponieważ najmniejsze wartości naprężeń krytycznych otrzymujemy tu z reguły dla dosyć dużych wartości n , z reguły dla $n > 4$. Wówczas długość półfali wyboczenia jest tego samego rzędu co szerokość półki i pominięcie pracy płytowej może prowadzić do dużych błędów.

W niektórych rzadszych wypadkach możliwe jest zastosowanie tej metody również dla ścianek wewnętrznych, mianowicie gdy ich sztywność zginania poprzecznego jest znacznie większa niż ścianek sąsiednich (np. ścianka środkowa na rys. 24 d).



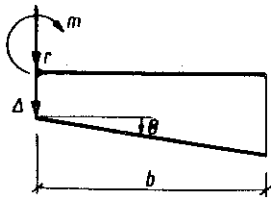
Rys. 18

W celu wyprowadzenia odpowiednich równań, które mają zastąpić w sposób przybliżony równania (2.19), weźmiemy pod uwagę płaskownik (rys. 18) pod działaniem rozłożonych obciążeń p_u i p_v , rozłożonych momentów skręcających \bar{m} oraz siły osiowej $P = \sigma_0 \delta b$. Oznaczenia przemieszczeń i umowy o znakach przyjmujemy identycznie z podanymi na początku rozdziału 2. Z trzech równań równowagi takiego płaskownika jedno jest już wykorzystane jako równanie równowagi ścianki (2.11). Pozostałe dwa dotyczą zginania w płaszczyźnie osi v oraz skręcania i przedstawiają się następująco:

$$(4.1) \quad \begin{cases} EI_u \eta^{IV} + P \eta'' - p_v = 0, \\ (Pr_0^2 - GI_s) \varphi'' - \bar{m} = 0. \end{cases}$$

Wielkość $I_u = b \delta^3 / 12$ oznacza tu moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi u , $I_s = b \delta^3 / 3$ moment bezwładności na skręcanie, zaś biegunowy promień bezwładności dany jest wzorem $r_0^2 = (b^2 + \delta^2) / 12$. Z powyższych dwóch równań można zawsze obliczyć dwie reakcje zewnętrzne płaskownika w zależności od danych przemieszczeń. Rozpatrzmy dokładniej dwa najważniejsze przypadki dotyczące ścianek zewnętrznych, przy czym umowy o znakach i oznaczenia weźmiemy identycznie z przyjętymi przy wprowadzeniu wzorów (2.19), to znaczy według rys. 7.

Przypadek pierwszy (rys. 19). Ścianka doznaje danych przemieszczeń Δ i Θ na jednej krawędzi, podczas gdy druga krawędź jest swobodna. Będziemy tu mieli: $\eta = \Delta + b \Theta / 2$, $\varphi = 0$, $p_v = r$, $\bar{m} = m - br / 2$. Podstawiając powyższe wielkości do równań (4.1), otrzymujemy



Rys. 19

$$EI_u \left(\Delta^{IV} + \frac{b^2}{2} \Theta^{IV} \right) + P \left(\Delta'' + \frac{b}{2} \Theta'' \right) - r = 0,$$

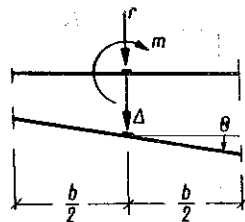
$$(Pr_0^2 - GI_s) \Theta'' - m + \frac{b}{2} r = 0.$$

Z pierwszego z powyższych równań można wyznaczyć reakcję r , następnie zaś podstawiając ją do drugiego można obliczyć moment \bar{m} . Ostatecznie będziemy mieli

$$(4.2) \quad \begin{cases} r = EA \left[\frac{1}{12} \delta^2 \Delta^{IV} + \frac{1}{24} b \delta^2 \Theta^{IV} + k \left(\Delta'' + \frac{b}{2} \Theta'' \right) \right], \\ m = EA \left\{ \frac{1}{12} b \delta^2 \Delta^{IV} + \frac{1}{48} A^2 \Theta^{IV} + \frac{1}{2} b k \Delta'' + \left[\left(\frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{12} \delta^2 \right) k - \frac{\delta^2}{6(1+\nu)} \right] \Theta'' \right\}. \end{cases}$$

Przypadek drugi (rys. 20). Ścianka doznaje wzdłuż osi ciężkości danych przemieszczeń Δ i Θ ; obie krawędzie podłużne są swobodne. Rozwiązanie otrzymujemy wprost z równań (4.1) podstawiając w nich $\eta = \Delta$, $\varphi = \Theta$, $p_v = p_\delta$ oraz $\bar{m} = m$. Będziemy mieli zatem wzory

$$(4.3) \quad \begin{cases} r = EA \left(\frac{1}{12} \delta^2 \Delta^{IV} + k \Delta'' \right), \\ m = EA \left[\frac{1}{12} (\delta^2 + b^2) k - \frac{\delta^2}{6(1+\nu)} \right] \Theta'''. \end{cases}$$



Rys. 20

Jak widać, we wszystkich wzorach występują tylko parzyste pochodne funkcji Δ i Θ , wobec czego stosowanie ich nie zmieni metody rozwiązania podanej w rozdziale trzecim.

5. Przykłady zastosowań metody uproszczonej. Przykład liczbowy

Objasnimy zastosowanie metody uproszczonej na przykładzie wzmocnionego dwuteownika rozpatrzonego poprzednio w rozdziale trzecim. Założymy nieodkształcalność wzmacniających płaskowników (ścianki 4 i 5 na rys. 8), oraz dolnej półki (ścianka 3). Nie będziemy powtarzać tych części wyrowadzenia, które można przejść wprost z rozdziału trzeciego. Omówimy tylko obliczenie tych obciążeń p oraz tych momentów m , które należy wyznaczyć korzystając ze wzorów uproszczonych.

Wyboczenie symetryczne. Założenie nieodkształcalności ścianki 4 zmienia wzór (3.10) przedstawiający moment m_{I-V} . Według drugiego ze wzorów (4.2) otrzymamy przyjmując [por. wzory (3.6)] $\Delta = 0$ oraz $\Theta = \psi_1$:

$$(5.1) \quad m_{I-V} = EA_4 \left\{ \frac{1}{48} A_4^2 \Theta^{IV} + \left[\left(\frac{1}{3} b_4^2 + \frac{1}{12} \delta_4^2 \right) k - \frac{\delta_4^2}{6(1+\nu)} \right] \Theta'' \right\}.$$

Założenie nieodkształcalności ścianki 3 powoduje zmianę wzoru na obciążenie p_2 . Część tego obciążenia pochodząca od reakcji ścianki 3 będzie równa [według pierwszego ze wzorów (4.3), przy podstawieniu $\Delta = -\eta_a$, oraz $\Theta = 0$]

$$(5.2) \quad p = -EA_4 \left(\frac{1}{12} \delta^2 \eta_a^{IV} + k \eta_a'' \right).$$

Macierz układu równań otrzymanego przy uwzględnieniu powyższych zmian przedstawiono w tablicy 3.

Wyboczenie antysymetryczne. Założenie nieodkształcalności ścianki 4 zmieni wzór na moment m_{I-II} , który według (4.2) przy $\Delta = -\xi_a - a_1 \varphi_a$, $\Theta = \psi_3$ przedstawia się następująco:

$$m_{I-V} = EA_4 \left\{ \frac{1}{24} b_4 \delta_4^2 (-\xi_a^{IV} - a_1 \varphi_a^{IV}) + \frac{1}{48} A_4^2 \psi_3^{IV} + \frac{1}{2} b k (-\xi_a'' - a_1 \varphi_a'') + \left[\left(\frac{1}{3} b_4^2 + \frac{1}{12} \delta_4^2 \right) k - \frac{\delta_4^2}{6(1+\nu)} \right] \psi_3'' \right\}.$$

Tablica 3

η_0	η_a	η_s	\bar{t}_1
$\alpha_n^4 I_A + \alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} \times$ $\times (R_{2s}^{(1)} + R_{2a}^{(1)}) - \alpha_n^2 A_4 k$	$\frac{\delta_2^2}{\alpha_n^2} \frac{1}{24(1-\nu^2)} (R_{2s}^{(1)} - R_{2a}^{(1)})$	$\frac{\delta_1^3}{\alpha_n^2} \frac{1}{24(1-\nu^2)} (R_{6s}^{(1)} + R_{6a}^{(1)})$	$\frac{1}{\alpha_n} \frac{b_4}{2}$
$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{2s}^{(1)} - R_{2a}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \left(\frac{1}{2} I_2 - \frac{1}{4} b_2 S_u^{(2)} + A_3 \delta_2^2 \right) +$ $+ \alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{2s}^{(1)} + R_{2a}^{(1)}) -$ $\frac{1}{2} - \alpha_n^2 (A_2 + A_3) k$	$\frac{\delta_1^3}{\alpha_n^2} \frac{1}{24(1-\nu^2)} (R_{6s}^{(1)} - R_{6a}^{(1)})$	$\frac{1}{\alpha_n} \frac{1}{2} \lambda_{2A} b_2$
$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{2s}^{(1)} + M_{2a}^{(1)})$	$\frac{\delta_1^3}{\alpha_n^2} \frac{1}{24(1-\nu^2)} (M_{2s}^{(1)} - M_{2a}^{(1)})$	$\frac{1}{48} \alpha_n^4 A_4^3 - \alpha_n^2 A_4 \left[\left(\frac{1}{3} b_4^2 + \frac{1}{12} \delta_4^2 \right) k - \right.$ $\left. - \frac{\delta_4}{6(1+\nu)} \right] + \alpha_n \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{6s}^{(1)} + M_{6a}^{(1)})$	$\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{1}{A_4} + \frac{2}{A_6} \right)$
$\frac{1}{\alpha_n} \frac{b_4}{2}$	$-\alpha_n e$		

Z tej samej przyczyny ulega zmianie wzór na część obciążenia p_1 pochodzącą od reakcji ścianek 4 i 5.

Otrzymamy według (4.2), co następuje:

$$p = 2EA_4 \left[\frac{1}{12} \delta_4^2 (-\xi_a^{IV} - a_1 \varphi_a^{IV}) + \frac{1}{24} b_4 \delta_4^2 \psi_3^{IV} + (-\xi_a'' - a_1 \varphi_a'') k \right].$$

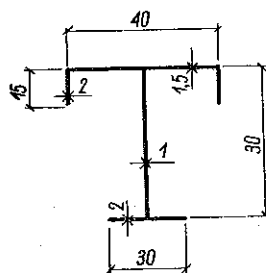
Założenie nieodkształcalności ścianki 3 zmieni momenty m_{III-VI} oraz $m_{III-VII}$, których sumę obliczymy teraz według drugiego ze wzorów (4.3) przyjmując $\Theta = \psi_2 - \psi_1$, $\Delta = 0$:

$$m_{III-VI} + m_{III-VII} = EA_3 \left[\left(\frac{1}{3} b_3^2 + \frac{1}{12} \delta_3^2 \right) k - \frac{\delta_3^2}{6(1+\nu)} \right] (\psi_2'' - \psi_1'').$$

Po uwzględnieniu tych zmian otrzymamy układ równań, którego macierz przedstawiona jest w tabelicy 4.

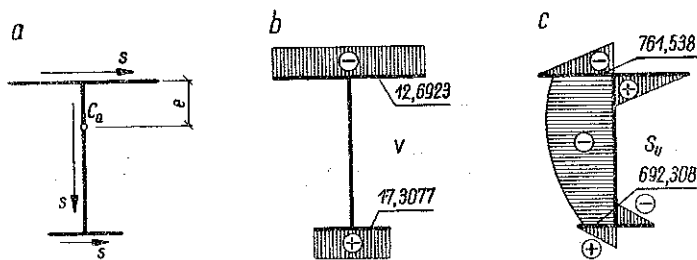
Przykład liczbowy. Obliczymy siłę krytyczną wyboczenia symetrycznego dla pręta o długości $l = 4m$ i przekroju pokazanym na rys. 21 (wymiarzy podano w cm). Założymy, że pręt jest wykonany ze stali, zatem przyjmiemy $\nu = 0,3$. Zadanie rozwiążemy metodą uproszczoną, posługując się tabelicą 3. Biorąc pod uwagę wymiary ścianek otrzymamy

$$\begin{aligned} A_1 &= 60 \text{ cm}^2, & A_2 &= 30 \text{ cm}^2, \\ A_3 &= 40 \text{ cm}^2, & A_4 &= 30 \text{ cm}^2, \\ A_a &= 130 \text{ cm}^2, & \chi_{21} &= -0,846154. \end{aligned}$$



Rys. 21

Dla wyznaczenia wielkości e wydzielamy przekrój dwuteowy (rys. 22a); otrzymamy $e = 12,6923$. Następnie zakładamy dodatnie kierunki s na ściankach — oczywiście zgodnie z przyjętymi do wyprowadzenia wzorów ogólnych, czyli jak na rys. 12 i na podstawie wykresów współrzędnej v (rys. 22b) sporządzamy wykres S_u



Rys. 22

(rys. 22c). Na podstawie tego wykresu obliczamy $S_u^{(2)} = -761,538 - 692,308 = -1453,85 \text{ cm}^3$.

Po podstawieniu powyższych wielkości oraz $n = 1$ do wzorów tabelicy 3 otrzymujemy współczynniki macierzy układu równań dla naszego konkretnego

Tablica 4

ξ_a	φ_a	η_b
$\alpha_n^4 \left(I_1 - \frac{1}{6} A_4 \delta_4^2 \right) +$ $+ \alpha_n^3 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{Ds}^{(2)} -$ $- \alpha_n^2 (A_1 - 2A_4) k$	$\alpha_n^4 \left(I_1 - \frac{1}{6} A_4 \delta_4^2 \right) a_1 -$ $- \alpha_n^3 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) R_{Ds}^{(2)} +$ $+ b_2 R_{Da}^{(2)}] + \alpha_n^2 (A_1 - 2A_4) a_1 k$	
$\alpha_n^4 I_2 + \alpha_n^3 \frac{\delta_2^3}{12(1-\nu^2)} R_{Ds}^{(2)} - \alpha_n^2 A_3 k$	$- \alpha_n^4 a_3 I_3 -$ $- \alpha_n^3 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) R_{Ds}^{(2)} +$ $+ b_2 R_{Da}^{(2)}] + \alpha_n^2 A_3 a_3 k$	
		$\alpha_n^4 I_4 +$ $+ \alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (R_{Ds}^{(1)} + R_{Da}^{(1)}) -$ $- \alpha_n^2 A_4 k$
$- \alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} (M_{Ds}^{(2)} + M_{Da}^{(2)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) M_{Ds}^{(2)} -$ $- b_2 M_{Da}^{(2)}]$	$\alpha_n^3 \frac{\delta_1^3}{12(1-\nu^2)} (M_{Da}^{(1)} - M_{Ds}^{(1)})$
$\alpha_n^4 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} (M_{Ds}^{(2)} - M_{Da}^{(2)})$	$- \alpha_n^2 \frac{\delta_2^3}{24(1-\nu^2)} [(a_3 - a_1) M_{Ds}^{(2)} +$ $+ b_2 M_{Da}^{(2)}]$	
$- \alpha_n^4 \frac{1}{24} A_4^2 \delta_4 + \alpha_n^2 \frac{1}{2} A_4 b_4 k$	$- \alpha_n^4 \frac{1}{24} A_4^2 \delta_4 a_1 + \alpha_n^2 \frac{1}{2} A_4 b_4 a_1 k$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^3}{24(1-\nu^2)} (M_{Ds}^{(1)} + M_{Da}^{(1)})$
$\alpha_n^2 \frac{1}{2} b_1$	$\alpha_n^2 \frac{1}{2} b_1 a_1$	$- \alpha_n^2 \frac{1}{2} b_4$

Tablica 4

ψ_1	ψ_2	ψ_3	\bar{l}_1
$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^2}{12(1-\nu^2)} R_{\theta s}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^2}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 \frac{1}{12} \delta_4 A_4^2 + \alpha_n^2 b_4 A_4 k$	$-\alpha_n b_4$
$-\alpha_n^2 \frac{\delta_2^2}{12(1-\nu^2)} R_{\theta s}^{(2)}$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_2^2}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a}^{(2)}$		
$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^2}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta a}^{(1)} - R_{\theta s}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^2}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta a}^{(1)} - R_{\theta s}^{(1)})$	$\alpha_n^2 \frac{\delta_1^2}{24(1-\nu^2)} (R_{\theta s}^{(1)} + R_{\theta a}^{(1)})$	$\alpha_n \frac{1}{2} b_4$
$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} [\delta_2^2 M_{\theta s}^{(2)} + \delta_1^2 (M_{\theta s}^{(1)} + M_{\theta a}^{(1)})]$	$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} [\delta_2^2 M_{\theta a}^{(2)} + \delta_1^2 (M_{\theta s}^{(1)} + M_{\theta a}^{(1)})]$	$\alpha_n \frac{\delta_1^2}{12(1-\nu^2)} (M_{\theta a}^{(1)} - M_{\theta s}^{(1)})$	
$\alpha_n^2 A_3 \left[\left(\frac{1}{3} b_3^2 + \frac{1}{12} \delta_3^2 \right) k - \frac{\delta_3^2}{6(1+\nu)} \right] + \alpha_n \frac{\delta_2^2}{12(1-\nu^2)} M_{\theta s}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 A_3 \left[\left(\frac{1}{3} b_3^2 + \frac{1}{12} \delta_3^2 \right) k - \frac{\delta_3^2}{6(1+\nu)} \right] + \alpha_n \frac{\delta_2^2}{12(1-\nu^2)} M_{\theta a}^{(2)}$		
$\alpha_n \frac{\delta_1^2}{24(1-\nu^2)} (M_{\theta a}^{(1)} - M_{\theta s}^{(1)})$	$\alpha_n \frac{\delta_1^2}{24(1-\nu^2)} (M_{\theta a}^{(1)} - M_{\theta s}^{(1)})$	$\frac{1}{48} \alpha_n^2 A_4^2 - \alpha_n^2 A_4 \times \left[\left(\frac{1}{3} b_4^2 + \frac{1}{12} \delta_4^2 \right) k - \frac{\delta_4^2}{6(1+\nu)} \right] + \alpha_n \frac{\delta_1^2}{24(1-\nu^2)} (M_{\theta s}^{(1)} + M_{\theta a}^{(1)})$	
			$\frac{1}{\alpha_n} \frac{1}{A_4}$

zadania; współczynniki ⁵ zestawione są w tablicy 5. Współczynnik *k* odpowiadający naprężeniom krytycznym można otrzymać drogą prób podstawiając kolejne wartości *k*, obliczając odpowiadające im wartości wyznacznika i w otrzymanym w ten sposób wykresie odnajdując miejsce zerowe. Należy przy tym korzystać ze wzorów wyprowadzonych w pracy [1], które tu przytaczamy:

$$R_{\theta_s} = M_{\Delta_s} = \frac{\gamma_1(\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{tgh} \bar{p} - \gamma_2(\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q}}{\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$M_{\theta_s} = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$R_{\Delta_s} = - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \operatorname{tg} \bar{q} \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$R_{\theta_a} = M_{\Delta_a} = \frac{\gamma_1(\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_2(\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$M_{\theta_a} = \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \operatorname{tg} \bar{q} \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$R_{\Delta_a} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}{\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}}.$$

Tablica 5

η_b	η_a	ν_1	\bar{t}_1
$0,214033 + 74,8669 \cdot 10^{-4} \times$ $\times (R_{\Delta_s}^{(1)} + R_{\Delta_a}^{(1)}) - 185,055 k$	$74,8669 \cdot 10^{-4} (R_{\Delta_s}^{(1)} - R_{\Delta_a}^{(1)})$	$0,953238 (R_{\theta_s}^{(1)} + R_{\theta_a}^{(1)})$	5890,48
$74,8669 \cdot 10^{-4} (R_{\Delta_s}^{(1)} - R_{\Delta_a}^{(1)})$	$4,57955 + 74,8669 \cdot 10^{-4} \times$ $\times (R_{\Delta_s}^{(1)} + R_{\Delta_a}^{(1)}) - 215,897 k$	$0,953238 (R_{\theta_s}^{(1)} - R_{\theta_a}^{(1)})$	-9968,51
$0,953238 (M_{\Delta_s}^{(1)} + M_{\Delta_a}^{(1)})$	$0,953238 (M_{\Delta_s}^{(1)} - M_{\Delta_a}^{(1)})$	$95,1141 + 121,370 \times$ $\times (M_{\theta_s}^{(1)} + M_{\theta_a}^{(1)}) -$ $-13940,8 k$	
5890,48	-9968,51		$-7,89785 \cdot 10^7$

⁵ Wszystkie równania mnożono przez 10^6 .

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:

$$\bar{p} = \frac{n\pi}{2} \frac{b}{l} \gamma_1, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k} + 1},$$

$$\bar{q} = \frac{n\pi}{2} \frac{b}{l} \gamma_2, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k} - 1}.$$

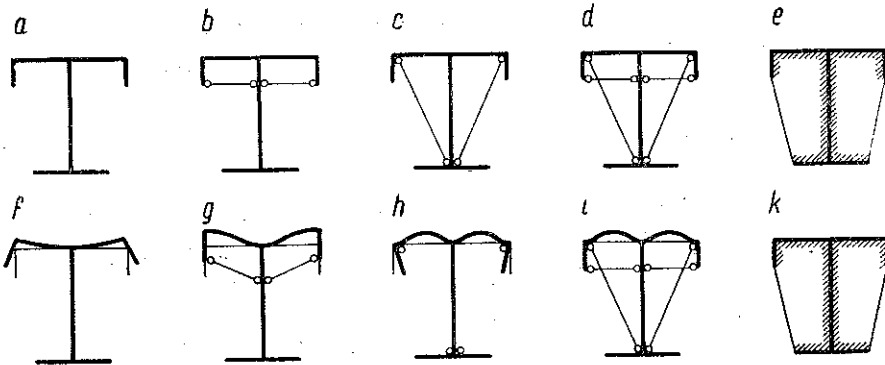
Otrzymamy w ten sposób ostatecznie wartość $k = 7,82 \cdot 10^{-3}$. Wielkość tę należy porównywać ze współczynnikiem odpowiadającym sile krytycznej EULERA $P_E = \pi^2 EI/l^2$, który wynosi $k_E = \pi^2 I/Al^2$, przy czym I jest momentem bezwładności całego przekroju złożonego względem osi głównej równoległej do osi u , zaś A powierzchnią całego przekroju poprzecznego. Podstawiając $I = 26314,2 \text{ cm}^4$ oraz $A = 190 \text{ cm}^2$ otrzymamy $k_E = 8,54 \cdot 10^{-3}$. Zatem zmniejszenie procentowe siły krytycznej, powodowane odkształcalnością przekroju poprzecznego, wynosi w odniesieniu do siły EULERA $\Delta k_E = 8,43 \%$.

Podobne obliczenia wykonano dla tego samego przekroju przyjmując $\delta_1 = 1 \text{ cm}$ oraz $\delta_1 = 2 \text{ cm}$. Wyniki zestawione są w tablicy 6. Widoczny jest szybki wzrost omawianego wpływu przy zmniejszaniu grubości δ_1 , to znaczny

Tablica 6

$\delta_1 \text{ cm}$	1	1,5	2
$k_E \cdot 10^3$	8,54	8,54	8,38
$k \cdot 10^3$	6,48	7,82	8,07
$\Delta k_E \%$	24,1	8,4	3,7

przy zmniejszaniu sztywności płytowej górnej półki. Należy się spodziewać, że podobnie szybki wzrost będzie towarzyszył zwiększaniu szerokości b_1 górnej półki, gdyż oba te czynniki w podobny sposób osłabiają podparcie ścianek 4 i 5.



Rys. 23

Rozpatrzmy jeszcze kilka przypadków szczególnych, mianowicie różne możliwości skrepowania odkształcalności przekroju poprzecznego. Możliwości te zestawione są na rys. 23. Rysunki 23a oraz 23e przedstawiają przypadki

skrajne, mianowicie przekrój o pełnej odkształcalności⁶ oraz przekrój całkowicie nieodkształcalny. Rysunek 23b przedstawia przekrój z nałożonymi więzami uniemożliwiającymi obrót krawędzi I i IV⁷; możliwe zniekształcenie tego przekroju pokazano na rys. 23g. Odpowiednią macierz można otrzymać z macierzy przedstawionej w tabelicy 5 biorąc pod uwagę, że musi tu być $\psi_1 = 0$, zatem należy w niej skreślić trzecią kolumnę i trzeci wiersz. Macierz tę przedstawiono w tabelicy 7. Następny przekrój (rys. 23c) ma więzy, które zmuszają ścianki 4

Tablica 7

η_b	η_a	\bar{z}_1
$0,214033 + 74,8669 \cdot 10^{-4} \times$ $\times (R_{Ds}^{(1)} + R_{Da}^{(1)}) - 185,055 k$	$74,8669 \cdot 10^{-4} (R_{Ds}^{(1)} - R_{Da}^{(1)})$	5890,48
$74,8669 \cdot 10^{-4} (R_{Ds}^{(1)} - R_{Da}^{(1)})$	$4,57955 + 74,8669 \cdot 10^{-4} \times$ $\times (R_{Ds}^{(1)} + R_{Da}^{(1)}) - 215,897 k$	-9968,51
5890,48	-9968,51	$-7,89785 \cdot 10^7$

oraz 5 do ugięć równych ugięciu środniczka 2 (rys. 23h). Odpowiednia macierz (tablica 8) da się uzyskać z tabelicy 5 przez dodanie wyrazów pierwszej kolumny

Tablica 8

$\eta_b = \eta_a$	ψ_1	\bar{z}_1
$4,79538 + 299,468 R_{Ds}^{(1)} - 400,952 k$	$1,90648 R_{Ds}^{(1)}$	-4078,03
$1,90648 M_{Ds}^{(1)}$	$95,1141 + 121,370 (M_{Ds}^{(1)} + M_{Da}^{(1)}) +$ $-13940,8 k$	
-4078,03		$-7,89785 \cdot 10^7$

do wyrazów drugiej kolumny (ponieważ musi być $\eta_a = \eta_b$) oraz przez dodanie wyrazów pierwszego wiersza do wyrazów drugiego wiersza (ponieważ oddzielne warunki równowagi dla ścianek 2, 4 i 5 zastępujemy jednym warunkiem równowagi dla wszystkich ścianek pionowych⁸). Wreszcie więzy nałożone na przekrój pokazany na rys. 23d uniemożliwiają zarówno obrót krawędzi I i IV

⁶ Oczywiście przy założeniu nieodkształcalności ścianek 3, 4, i 5, ponieważ rozwiązanie prowadzimy metodą uproszczoną.

⁷ Zakłada się oczywiście, że więzy są rozłożone w sposób ciągły.

⁸ Przypominamy, że wyrazy drugiego wiersza w tabelicy 5 otrzymano przez podzielenie odpowiednich wyrazów drugiego równania przez 2.

jak i przemieszczenia ścianek 4 i 5 względem ścianki 2 (rys. 23j). Macierz układu dwu równań dla tego wypadku (tablica 9) otrzymamy skreślając w tablicy 5 wyrazy trzeciego wiersza i trzeciej kolumny oraz dodając wyrazy pierwszego

Tablica 9

$\eta_b = \eta_a$	\bar{z}_1
$4,79538 + 299,468 R_{23}^{(1)} - 400,952 k$	$-4078,03$
$-4078,03$	$-7,89785 \cdot 10^7$

wiersza do wyrazów drugiego wiersza i wyrazy pierwszej kolumny do wyrazów drugiej kolumny. Wyniki obliczeń dla opisanych przypadków zestawiono w tablicy 10, przy czym przyjęto wymiary pręta z tablicy 6 dla $\delta = 1,5$ cm.

Tablica 10

Przekrój	a	b	c	d	e
$k \cdot 10^3$	7,82	8,36	8,54	8,54	8,54
Δk_E %	8,4	2,1	0,0	0,0	—

Jak widać, uniemożliwienie obrotu krawędzi powoduje czterokrotne zmniejszenie wpływu odkształcalności przekroju, natomiast nałożenie więzów zmuszających ścianki 4 i 5 do pełnej współpracy z dwuteownikiem likwiduje ten wpływ zupełnie. Powyższe dane są bardzo pouczające, ponieważ wykazują, że w przekrojach złożonych (rys. 23a i 23b) wpływy odkształcalności przekroju są znacznie większe niż w przekrojach prostych (rys. 23c i 23d). Również dla dwuteownika będącego częścią rozpatrywanego przekroju złożonego omawiany wpływ wyrazi się ułamkiem procentu. Przyczyną tak dużych wpływów jest odkształcalność lub niestateczność giętna ścianek dołączonych do przekroju prostego i decydujących o zamianie jego na przekrój złożony.

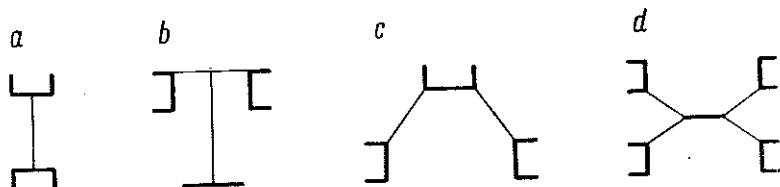
6. Możliwości dalszych uproszczeń. Pręt cienkościenny jako nieodkształcalny element konstrukcji.

Przykład

Metody podane w rozdziałach 2 i 4 prowadzą w bardziej skomplikowanych przypadkach, gdy dla opisanego stanu odkształceń i naprężeń pręta potrzebna jest duża ilość niezależnych wielkości geometrycznych ξ, η, φ, ψ oraz statycznych \bar{z} do wyznaczników wysokich rzędów, co (niezależnie od konieczności obliczania wielu współczynników) stwarza zasadnicze trudności przy obliczaniu naprężeń krytycznych.

Znaczne uproszczenia można uzyskać, gdy dopuszczalne jest założenie nieodkształcalności części przekroju poprzecznego. Przypadek taki zachodzi

wówczas, gdy nieodkształcalność tej części przekroju jest zapewniona przez dostateczną ilość przepon poprzecznych, lub gdy wymiary jej, zwłaszcza grubości ścianek, są w takim stosunku do wymiarów pozostałych elementów konstrukcji, że założenie nieodkształcalności jest wystarczająco uzasadnione. Z tą drugą możliwością będziemy mieli do czynienia między innymi wtedy, gdy rozpatrywana konstrukcja składa się z prętów walcowanych, połączonych stosunkowo szerokimi i cienkimi ściankami blachowymi; każdy pręt walcowany jest wówczas tak sztywny na zniekształcenie w porównaniu z wiotkimi blachami, że może być uważany za zupełnie nieodkształcalny. (Wpływ odkształcalności przekroju na siłę krytyczną dla niezależnie pracujących przekrojów walcowanych wyraża się drobnym ułamkiem procentu (por. [1])). Przykłady tego rodzaju konstrukcji pokazano na rys. 24, przy czym elementy, których odkształcalność może być w omawianych warunkach pominięta, oznaczono grubymi liniami. Należy pamiętać, że niejednokrotnie możliwość przyjęcia nieodkształcalności zależy od charakteru odkształceń przy utracie stateczności. Na przykład, jeżeli przy wyboczeniu symetrycznym przekroju b z rys. 24 możliwe

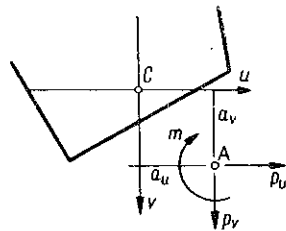


Rys. 24

jest założenie nieodkształcalności dwóch ceowników i teownika (utworzonego ze środka i dolnej półki), to przy wyboczeniu antysymetrycznym (giętno skrętnym) pominięcie odkształcalności środka będzie z reguły wykluczone i można przyjąć jedynie nieodkształcalność ceowników i dolnej półki.

Metoda rozwiązania jest podobna do podanej w rozdziałach 2 i 4. W szczególności konieczne jest wstępny podział konstrukcji na elementy. O ile dotychczas elementy musiały spełniać warunki przekroju prostego, to obecnie ograniczenie to zachowujemy jedynie dla tych elementów, których zniekształcenie decydujemy się uwzględnić. Natomiast elementy nieodkształcalne mogą mieć dowolny przekrój złożony, nawet krzywoliniowy. Wielkościami niewiadomymi w układzie równań będą składowe przemieszczeń ξ , η , φ dla poszczególnych elementów (tak odkształcalnych jak i nieodkształcalnych), siły ścinające \bar{t} , działające wzdłuż krawędzi łączących elementy, oraz kąty obrotu krawędzi ψ (kąty zniekształcenia), występujące oczywiście tylko w elementach odkształcalnych. Równania równowagi ścianek wchodzących w skład elementów odkształcalnych oraz równania równowagi krawędzi należy układać ściśle według zasad wyłożonych w rozdziale drugim, przy czym można uwzględnić możliwości korzystania z metody uproszczonej rozdziału czwartego.

Dalsze równania równowagi dotyczą elementów nieodkształcalnych. Każdy z tych elementów jest prętem cienkościennym obciążonym do chwili wyboczenia siłą osiową, zaś po utracie stateczności — dodatkowo reakcjami oddziaływania sąsiednich elementów konstrukcji. Reakcje te będą to krawędziowe siły ścinające \bar{t} oraz obciążenia i momenty rozłożone wzdłuż krawędzi elementu, które dadzą się sprowadzić do wielkości wypadkowych p_u, p_v i m , które pokazano zgodnie z ich dodatnimi kierunkami działania na rys. 25. Obciążenia p_u i p_v przedstawiają składowe pełnego obciążenia elementu w kierunku osi głównych centralnych u, v , zaś moment m jest momentem wypadkowym wszystkich obciążeń, liczonym względem środka zginania A elementu.



Rys. 25

Równania równowagi pręta cienkościennego poddanego działaniu obciążeń p_u, p_v, m i \bar{t} przedstawiają się jak następuje:

$$(6.1) \quad \begin{cases} EI_v \xi^{IV} = p_u + \sum_i \bar{t}_i \bar{u}_i, \\ EI_u \eta^{IV} = p_v + \sum_i \bar{t}_i \bar{v}_i, \\ EI_w \varphi^{IV} - GI_s \varphi'' = m + \sum_i \bar{t}_i \omega_i. \end{cases}$$

Równania te wyprowadził WŁASOW, [2]. Zmieniono tu jedynie oznaczenia oraz zapis wpływu sił ścinających na ogólniejszy.

Oznaczenia i umowa o znakach przemieszczeń ξ, η, φ są tu identyczne z przyjętymi w rozdziale drugim. Wielkości A, I_w, I_v i I_u przedstawiają kolejno pole powierzchni przekroju poprzecznego, momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności u i v oraz wycinkowy moment bezwładności pręta, zaś $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \omega_i$ współrzędne punktów zaczepienia krawędziowych sił ścinających \bar{t}_i .

Równowaga pręta cienkościennego obciążonego siłą osiową P i doznającego przemieszczeń ξ, η, φ opisana jest trzema równaniami teorii stateczności prętów cienkościennych (por. np. [2]):

$$(6.2) \quad \begin{cases} EI_v \xi^{IV} + P \xi'' + a_v P \varphi'' = 0, \\ EI_u \eta^{IV} + P \eta'' - a_u P \varphi'' = 0, \\ a_v P \xi'' - a_u P \eta'' + EI_w \varphi^{IV} + (r^2 P - GI_s) \varphi'' = 0, \end{cases}$$

w których a_u i a_v oznaczają współrzędne środka zginania A w układzie osi u, v , $I_s = \sum b_i \delta_i^3 / 3$ jest momentem bezwładności przekroju na skręcanie, zaś r biegunowym promieniem bezwładności przekroju względem środka zginania, który można obliczać zatem ze wzoru

$$r^2 = \frac{I_u + I_v}{A} + a_v^2 + a_u^2.$$

Uwzględniając (6.1) i (6.2) otrzymamy równania równowagi nieodkształcalnego elementu cienkościennego znajdującego się jednocześnie pod działaniem siły osiowej P i obciążeń p_u , p_v , m i \bar{t} . Wprowadzając jak w dotychczasowych rozważaniach bezwymiarowy współczynnik $k = P/EA$ będziemy mieli

$$(6.3) \begin{cases} E(I_v \xi^{IV} + Ak\xi'' + a_v Ak\varphi'') = p_u + \sum_i \bar{t}_i \bar{u}_i, \\ E(I_u \eta^{IV} + Ak\eta'' - a_u Ak\varphi'') = p_v + \sum_i \bar{t}_i \bar{v}_i, \\ E \left[I_w \varphi^{IV} + \left(Ar^2 k - \frac{I_s}{2(1+\nu)} \right) \varphi'' + Aa_v k\xi'' - Aa_u k\eta'' \right] = m + \sum_i \bar{t}_i \bar{\omega}_i. \end{cases}$$

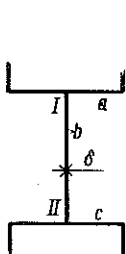
Za pomocą równań (6.3) można wyznaczyć obciążenia p_u , p_v i momenty m przez przemieszczenia ξ , η , φ oraz krawędziowe siły ścinające \bar{t} :

$$(6.4) \begin{cases} p_u = E(I_v \xi^{IV} + Ak\xi'' + a_v Ak\varphi'') - \sum_i \bar{t}_i \bar{u}_i, \\ p_v = E(I_u \eta^{IV} + Ak\eta'' - a_u Ak\varphi'') - \sum_i \bar{t}_i \bar{v}_i, \\ m = E \left[I_w \varphi^{IV} + \left(Ar^2 k - \frac{I_s}{2(1+\nu)} \right) \varphi'' + Aa_v k\xi'' - Aa_u k\eta'' \right] - \sum_i \bar{t}_i \bar{\omega}_i. \end{cases}$$

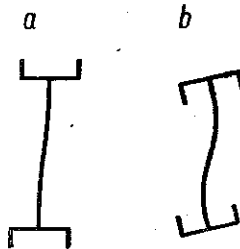
Wyprowadzone równania równowagi nieodkształcalnego elementu można stosować bądź w wersji (6.3), bądź w wersji (6.4). W pierwszym przypadku wielkości p_u , p_v i m należy wyrazić przez przemieszczenia sąsiednich elementów jako reakcje brzegowe ścianek, w drugim zaś obciążenia dane wzorami (6.4) należy podstawiać do równań równowagi sąsiednich elementów lub ścianek.

W ogólnym przypadku dysponujemy zatem trzema grupami równań równowagi: równaniami równowagi ścianek, krawędzi oraz elementów nieodkształcalnych. Ostatnią grupę równań stanowią warunki zgodności odkształceń, które należy zapisywać posługując się wzorem (2.21).

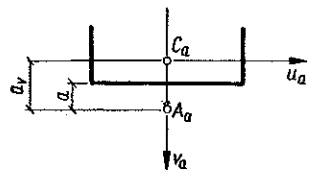
Przykład. Rozpatrzmy bisymetryczny przekrój przedstawiony na rys. 26, składający się z dwu ceowników połączonych blachową ścianką. Mamy tu zatem



Rys. 26



Rys. 27



Rys. 28

trzy elementy. Założymy, że ceowniki a i b są nieodkształcalne, zatem uwzględnimy tylko odkształcalność środka — elementu b . Obliczymy siłę krytyczną wyboczenia skrętnego, które charakteryzuje się antysymetrią odkształceń wzglę.

dem obu osi symetrii (rys. 27), co pozwala na rozpatrywanie jedynie połowy przekroju poprzecznego. Układ współrzędnych dla elementu a pokazano na rys. 28. Wskutek antysymetrii odkształceń ceownika obciążenie p_v będzie równe zeru; to samo dotyczy sił ścinających, działających pomiędzy ceownikami i środnikiem. Ponieważ jednocześnie $a_u = 0$ oraz $\eta_a = 0$, zatem drugie z równań (6.3) dla ceownika spełnia się tożsamościowo. Pozostałe dwa równania zapiszemy jak następuje:

$$(6.5) \quad \begin{cases} E(I_{va}\xi_a^{IV} + A_a k \xi_a'' + a_v A_a k \varphi_a'') = p_u, \\ E \left[I_{\omega a} \varphi_a^{IV} + \left(A_a r_a^2 k - \frac{I_{sa}}{2(1+\nu)} \right) \varphi_a'' + A_a a_v k \xi_a'' \right] = m. \end{cases}$$

Indeksem a oznaczono tu wszystkie wielkości dotyczące elementu a .

W celu określenia wielkości p_u i m wyznaczmy reakcje brzegowe środnika. Przemieszczenia brzegowe krawędzi I środnika wynoszą

$$\Delta = -\xi_a - a\varphi_a, \quad \theta = \varphi_a.$$

Korzystając z równań (2.18) otrzymamy

$$(6.6) \quad \begin{cases} r_{I-II} = D[\alpha_n^2 R_{\Delta a}(-\xi_a - a\varphi_a) + \alpha_n^2 R_{\theta a} \varphi_a], \\ m_{I-II} = D[\alpha_n^2 M_{\Delta a}(-\xi_a - a\varphi_a) + \alpha_n M_{\theta a} \varphi_a]. \end{cases}$$

Biorąc dalej pod uwagę punkty zaczepienia obciążeń p_w , m , r_{I-II} i m_{I-II} (rys. 29) będziemy mieli

(6.7)

$$p_u = r_{I-II}, \quad m = -m_{I-II} + r_{I-II} a.$$

Podstawiając (6.7) do równań (6.5)

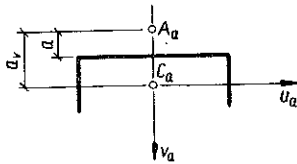
i uwzględniając związki (6.6) otrzymamy ostatecznie układ dwu równań jednorodnych, którego macierz przedstawiono w tabelicy 11.

Tablica 11

ξ_a	φ_a
$\alpha_n^4 I_{va} + \alpha_n^2 \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} - \alpha_n^2 A_a k$	$\alpha_n^3 \frac{\delta^3 a}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} - \alpha_n^2 \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a} - \alpha_n^2 A_a a_v k$
$\alpha_n^2 \frac{\delta^3 a}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} - \alpha_n^2 \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} M_{\Delta a} -$ $- \alpha_n^2 A_a a_v k$	$\alpha_n^4 I_{\omega a} + \alpha_n^2 \frac{\delta^3 a^2}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} -$ $- \alpha_n^2 \frac{\delta^3 a}{6(1-\nu^2)} M_{\Delta a} - \alpha_n^2 \left[A_a r_a^2 k - \frac{I_{sa}}{2(1+\nu)} \right] +$ $+ \alpha_n \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} M_{\theta a}$

(Równanie zgodności odkształceń spełnia się tożsamościowo, ponieważ nie ma sił ścinających pomiędzy środkiem i ceownikami oraz $\eta_a = 0$).

W przypadku przekroju przedstawionego na rys. 27b, przyjmując układ współrzędnych jak na rys. 30, otrzymamy następujące wzory na przemieszczenia krawędzi I środka



Rys. 30

$$\Delta = -\xi_a + a\varphi_a, \quad \theta = \varphi_a,$$

zaś zamiast związków (6.7) będziemy mieli

$$p_u = r_{I-II}, \quad m = -m_{I-II} - r_{I-II}a.$$

Macierz układu równań dla tego przypadku przedstawia tabela 12. Należy pamiętać, że a_v jest tu liczbą ujemną (por. rys. 30), podczas gdy w tabelicy 11 — dodatnią.

Tabela 12

ξ_a	φ_a
$\alpha_n^4 I_{va} + \alpha_n^3 \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} - \alpha_n^2 A_a k$	$-\alpha_n^3 \frac{\delta^3 a}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a} - \alpha_n^2 \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} R_{\theta a} \alpha_n^2 A_a a_v k$
$-\alpha_n^3 \frac{\delta^3 a}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} - \alpha_n \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} M_{\Delta a} -$ $- \alpha_n^2 A_a a_v k$	$\alpha_n^4 I_{\omega a} + \alpha_n^3 \frac{\delta^3 a^2}{12(1-\nu^2)} R_{\Delta a} +$ $+ \alpha_n^2 \frac{\delta^3 a}{6(1-\nu^2)} M_{\Delta a} - \alpha_n^2 \left[A_a r_a^2 k - \frac{I_{sa}}{2(1+\nu)} \right] +$ $+ \alpha_n \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} M_{\theta a}$

Rozpatrzmy przypadek graniczny, mianowicie gdy $\delta \rightarrow 0$; wówczas otrzymamy zarówno z tabelicy 11, jak i z tabelicy 12 następujące równanie kwadratowe do obliczenia współczynnika k :

$$(6.8) \quad (\alpha_n^2 I_{va} - A_a k) \left[\alpha_n^2 I_{\omega a} - A_a r_a^2 k - \frac{I_{sa}}{2(1+\nu)} \right] - A_a^2 \alpha_n^2 k^2 = 0.$$

Jak łatwo stwierdzić, mniejszy z pierwiastków tego równania kwadratowego odpowiada sile krytycznej wyboczenia giętno-skrętnego pręta ceowego danej znanym wzorem WŁASOWA, który przy naszych oznaczeniach ma postać

$$(6.9) \quad P_{kr} = \frac{r_a^2 (P_v + P_\omega) - \sqrt{r_a^4 (P_v + P_\omega)^2 - 4r_a^2 (r_a^2 - a_v^2) P_v P_\omega}}{2(r_a^2 - a_v^2)},$$

$$P_v = \frac{n^2 \pi^2 EI_{va}}{l^2}, \quad P_\omega = \frac{1}{r_a^2} \left(\frac{n^2 \pi^2 EI_{\omega a}}{l^2} + GI_{sa} \right).$$

Przykład liczbowy. Obliczymy siłę krytyczną dla pręta o przekroju pokazanym na rys. 31 i długości $l = 6$ m, przyjmując $\nu = 0,3$, $n = 1$. Otrzymamy tu $a = 3,33005$ cm, $I_{va} = 13513,3$ cm⁴, $I_{sa} = 133,133$ cm⁴, $I_{\omega a} = 150000$ cm⁶, $a_o = 5,33005$ cm, $A_a = 100$ cm², $r_a^2 = 173,075$ cm². Podstawiając powyższe war-

Tablica 13

ξ_a	φ_a
$10,1567 + 0,0131453 R_{Aa} - 2741,55 k$	$0,0437745 R_{Aa} - 2,51058 R_{\theta a} - 14612,6 k$
$0,0437745 R_{Aa} - 2,51058 M_{Aa} - 14612,6 k$	$3135,47 + 0,145771 R_{Aa} + 479,485 M_{\theta a} +$ $-16,7207 M_{Aa} - 474,494 k$

tości do wzorów tablicy 10 otrzymujemy macierz, której wyrazy przedstawia tablica 13. Krytyczna wartość współczynnika k otrzymana drogą prób wynosi tu $k = 2,52 \cdot 10^{-3}$. W celu określenia wpływu odkształcalności przekroju poprzecznego wartość tę należy porównać ze współczynnikiem k_{ω} , odpowiadającym sile krytycznej wyoboczenia skrętnego przekroju nieodkształcalnego, danej znanym wzorem:

$$(6.10) \quad P_{\omega} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\pi^2 EI_{\omega}}{l^2} + GI_s \right),$$

czyli ze współczynnikiem

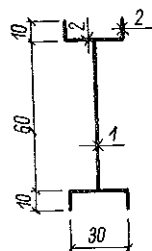
$$(6.11) \quad k_{\omega} = \frac{1}{I_u + I_v} \left(\frac{\pi^2 I_{\omega}}{l^2} + \frac{I_s}{2(1+\nu)} \right),$$

gdzie I_{ω} , I_v , I_u i I_s przedstawiają momenty bezwładności całego przekroju złożonego. Podstawiając do (6.11) $I_u = 116,707$ cm⁴, $I_v = 27031,7$ cm⁴, $I_s = 286,666$ cm⁴, $I_{\omega} = 19,5 \cdot 10^6$ cm⁶, otrzymamy $k_{\omega} = 4,49 \cdot 10^{-3}$, zatem procentowe zmniejszenie siły krytycznej odniesione do wartości k_{ω} wynosi $\Delta k_{\omega} = 43,9\%$.

Analogiczne obliczenia wykonane dla przekroju o tych samych wymiarach, lecz ściankach wzmacniających, umieszczonych wewnątrz (rys. 27b), dają następujące wyniki:

$$k = 4,5 \cdot 10^{-3}, \quad k_{\omega} = 14,60 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta k_{\omega} = 69\%.$$

Jak widać, w obu przypadkach wpływ zniekształcenia przekroju jest bardzo duży. Powodem tego jest duża sztywność giętno-skrętne ceowników utrudniająca ich obrót dokoła środka środknika b , który występuje przy wyoboczeniu skrętnym przekroju nieodkształcalnego. W przypadku przekroju dwuteowego bez wzmocnień, w którym sztywność skrętne półek jest niewielka, wpływ ten prawdopodobnie wynosiłby kilka procent (por. [3]). Nie trudno też uzasadnić dużą różnicę między wynikami otrzymanymi dla obu rozpatrywanych prętów. Mianowicie przyczyną niestateczności skrętnej jest w obu przypadkach niesta-



Rys. 31

течность гнётно-скрутна ceowników. Jak wiadomo, przy wyboczeniu гнётно-скрутным każdy przekrój ceownika obraca się dokoła pewnego punktu, który leży zawsze na osi symetrii ceownika po stronie przeciwnej niż półki. Zatem w pierwszym przypadku środek obrotu leży na środku przekroju złożonego, zaś w drugim na zewnątrz tego przekroju. Powoduje to różny zasadniczo charakter odkształceń przy wyboczeniu obu prętów, które w przypadku bardzo wiotkiego środka mogą mieć wygląd przedstawiony na rys. 27. W rezultacie zniekształcenie przekroju z usztywnieniami wewnętrznymi jest znacznie większe niż przy usztywnieniach zewnętrznych, a zatem jego wpływ na siłę krytyczną uwidacznia się wyraźniej.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. CHUDZIKIEWICZ, *Ogólna teoria stateczności prętów cienkościennych z uwzględnieniem odkształcalności przekroju poprzecznego. Część I. Pręty o prostym przekroju poprzecznym*, Rozpr. inżyn. 3, 8 (1960).

[2] В.З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.

[3] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego pręta dwuteowego*, Rozpr. inżyn. 2, 8 (1960).

Резюме

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Часть II. Стержни со сложным поперечным сечением

Рассматривается теория устойчивости тонкостенных стержней со сложным поперечным сечением (разделение на простые и сложные сечения дается в работе [1]), принимающая все предположения элементарной теории устойчивости, за исключением предположения недеформируемости поперечного сечения. Кроме того предполагается осевое сжатие, многоугольное сечение, упругое состояние, постоянная толщина каждой стенки, свободное опирание, свобода деформации крайних сечений, две диафрагмы на концах стержня, препятствующие деформации опорных сечений. Метод решения подобен примененному в работе [1].

Проводится разделение сложного сечения на элементы удовлетворяющие предположениям простых сечений. Исходя из (2.11) (рис. 4) выводится уравнение равновесия деформированной стенки (2.13). В этом уравнении выступают величины: ζ_r — перемещения стенки r в её плоскости, ξ, η, φ — составляющие перемещения этого элемента, в состав которого входят: данная стенка, $b_r \Delta t^{(r)}$ — сдвиг, возникший под влиянием нагрузки элемента срезающими силами \bar{t} , действующими вдоль края соединения с соседними

элементами и p_r — нагрузка стенки в её плоскости. Перемещения ξ_r можно всегда определить с помощью ξ , η , φ . Второй группой уравнений являются уравнения равновесия края (2.16), а третьей — уравнения согласия осевых деформации (2.21) отдельных элементов вдоль соединяющих их краев. Моменты m_{ik} и нагрузки p_r определяются с помощью перемещений ξ , η , φ и углов поворота края ψ , связанных с деформацией сечения из формул (2.17)-(2.19), выведенных в [1] (ср. рис. 5, 6). Краевые условия (2.22) удовлетворяются всегда путем принятия функции $\sin n\pi x/l$ для геометрических неизвестных ξ , η , φ и ψ и $\cos n\pi x/l$ для неизвестных \bar{t} .

В разделе 3 приводятся примеры решений для симметрической и кососимметрической потери устойчивости сечения из рис. 8. Состояния единичных неизвестных для симметрии даются на рис. 10 и 11, а для асимметрии — на рис. 15 и 16. Получаются системы однородных уравнений (табл. 1 и 2); приравнение их детерминантов к нулю приводит к трансцендентному уравнению, по которому можно определить критическое значение коэффициента $k = \sigma_0/E$, где σ_0 — напряжение осевого сжатия, а E — модуль упругости.

В разделе 4 дается упрощенный метод, в котором не учитывается деформируемость некоторых стенок (в общем внешних стенок), рассматриваемых как стержни (рис. 18). При помощи уравнений равновесия (4.1) выводятся уравнения (4.2) и (4.3), для важнейших с точки зрения практики случаев (рис. 19 и 20).

В разделе 5 решается (табл. 3 и 4) упрощенным методом пример из раздела 3. Численные результаты для симметрической потери устойчивости сопоставлены на табл. 6; уменьшение толщины δ_1 верхней полки вызывает быстрое увеличение влияния Δk_B деформируемости сечения на критические напряжения эйлерового продольного изгиба k_B . На табл. 10 сопоставлены результаты расчетов для сечений с ограниченной деформируемостью (рис. 23). Как из этого видно, главное влияние имеет изгибная деформируемость стенок 4 и 5 — воспрепятствование которой (случай *c* и *d*) является причиной того, что сечение работает, как совершенно недеформируемое (случай *e*).

В разделе 6 представлены возможности дальнейших упрощений, состоящих в принятии недеформируемости целых элементов стержня.

В этом случае исходным пунктом являются уравнения равновесия элементов (6.3), по которым можно определить нагрузки (6.4), рис. 25. В качестве примера решено задачу об изгибной потере устойчивости сечения из рис. 27*a* и 27*b*, в котором в качестве недеформируемых приняты швеллеры, учитывая только деформации стенки. Уменьшение критической силы составляет соответственно 44 и 69%.

В общем, влияние деформируемости сечения на критическую нагрузку в сложных сечениях является гораздо больше чем в простых.

Summary

GENERAL THEORY OF STABILITY OF THIN-WALLED BARS WITH DEFORMABLE CROSS-SECTION

Part II. Bars with Composite Cross-Section

The object of the present paper is the theory of stability of thin-walled bars with composite cross-section (the subdivision into simple and composite being done in the Ref. [1]). All the assumptions of the elementary theory of stability are preserved except that of indeformability of the cross-section. It is assumed in addition that the compression is axial, the cross-section — polygonal, the state of material — elastic, the wall thickness — constant, the support — simple and the end cross-sections — free to warp and prevented from deformation by means of rigid diaphragms. The solution method is similar to that of the Ref. [1].

The cross-section is divided into elements whose features are those of simple cross-sections. Starting from (2.11) (Fig. 4), the equations of equilibrium of the deformed wall (2.13) are derived. In this equation ζ_r is the displacement of the wall r in its plane, ξ, η, φ — the displacement components of the element including the given wall, $b_r \Delta t^{(r)}$ — the shear force due to the loading of the element by the shear forces \bar{t} acting along the edges of contact with the neighbouring elements and p_r — the load acting on the wall in its plane. The displacements ζ_r can always be expressed in terms of ξ, η, φ . The second group of equations are the equations of equilibrium at the edges (2.16), the third — those of compatibility of axial deformations ε of each element along the edges of contact (2.21). The moments m_{ik} and the loads p_r are determined in terms of ξ, η, φ and the rotation angles of the edges ψ due to the deformation of the cross-section are found from the Eqs. (2.17)-(2.19) derived in [1] (Figs. 5 and 6).

The boundary conditions (2.22) are always satisfied by assuming the $\sin n\pi x/l$ type of variability for the geometric unknowns ξ, η, φ, ψ and $\cos n\pi x/l$ for the unknowns \bar{t} . The Sec. 3 contains solution examples for symmetric and anti-symmetric buckling of a profile, Fig. 8. The states of the unit unknowns are illustrated in the symmetric case by Figs. 10 and 11 and in the antisymmetric case by Figs. 15 and 16. Thus a system of homogeneous equations is obtained (Tables 1 and 2); setting the determinant of this system equal to zero we obtain a transcendental equation from which the critical value of the coefficient $k = \sigma_0/E$ can be calculated (σ_0 representing the axial compressive stress and E — YOUNG'S modulus).

In Sec. 4 a simplified method is described in which the deformability of some walls (external walls in general) is disregarded, the walls being treated as bars (Fig. 18). By means of the equations of equilibrium (4.1) the Eqs (4.2) and (4.3) are derived for two important practical cases (Figs. 19 and 20).

In Sec. 5 the example of Sec. 3 is solved by means of the simplified methods (Tables 3 and 4). The numerical results for symmetric buckling are collected in Table 6; the reduction of the thickness δ_1 of the upper flange causes a rapid growth of the influence of deformability of the cross-section on the EULERIAN critical stress. Table 10 shows the results of calculations for cross-section with limited deformability (Fig. 23). It is seen that the flexural deformability of the walls 4 and 5 is of essential importance, its prevention (cases c and d) causing the profile to work as an indeformable one (case e).

Sec. 6 discusses the possibilities of further simplifications consisting in assuming indeformable elements. We start from the equations of equilibrium of the elements (6.3), from which the loads (6.4) can be found, Fig. 25. As an example, the cases of torsional buckling of the profiles of Fig. 27 are solved, the channels being assumed to be indeformable, the web thus remaining the only deformable element. The reduction of the critical force is by 44% and 69%, respectively.

The influence of deformability of the cross-section on the critical load is much greater in general in composite cross-sections than in simple ones.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1960 r.