

JERZY RUTECKI

RÓWNANIA POWŁOKI STOŻKOWEJ TRÓJWARSTWOWEJ
WEWNĄTRZ UZĘBROWANEJ Z LEKKĄ WARSTWĄ
WYPEŁNIAJĄCĄ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXVI

TOM VIII - ZESZYT 4 - ROK 1960

SPIS TREŚCI

- | | |
|-----------------------------------|-----|
| 1. Wstęp | 783 |
| 2. Równania różniczkowe równowagi | 798 |

1. Wstęp

W technice budowy wszelkich lekkich pojazdów szybkich w związku z wymaganą dużą gładkością powierzchni zewnętrznej i odpowiednią wytrzymałością na obciążenia dynamiczne stosujemy coraz częściej warstwowe konstrukcje poszycia.

Tego rodzaju konstrukcje w większości przypadków składają się z dwóch warstw zewnętrznych nośnych, sztywno połączonych z warstwą środkową wypełniającą. Warstwa środkowa może być w zależności od przeznaczenia z blachy falistej, masy plastycznej, masy piankowej, gąbczastej, porowatego kauczuku, drewna itp. materiałów.

Konstrukcja warstwowa odznacza się stosunkowo małym ciężarem, dość znaczną sztywnością giętą, dużą szczelnością oraz brakiem możliwości tworzenia się lokalnych wybrzuszeń.

Warstwy nośne mogą być wykonane ze stali lub stopów aluminiowych posiadających znaczną sztywność. Grubość warstwy nośnej w stosunku do grubości wypełniającej zawiera się w granicach od 0,1 do 0,01. Rola warstwy wypełniającej wskutek znikomo małej sztywności na rozciąganie i odkształcenie postaciowe w płaszczyźnie równoległej do warstwy nośnej sprowadza się w większości przypadków do przekazywania normalnego ciśnienia i sił poprzecznych na warstwę nośną. W przeciwieństwie do nieznacznego odkształcenia postaciowego w płaszczyźnie równoległej do warstwy nośnej poprzeczne posunięcie warstwy środkowej jest dość znaczne i należy je przy obliczeniach uwzględnić. Pominięte natomiast może być poprzeczne posunięcie warstw nośnych, ponieważ grubość ich jest mała w porównaniu do pozostałych wymiarów powłoki.

Należy jednak podkreślić, iż warstwę środkową trzeba każdorazowo w obliczeniach traktować specjalnie, zależnie od roli, jaką powinna ona spełniać, a zatem od rodzaju materiału wypełniającego i jego cech sprężystych.

Może się zdarzyć, jak to ma miejsce w przypadku wypełnienia blachą falistą, że współczynnik sprężystości E w kierunku równoległym do grzbietów i dolin fal jak i współczynnik sprężystości postaciowej G w płaszczyźnie prostopadłej do grzbietów fal mogą być traktowane jako wielkości skończone, natomiast współczynnik G w płaszczyźnie fal może być przyjmowany jako nieskoń-

czenie duży, zaś w płaszczyźnie równoległej do warstw nośnych jako równy zeru.

W ostatnim czasie zagadnieniami powłok w oparciu o teorię cienkich powłok LIAWA, [1], zarówno pod względem teoretycznym, jak i eksperymentalnym zajmowali się B. M. MUSZTARI, [2], W. Z. WŁASOW, [3] i [4], Ju. N. RABOTNOW, [5]. Badania MUSZTARIEGO dotyczą w szczególności powłok anizotropowych. WŁASOW opracował uproszczoną teorię cienkich sprężystych powłok o dowolnym kształcie. Posługując się równaniami ciągłości odkształceń powierzchni środkowej powłoki przedstawił on zagadnienie stateczności powłoki za pomocą dwóch równań, w których nieznanymi funkcjami są funkcje naprężeń i ugięć. RABOTNOW podał układ równań lokalnej utraty stateczności powłok cylindrycznych i sferycznych. Powłokami warstwowymi zajmował się D. Ju. PANOW, [6]. GRIGOLIUK, [7], zajmował się zagadnieniami stateczności powłok ortotropowych posługując się w swych pracach metodą energetyczną.

Na temat powłok warstwowych są również prace L. M. KURSZYNA, [8], oparte o opracowania M. STEINA i J. MAYERA oraz E. REISSNERA, [9] i [10]. W pracach B. M. MUSZTARIEGO i K. E. GALIMOWA, [11], zawarta jest teoria odkształcenia powłoki, równania równowagi przy małych odkształceniach, zależności sprężyste, wariacyjne równania nieliniowej teorii sprężystości powłoki, klasyfikacja zagadnień teorii powłok, uproszczenie podstawowych zależności, ogólna teoria stateczności i dużych ugięć prostokątnych i okrągłych płyt, stateczność i duże ugięcia zamkniętych cylindrycznych i stożkowych powłok, powłok obrotowych i sferycznych.

Zestawienie prac uczonych radzieckich dotyczących ogólnej teorii powłok oraz jej omówienie można znaleźć w pracy B. M. MUSZTARIEGO, [12].

Znane są również prace na temat teorii powłok uczonych innych krajów, spośród których na szczególną uwagę zasługują opracowania A. PFLÜGERA, W. NASHA, A. KRISTEINA, E. WENKA, J. JOSHIMURI i wielu innych.

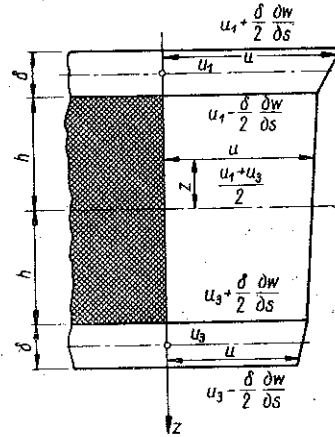
Niniejsza praca zawiera opracowanie równań powłoki trójwarstwowej w oparciu o metody wariacyjne, jako najbardziej nadające się do tego rodzaju zagadnień.

Zanim przejdziemy do rozważań teoretycznych, pokrótce omówimy naszą powłokę. Powłoka posiada warstwy zewnętrzne o jednakowej grubości, wykonane z duraluminium. Po stronie wewnętrznej warstwy duraluminiowej przymocowane zostały listwy drewniane o odpowiedniej grubości oraz położona cienka warstwa specjalnie przygotowanego kleju, na której ułożono walcowane płyty masy pianowo-gąbczastej w ten sposób, aby cała powierzchnia była dokładnie pokryta.

Grubości wspomnianych płyt dobrano tak, aby masa pianowo-gąbczasta po spienieniu się i wypełnieniu całej przestrzeni pomiędzy warstwami zewnętrznymi posiadała odpowiedni ciężar właściwy i była rozłożona w sposób równo-

mierny. Następnie z wierzchu do drewnianych listew przymocowano górną warstwę nośną. W celu uniknięcia wypływania masy z boków podczas jej spieniania się przyłożono drewniane listwy, które po obróbce cieplnej usunięto. Pomiędzy drewniane listwy a masę zazwyczaj wstawiane są pasy papieru, mające na celu zapobieżenie przyklejania się masy do listew.

W odniesieniu do otrzymanej w ten sposób trójwarstwowej powłoki możemy przyjąć, iż warstwa środkowa wypełniająca odkształca się postaciowo, natomiast warstwy nośne mogą przesuwac się względem siebie, a dzięki pewnemu przemieszczeniu się warstwy środkowej zachowana jest ciągłość przemieszczeń między wspomnianymi warstwami nośnymi. Opierając się na powyższym założeniu, określamy zgodnie z rys. 1 przemieszczenia dla każdej z poszczególnych warstw pamiętając o tym, iż chodzić nam będzie o powłokę stożkową z symetrycznie rozłożonymi warstwami na grubości ścianki dla dowolnych kątów tworzącej powłoki o ustalonych własnościach sprężystych i grubościach warstw. Zakładając, że u , v i w są odpowiednimi przemieszczeniami punktu wzdłuż tworzącej, stycznej do obwodu oraz prostopadłej do powierzchni środkowej, a kierunki dodatnie przemieszczeń odpowiadają dodatnim kierunkom osi s , φ i z , znajdziemy dla każdej z poszczególnych warstw:



Rys. 1

warstwa górna $-(h+\delta) \leq z \leq -h$

$$(1.1) \quad \begin{cases} u = u_a + u_\beta - \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial s}, \\ v = v_a + v_\beta - \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{r \partial \varphi}, \\ w = w_1; \end{cases}$$

warstwa dolna $h \leq z \leq h + \delta$

$$(1.2) \quad \begin{cases} u = u_a - u_\beta - \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial s}, \\ v = v_a - v_\beta - \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{r \partial \varphi}, \\ w = w_3; \end{cases}$$

warstwa środkowa wypełniająca $-h \leq z \leq h$

$$(1.3) \quad \begin{cases} u = u_a - \frac{z}{h} \left(u_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial s} \right), \\ v = v_a - \frac{z}{h} \left(v_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right), \\ w = w_2, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.4) \quad \begin{cases} u_a = \frac{u_1 + u_3}{2}, & u_\beta = \frac{u_1 - u_3}{2}, \\ v_a = \frac{v_1 + v_3}{2}, & v_\beta = \frac{v_1 - v_3}{2}. \end{cases}$$

Należy podkreślić, że w naszym przypadku, gdzie mamy do czynienia z warstwą środkową w postaci masy gąbczasto-piankowej lub jej podobnej, zachodzi związek

$$(1.5) \quad \gamma_{sz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi}.$$

Zgodnie z założeniem warstwa środkowa podlega odkształceniu postaciowemu. W przypadku gdy będziemy mieli do czynienia z blachą falistą jako materiałem wypełniającym warstwę środkową, gdzie w płaszczyźnie fali przyjmie się $G = \infty$, wobec czego

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

lub

$$-\frac{1}{h} \left(u_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{\partial w}{\partial s} = 0,$$

to otrzymamy

$$u_\beta = \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial s}.$$

Przy określaniu powyższych wielkości uczyniono założenie, że składowa przemieszczenia w kierunku normalnej do powłoki w jest jednakowa dla wszystkich trzech warstw. Przyjęcie to jest oczywiście pewnym przybliżeniem, słusznym dla powłok o $h/R \ll 1$ przy założeniu, że grubość warstwy środkowej nie ulega zmianie podczas odkształcenia oraz że wielkości u i v dla warstwy środkowej są bardzo małe. Powyższe założenie pociągnie za sobą uwzględnienie dla warstwy środkowej przy ustawianiu ogólnego bilansu energii układu tylko energii odkształcenia postaciowego jako posiadającej istotne znaczenie.

W dalszym postępowaniu przyjmiemy dla odpowiednich odkształceń i kąta odkształcenia postaciowego następujące przybliżone wzory:

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \left(u \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} v \sin \alpha + \right. \\ \left. + w^2 \sin^2 \alpha - 2w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \alpha \right], \\ \gamma_{12} = \frac{1}{r} \left[-v \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \sin \alpha \right) \right]. \end{array} \right.$$

Odrzucając nieliniowe wyrazy otrzymamy znane wyrażenia klasycznej teorii cienkich powłok stożkowych:

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \left(u \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \\ \gamma_{12} = \frac{1}{r} \left(-v \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial s} \right). \end{array} \right.$$

Podstawiając odpowiednie przemieszczenia punktu dowolnej warstwy określone za pomocą wzorów (1.1), (1.2) i (1.3) do wzorów (1.7) otrzymamy odkształcenia względne dla każdej z warstw:

warstwa górna

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{1z} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial s} + \frac{\partial u_\beta}{\partial s} - \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\ \varepsilon_{2z} = \frac{1}{r} \left[\left(u_\alpha \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \varphi} \right) + \left(u_\beta \cos \alpha + \frac{\partial v_\beta}{\partial \varphi} \right) - \right. \\ \left. - \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi^2} \right) \right], \\ \gamma_{12z} = \frac{1}{r} \left[\left(-v_\alpha \cos \alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} \right) + \left(-v_\beta \cos \alpha + \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\beta}{\partial s} \right) \right] - \\ - \frac{2}{r^2} \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right) \left(r \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \alpha \right); \end{array} \right.$$

warstwa dolna

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial s} - \frac{\partial u_\beta}{\partial s} + \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\ \varepsilon_{2z} &= \frac{1}{r} \left[\left(u_\alpha \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \varphi} \right) - \left(u_\beta \cos \alpha + \frac{\partial v_\beta}{\partial \varphi} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi^2} \right) \right], \\ \gamma_{12z} &= \frac{1}{r} \left[\left(-v_\alpha \cos \alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} \right) - \left(-v_\beta \cos \alpha + \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\beta}{\partial s} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right) \left(r \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \alpha \right); \end{aligned} \right.$$

warstwa środkowa

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial s} - \frac{z}{h} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial s} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \\ \varepsilon_{2z} &= \frac{1}{r} \left\{ \left(u_\alpha \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \varphi} \right) - \frac{z}{h} \left[\left(u_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \cos \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \varphi} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi^2} \right) \right] \right\}, \\ \gamma_{12z} &= \frac{1}{r} \left[\left(-v_\alpha \cos \alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} \right) \right] - 2 \frac{z}{h} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v_\beta}{\partial s} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\beta}{r \partial \varphi} - \left(\frac{1}{r} v_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{r^2 \partial \varphi} \right) \frac{\cos \alpha}{2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wzory (1.8), (1.9) i (1.10) możemy przedstawić w uproszczonej postaci: dla warstwy górnej

$$(1.11) \quad \varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 - z_\alpha \kappa_1, \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 - z_\alpha \kappa_2, \quad \gamma_{12z} = \gamma_{12} - 2z_\alpha \kappa_{12},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{1\alpha} + \varepsilon_{1\beta}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{2\alpha} + \varepsilon_{2\beta}, & \gamma_{12} &= \gamma_{12\alpha} + \gamma_{12\beta}, \\ \varepsilon_{1\alpha} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial s}, & \varepsilon_{1\beta} &= \frac{\partial u_\beta}{\partial s}, & z_\alpha &= - \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right), \\ \varepsilon_{2\alpha} &= \frac{1}{r} \left(u_\alpha \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \varphi} \right), & \varepsilon_{2\beta} &= u_\beta \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi}, \\ \gamma_{12\alpha} &= \frac{1}{r} \left(-v_\alpha \cos \alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} \right), & \gamma_{12\beta} &= \frac{1}{r} \left(-v_\beta \cos \alpha + \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\beta}{\partial s} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \kappa_2 &= \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2}, & \kappa_{12} &= \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{r}; \end{aligned}$$

dla warstwy dolnej

$$(1.12) \quad \varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 - z_a \kappa_1, \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 - z_a \kappa_2, \quad \gamma_{12z} = \gamma_{12} - 2z_a \kappa_{12},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{1a} - \varepsilon_{1\beta}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{2a} - \varepsilon_{2\beta}, & \gamma_{12} &= \gamma_{12a} - \gamma_{12\beta}, \\ \varepsilon_{1a} &= \frac{\partial u_a}{\partial s}, & \varepsilon_{1\beta} &= \frac{\partial u_\beta}{\partial s}, & z_a &= \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right), \\ \varepsilon_{2a} &= \frac{1}{r} \left(u_a \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_a}{\partial \varphi} \right), & \varepsilon_{2\beta} &= u_\beta \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi}, \\ \gamma_{12a} &= \frac{1}{r} \left(-v_a \cos \alpha + \frac{\partial u_a}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_a}{\partial s} \right), & \gamma_{12\beta} &= \frac{1}{r} \left(-v_\beta \cos \alpha + \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\beta}{\partial s} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \kappa_2 &= \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2}, & \kappa_{12} &= \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{r}; \end{aligned}$$

dla warstwy środkowej

$$(1.13) \quad \varepsilon_{1z} = \varepsilon_{1a} - z \kappa_1, \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_{2a} - z \kappa_2, \quad \gamma_{12z} = \gamma_{12a} - 2z \kappa_{12},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1a} &= \frac{\partial u_a}{\partial s}, & \varepsilon_{2a} &= \frac{1}{r} \left(u_a \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_a}{\partial \varphi} \right), \\ \gamma_{12a} &= \frac{1}{r} \left(-v_a \cos \alpha + \frac{\partial u_a}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_a}{\partial s} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial s} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \\ \kappa_2 &= \frac{1}{rh} \left[\left(u_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \varphi} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi^2} \right) \right], \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v_\beta}{\partial s} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\beta}{r \partial \varphi} - \left(\frac{1}{r} v_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{r^2 \partial \varphi} \right) \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku odkształcenia powłoki na ściankach elementu pojawiają się w poszczególnych warstwach zgodnie z rys. 2 naprężenia normalne i styczne. Na powyższym rysunku wyodrębnione zostały następujące wielkości siłowe związane z warstwami nośnymi:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{11} + N_{12}, & N_{11} &= N_{1a} + N_{1\beta}, & N_{12} &= N_{1a} - N_{1\beta}, & N_1 &= 2N_{1a}; \\ N_2 &= N_{21} + N_{22}, & N_{21} &= N_{2a} + N_{2\beta}, & N_{22} &= N_{2a} - N_{2\beta}, & N_2 &= 2N_{2a}; \\ T_1 &= T_{11} + T_{12}, & T_{11} &= T_{1a} + T_{1\beta}, & T_{12} &= T_{1a} - T_{1\beta}, & T_1 &= 2T_{1a}; \\ T_2 &= T_{21} + T_{22}, & T_{21} &= T_{2a} + T_{2\beta}, & T_{22} &= T_{2a} - T_{2\beta}, & T_2 &= 2T_{2a}; \\ M_1 &= M_{11} + M_{12}, & M_{11} &= M_{12}, & H_1 &= H_{11} + H_{12}, & H_{11} &= H_{12}; \\ M_2 &= M_{21} + M_{22}, & M_{21} &= M_{22}, & H_2 &= H_{21} + H_{22}, & H_{21} &= H_{22}. \end{aligned}$$

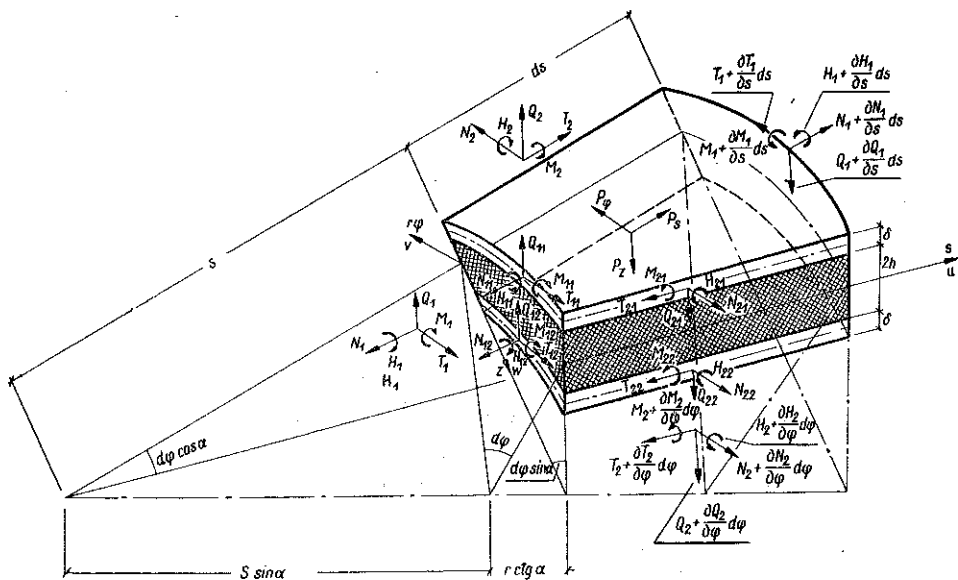
Przyjmując zgodnie z założeniem, że zarówno dolna jak i górna warstwa wykonane są z tego samego materiału, przedstawimy naprężenia normalne w następującej postaci:

warstwa górna i dolna

$$(1.14) \quad \begin{cases} \sigma_{1z} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - z_\alpha (\kappa_1 + \nu \kappa_2)], \\ \sigma_{2z} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - z_\alpha (\kappa_2 + \nu \kappa_1)]; \end{cases}$$

warstwa środkowa

$$(1.15) \quad \begin{cases} \sigma_{1z} = \frac{E_{sr}}{1-\nu_{sr}^2} [\varepsilon_{1a} + \nu_{sr} \varepsilon_{2a} - z (\kappa_1 + \nu_{sr} \kappa_2)], \\ \sigma_{2z} = \frac{E}{1-\nu_{sr}^2} [\varepsilon_{2a} + \nu_{sr} \varepsilon_{1a} - z (\kappa_2 + \nu_{sr} \kappa_1)]. \end{cases}$$



Rys. 2

W naszym przypadku przy rozpatrywaniu nieskończenie małych ugięć warstwa środkowa podlega tylko poprzecznemu posunięciu, nie przenosi natomiast naprężeń normalnych.

Naprężenia styczne dla warstw nośnych wynoszą

$$(1.16) \quad \tau_{12} = \tau_{21} = G(\gamma_{12} - 2z\kappa_{12});$$

naprężenia styczne dla warstwy środkowej

$$(1.17) \quad \tau_{12} = \tau_{21} = G_{sr}(\gamma_{12} - 2z\kappa_{12}).$$

Jest rzeczą oczywistą, że zarówno w wyrazach (1.14) i (1.15) jak i (1.16) oraz (1.17) pod symbolami określającymi wydłużenia względne czy też kąty odkształcenia postaciowego, zmiany krzywizn, należy rozumieć wielkości odniesione do odpowiedniej warstwy, chociaż w niektórych przypadkach dla uproszczenia są one oznaczone tymi samymi symbolami, zgodnie z wyrażeniami (1.11), (1.12) i (1.13).

Wewnętrzne siły działające na jednostkę szerokości przekroju powłoki związane są z naprężeniami następującymi zależnościami:

$$(1.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \sigma_{1z} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz + \int_h^{h+\delta} \sigma_{1z} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz, \\ N_1 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \sigma_{1z} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz + \int_h^{h+\delta} \sigma_{1z} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, \\ M_2 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \sigma_{2z} z dz + \int_h^{h+\delta} \sigma_{2z} z dz + \frac{1}{t} \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} b \sigma_{2z} z dz, \\ N_2 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \sigma_{2z} dz + \int_h^{h+\delta} \sigma_{2z} dz + \frac{1}{t} \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} b \sigma_{2z} dz, \\ H_1 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \tau_{12z} \left(1 - \frac{z}{r}\right) z dz + \int_h^{h+\delta} \tau_{12z} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz, \\ T_1 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \tau_{12z} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz + \int_h^{h+\delta} \tau_{12z} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, \\ H_2 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \tau_{21z} z dz + \int_h^{h+\delta} \tau_{21z} z dz, \\ T_2 = \int_{-(h+\delta)}^{-h} \tau_{21z} dz + \int_h^{h+\delta} \tau_{21z} dz, \end{array} \right.$$

gdzie h_1 jest wysokością zebra oraz $R = r/\sin \alpha$.

Należy zaznaczyć, iż w dalszym postępowaniu, zgodnie z założeniem, nie będziemy brać pod uwagę zarówno naprężeń normalnych jak i stycznych $\tau_{12} = \tau_{21}$ dla warstwy środkowej, uwzględnimy natomiast naprężenia styczne $\tau_{13} = \tau_{31}$ oraz $\tau_{23} = \tau_{32}$.

Ponieważ żebra rozłożone są równomiernie wzdłuż długości powłoki, przeto ilość ich równa jest s/t , gdzie s oznacza długość powłoki, a t odległość pomiędzy żebrami. Na jednostkę długości przypada $1/t$ żeber, siła na jednostkę szerokości żebra wynosi

$$\frac{1}{t} \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} b\sigma_{z_2} dz,$$

moment na jednostkę szerokości żebra równa się

$$\frac{1}{t} \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} b\sigma_{z_2} z dz.$$

W wyrażeniach przedstawiających siły (z wyjątkiem wzoru szóstego) można pominąć wyraz z/R , który dla cienkich powłok jest wielkością małą w porównaniu z jednością. Natomiast w wyrażeniu szóstym czynić tego nie należy ze względu na tożsamość wynikającą z ostatnich trzech równań $T_1 - T_2 + Hz/R = 0$ a uwarunkowaną symetrią tensora naprężeń.

Podstawiając do wzoru (1.18) wyrażenia (1.14) oraz uwzględniając wzory (1.8) i (1.9) otrzymamy po wykonaniu całkowania:

$$(1.19) \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{2E}{(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{12} (\kappa_1 + \nu\kappa_2), \\ N_1 = \frac{2E\delta}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{1a} + \nu\varepsilon_{2a}) = 2N_{1a}, \\ M_2 = -\frac{2E}{(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{12} (\kappa_2 + \nu\kappa_1) + \frac{E}{t} (S_z \varepsilon_{2a} - J_z \kappa_2), \\ N_2 = \frac{2E\delta}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{2a} + \nu\varepsilon_{1a}) + \frac{E}{t} (A_z \varepsilon_{2a} S_z - \kappa_2), \\ \frac{2E\delta}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{2a} + \nu\varepsilon_{1a}) = 2N_{2a}, \end{cases}$$

gdzie $S_z = \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} z b dz$ jest momentem statycznym żebra względem osi obojętnej powłoki, $A_z = bh_1$ jest polem powierzchni przekroju poprzecznego żebra, $J_z = \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} z^2 b dz$ momentem bezwładności przekroju poprzecznego żebra względem osi obojętnej powłoki oraz

$$H_1 = H_2 = -\frac{2E}{(1+\nu)} \frac{\delta^3}{12} \kappa_{12}, \quad T_2 = \frac{E\delta}{1+\nu} \gamma_{12a},$$

$$T_1 = T_2 - \frac{H_2}{R} = \frac{E\delta}{1+\nu} \left(\gamma_{12a} - \frac{2\delta^2}{12R} \kappa_{12} \right).$$

Jest rzeczą oczywistą, że w wyrażeniu określającym N_2 dominującą rolę odgrywa składnik zawierający wielkość $\varepsilon_{2\alpha}$, wobec tego w przypadku małego ν nie popełniając błędu możemy pominąć wyraz zawierający \varkappa_2 . W wyrażeniu na moment M_2 istotny wpływ ma składnik zawierający krzywiznę, można więc pominąć wielkość $\varepsilon_{2\alpha}$:

$$M_1 = -2D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad N_1 = 2B(\varepsilon_{1\alpha} + \nu\varepsilon_{2\alpha}),$$

$$M_2 = -2D(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1) - \frac{E}{t} J_2 \varkappa_2,$$

$$N_2 = 2B(\varepsilon_{2\alpha} + \nu\varepsilon_{1\alpha}) + \frac{E}{t} A_2 \varepsilon_{2\alpha}, \quad H_1 = H_2 = -2D(1-\nu)\varkappa_{12},$$

$$T_1 = B(1-\nu) \left(\gamma_{12\alpha} - \frac{\delta^2}{6R} \varkappa_{12} \right),$$

$$T_2 = B(1-\nu) \gamma_{12\alpha} \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)}.$$

Z powyższych wzorów wynika, że ze względu na symetrię momenty M_{11} i M_{12} są sobie równe, nie zachodzi jednak równość momentów M_{21} i M_{22} (która jest możliwa tylko w przypadku pominięcia żeber), ani też nie zachodzi równość sił N_{11} i N_{12} oraz N_{21} i N_{22} .

W przypadku zastosowania w warstwie wypełniającej materiału o własnościach sprężystych, odpowiadających blasze falistej z grzbietami fal równoległymi do osi s moglibyśmy, ogólnie biorąc, przedstawić wielkości siłowe w następującej postaci;

$$M_1 = -2D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2) - D_{sr}(\varkappa_1 + \nu_{sr}\varkappa_2), \quad N_1 = 2B(\varepsilon_{1\alpha} + \nu\varepsilon_{2\alpha}) + B_{sr}(\varepsilon_{1\alpha} + \varepsilon_{2\alpha}\nu_{sr}),$$

$$M_2 = -2D(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1) - \frac{E}{t} J_2 \varkappa_2, \quad N_2 = 2B(\varepsilon_{2\alpha} + \nu\varepsilon_{1\alpha}) + \frac{E}{t} A_2 \varepsilon_{2\alpha},$$

$$H_1 = H_2 = -2D(1-\nu)\varkappa_{12} - D_{sr}(1-\nu_{sr})\varkappa_{12},$$

$$T_1 = B(1-\nu) \left(\gamma_{12\alpha} - \frac{\delta^2}{6R} \varkappa_{12} \right) + B_{sr}(1-\nu_{sr}) \left(\gamma_{12\alpha} - \frac{h^3}{6R} \varkappa_{12} \right),$$

$$T_2 = B(1-\nu) \gamma_{12\alpha} + B_{sr}(1-\nu_{sr}) \gamma_{12\alpha}.$$

W powyższych wzorach zarówno współczynniki odpowiadające warstwom skrajnym jak i warstwie środkowej muszą być odpowiednio zmienione, ponieważ dla warstwy środkowej z blachy falistej obowiązuje równość podana poprzednio:

$$u_\beta = \left(h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial s}.$$

Chcąc otrzymać równania równowagi rozpatrzmy energię potencjalną zawartą w powłoce podczas jej odkształcenia.

Energia potencjalna zawarta w trójwarstwowej powłoce podczas jej sprężystego odkształcenia składa się z energii rozciągania, odkształcenia postaciowego w płaszczyznach warstw nośnych, zginania warstw nośnych oraz z energii poprzecznego posunięcia warstwy środkowej wypełniającej.

Energia potencjalna warstw nośnych może być przedstawiona w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \pi_1 = & \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\int_{-(h+\delta)}^{-h} (\sigma_{1z} \varepsilon_{1z} + \sigma_{2z} \varepsilon_{2z} + \tau_{12z} \gamma_{12z}) \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \right] r d\varphi ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\int_h^{h+\delta} (\sigma_{1z} \varepsilon_{1z} + \sigma_{2z} \varepsilon_{2z} + \tau_{12z} \gamma_{12z}) \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \right] r d\varphi ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{s}{t} \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} b \sigma_{2z} \varepsilon_{2z} r dz d\varphi. \end{aligned}$$

Wariacja energii warstw nośnych otrzymuje następującą postać:

$$\begin{aligned} (1.20) \quad \delta\pi_1 = & \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\int_{-(h+\delta)}^{-h} (\sigma_{1z} \delta\varepsilon_{1z} + \sigma_{2z} \delta\varepsilon_{2z} + \tau_{12z} \delta\gamma_{12z}) \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \right] r d\varphi ds + \\ & + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\int_h^{h+\delta} (\sigma_{1z} \delta\varepsilon_{1z} + \sigma_{2z} \delta\varepsilon_{2z} + \tau_{12z} \delta\gamma_{12z}) \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \right] r d\varphi ds + \\ & + \int_0^{2\pi} \frac{s}{t} \int_{h+\delta}^{h+\delta+h_1} b \sigma_{2z} \delta\varepsilon_{2z} r dz d\varphi = \\ = & \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[N_{1\alpha} \delta\varepsilon_{1\alpha} + N_{2\alpha} \delta\varepsilon_{2\alpha} + N_{1\beta} \delta\varepsilon_{1\beta} + N_{2\beta} \delta\varepsilon_{2\beta} + \frac{1}{2} (T_{1\alpha} + T_{2\alpha}) \delta\gamma_{12\alpha} + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} (T_{1\beta} + T_{2\beta}) \delta\gamma_{12\beta} + \frac{H}{R} \delta\gamma_{12\alpha} - M_1 \delta\kappa_1 - M_2 \delta\kappa_2 - 2H \delta\kappa_{12} \right] r d\varphi ds + \\ & + \int_0^{2\pi} \frac{s}{t} [b (N_{2\alpha} \delta\varepsilon_{2\alpha} - N_{2\beta} \delta\varepsilon_{2\beta} - M_2 \delta\kappa_2)] r d\varphi. \end{aligned}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości:

$$\varepsilon_{1\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial s}, \quad \varepsilon_{1\beta} = \frac{\partial u_\beta}{\partial s}, \quad \varepsilon_{2\beta} = \frac{1}{r} \left(u_\alpha \cos \alpha - w \sin \alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \varphi} \right),$$

$$\varepsilon_{2\beta} = \frac{1}{r} \left(u_\beta \cos \alpha + \frac{\partial v_\beta}{\partial \varphi} \right),$$

$$\gamma_{12\alpha} = \frac{1}{r} \left(-v_\alpha \cos \alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} \right), \quad \gamma_{12\beta} = \frac{1}{r} \left(-v_\beta \cos \alpha + \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\beta}{\partial s} \right),$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \varkappa_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial s} \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right), \quad \varkappa_{12} = \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{r} \right),$$

po wykonaniu całkowania i odrzuceniu małych wyższego rzędu oraz części energii odpowiadającej odkształceniu zębów (jako nie wpływających na istotę zagadnienia) otrzymamy

$$(1.21) \quad \delta\pi_1 = - \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial s} (rN_{1\alpha}) - N_{2\alpha} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_{2\alpha} - \frac{H_2}{R} \right) \right] \delta u_\alpha + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial s} (rN_{1\beta}) - N_{2\beta} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{2\beta} \right] \delta u_\beta + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} N_{2\alpha} + T_{2\alpha} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial s} r \left(T_{1\alpha} - \frac{H_1}{R} \right) \right] \delta v_\alpha + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} N_{2\beta} + T_{2\beta} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial s} (rT_{1\beta}) \right] \delta v_\beta + \left[rN_{2\alpha} \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} (rM_1) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{r} M_2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{M_2}{r} \right) \cos \alpha + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} (H_1 + H_2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_1 + H_2) \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{r} \right] \delta w \right\} d\varphi ds + \\ + \int_0^{2\pi} \left[rN_{1\alpha} \delta u_\alpha + rN_{1\beta} \delta u_\beta + r \left(T_{1\alpha} - \frac{H_1}{R} \right) \delta v_\alpha + rT_{1\beta} \delta v_\beta + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_1) \delta w - rM_1 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (rM_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} H_2 - M_2 \cos \alpha \right\} \delta w \right]_{s_1}^{s_2} d\varphi + \\ + \int_{s_1}^{s_2} \left[N_{2\alpha} \delta v_\alpha + N_{2\beta} \delta v_\beta + \left(T_{2\alpha} - \frac{H_2}{R} \right) \delta u_\alpha + T_{2\beta} \delta u_\beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} M_2 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (H_2) \delta w + \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} M_2 \right) + \frac{\partial}{\partial s} H_1 + H_2 \frac{\cos \alpha}{r} \right\} \delta w \right]_0^{2\pi} ds - \\ - [(H_1 + H_2) \delta w]_{(2\pi, s_2)} + (H_1 + H_2) \delta w]_{(2\pi, s_1)} + [(H_1 + H_2) \delta w]_{(0, s_2)} - [(H_1 + H_2) \delta w]_{(0, s_1)}.$$

Wariację energii odkształcenia postaciowego warstwy środkowej wypełniającej przedstawimy następująco:

$$(1.22) \quad \delta\pi_2 = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[\int_{-h}^h (\tau_{sz} \delta\gamma_{sz} + \tau_{\varphi z} \delta\gamma_{\varphi z}) \left(1 - \frac{z}{R} \right) dz \right] r d\varphi ds,$$

gdzie

$$\tau_{sz} = G_{sr} \gamma_{sz}, \quad \tau_{\varphi z} = G_{sr} \gamma_{\varphi z}.$$

Kąty odkształcenia postaciowego są odpowiednio równe

$$(1.23) \quad \begin{cases} \gamma_{sz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{2h+\delta}{2h} \left(\frac{2}{2h+\delta} u_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right), \\ \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} = -\frac{2h+\delta}{2h} \left(\frac{2}{2h+\delta} v_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right). \end{cases}$$

Uwzględniając powyższe i całkując przez części otrzymamy po odrzuceniu małych wyższego rzędu

$$(1.24) \quad \frac{\delta \pi_2 2h}{(2h+\delta)^2 G_{sr}} = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{2}{2h+\delta} u_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \frac{2}{2h+\delta} \delta u_\beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{2h+\delta} v_\beta - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \frac{2}{2h+\delta} \delta v_\beta + \left[\frac{2}{2h+\delta} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial s} + \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi} \right) - \nabla^2 w \right] \delta w \right\} r d\varphi ds - \\ - \int_0^{2\pi} \left[r \left(\frac{2}{2h+\delta} u_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \delta w \right]_{s_1}^{s_2} d\varphi - \int_{s_1}^{s_2} \left[r \left(\frac{2}{2h+\delta} v_\beta - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \delta w \right]_0^{2\pi} ds.$$

Wariację pracy sił zewnętrznych określimy za pomocą następującego wzoru:

$$(1.25) \quad \delta \pi_3 = -\delta \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[p_s r u + p_\varphi r v + p_z w \left(r + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + r \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2} w \sin \alpha \right) \right] d\varphi ds - \\ - \delta \int_0^{2\pi} [r N_1 u]_{s_1}^{s_2} d\varphi - \delta \int_{s_1}^{s_2} [r T_1 v]_0^{2\pi} ds.$$

W wyrażeniu na wariację pracy sił zewnętrznych ograniczymy się do wyrazów przemieszczeń u_a , v_a i w , tzn. potraktujemy powłokę w ten sposób, jak gdyby była wykonana trójwarstwowo, ale z materiału o tych samych własnościach sprężystych; założenie powyższe znacznie upraszcza rachunki. Znajdziemy w ten sposób

$$(1.26) \quad \delta \pi_3 = -\delta \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left[p_s r u_a + p_\varphi r v_a + p_z w \left(r + \frac{\partial v_a}{\partial \varphi} + r \frac{\partial u_a}{\partial s} - \frac{1}{2} w \sin \alpha \right) \right] d\varphi ds - \\ - \delta \int_0^{2\pi} [r N_{1a} u_a]_{s_1}^{s_2} d\varphi - \delta \int_{s_1}^{s_2} [r T_{1a} v_a]_0^{2\pi} ds,$$

gdzie p_s , p_φ , p_z są składowymi obciążeń powierzchniowych w kierunkach s , φ i z , których dodatni kierunek odpowiada dodatnim kierunkom osi.

Ostatecznie wyrażenie (1.25) otrzymuje postać

$$(1.27) \quad \delta\pi_3 = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[rp_s - \frac{\partial}{\partial s}(rwp_z) \right] du_\alpha + \left[rp_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}(wp_z) \right] dv_\alpha + \right. \\ \left. + \left[r + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \varphi} + r \frac{\partial u_\alpha}{\partial s} - w \sin \alpha \right] p_z \delta w \right\} d\varphi ds + \\ + \int_0^{2\pi} \left[r(N_{1\alpha} + wp_z) \delta u_\alpha + rT_{1\alpha} \delta v_\alpha \right]_{s_1}^{s_2} d\varphi + \int_{s_1}^{s_2} [(wp_z) \delta v_\alpha]_0^{2\pi} ds.$$

Wariację całkowitej energii powłoki przedstawiamy następująco:

$$\delta\pi_\Sigma = \delta\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta\pi_3 = 0.$$

Po podstawieniu odpowiednich wielkości i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(1.28) \quad \delta\pi_\Sigma = - \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial s}(rN_{1\alpha}) - N_{2\alpha} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_{2\alpha} - \frac{H_2}{R} \right) + rp_s \right] \delta u_\alpha + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial s}(rN_{1\beta}) - N_{2\beta} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{2\beta} - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{si} \left(\frac{2}{2h+\delta} u_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \delta u_\beta + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} N_{2\alpha} + T_{2\alpha} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial s} r \left(T_{1\alpha} - \frac{H_1}{R} \right) + rp_\varphi \right] \delta v_\alpha + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} N_{2\beta} + T_{2\beta} \cos \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial s}(rT_{1\beta}) - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} \left(\frac{2}{2h+\delta} v_\beta - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \right] \delta v_\beta + \right. \\ \left. + \left\{ rN_{2\alpha} \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(rM_1) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{r} M_2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s}(H_1 + H_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi}(H_1 + H_2) \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{r} - \frac{\partial}{\partial s}(M_2) \frac{\cos \alpha}{r} + rp_z - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} \right\} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{2}{2h+\delta} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial s} + \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi} \right) - \nabla^2 w \right] \delta w \right\} d\varphi ds + \\ + \int_0^{2\pi} \left[(2rN_{1\alpha} + rwp_z) \delta u_\alpha + r \left(2T_{1\alpha} - \frac{H_1}{R} \right) \delta v_\alpha + rN_{1\beta} \delta u_\beta + rT_{1\beta} \delta v_\beta + \right. \\ \left. + \left\{ rQ_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} H_1 - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} \left(\frac{2}{2h+\delta} u_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} \delta w - rM_1 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \right]_{s_1}^{s_2} d\varphi + \\ + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left[\left(T_{2\alpha} - \frac{H_2}{R} \right) \delta u_\alpha + (N_{2\alpha} + wp_z) \delta v_\alpha + N_{2\beta} \delta v_\beta + T_{2\beta} \delta u_\beta + \left\{ Q_2 + \frac{\partial}{\partial s} H_2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} \left(\frac{2}{2h+\delta} v_\beta - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \right\} \delta w - \frac{1}{r} M_2 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]_0^{2\pi} ds - [(H_1 + H_2) \delta w]_{(2\pi, s_2)} + \right. \\ \left. + [(H_1 + H_2) \delta w]_{(2\pi, s_1)} + [(H_1 + H_2)]_{(2\pi, s_1)} - [(H_1 + H_2) \delta w]_{(0, s_1)} \right\} = 0.$$

W powyższym wyrażeniu zastąpiliśmy pochodne momentów przez siły poprzeczne; uczyniliśmy to na razie w wyrażeniach odpowiadających warunkom brzegowym, w dalszym postępowaniu wprowadzimy to również i w równaniu podstawowym

$$(1.29) \quad \begin{cases} Q_1 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial s} (rM_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} H_2 - M_2 \cos \alpha \right], \\ Q_2 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} M_2 + \frac{\partial}{\partial s} (rH_1) + H_2 \cos \alpha \right]. \end{cases}$$

2. Równania różniczkowe równowagi

Warunek $\pi_\Sigma = 0$ możemy rozpatrywać jako przyrównanie do zera sumy prac wszystkich sił zarówno wewnętrznych jak i zewnętrznych, przyłożonych do sprężystej powłoki na wszelkich możliwych przesunięciach przygotowanych, które obraliśmy jako wariacje δu_α , δv_α , δw , δu_β i δv_β .

Stąd wynika pięć równań równowagi. Całki druga i trzecia dostarczają odpowiednich warunków na brzegach powłoki. Trzy pierwsze równania mają następującą postać:

$$(2.1) \quad \begin{cases} r \frac{\partial N_{1\alpha}}{\partial s} - N_{2\alpha} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_{2\alpha} - \frac{H_2}{R} \right) + r p_s = 0, \\ -\frac{\partial N_{2\alpha}}{\partial \varphi} + T_{2\alpha} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial s} r \left(T_{1\alpha} - \frac{H_1}{R} \right) + r p_\varphi = 0, \\ N_{2\alpha} \sin \alpha + r \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + r p_a - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} (\vartheta - \nabla^2 w) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\vartheta = \frac{2}{2h+\delta} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial s} + \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi} \right).$$

Dalsze dwa równania mają postać

$$(2.2) \quad \begin{cases} r \frac{\partial N_{1\beta}}{\partial s} - N_{2\beta} \cos \alpha + \frac{\partial T_{2\beta}}{\partial \varphi} - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} \left(\frac{2}{2h+\delta} u_\beta - \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \\ -\frac{\partial N_{2\beta}}{\partial \varphi} + T_{2\beta} \cos \alpha + r \frac{\partial T_{1\beta}}{\partial s} - r \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} \left(\frac{2}{2h+\delta} v_\beta - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) = 0. \end{cases}$$

Pierwsze dwa równania (2.1) w przypadku gdy $p_s = p_\varphi = 0$ będą spełnione przez funkcję naprężeń F , określoną następująco:

$$(2.3) \quad \begin{cases} N_{1\alpha} = \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\cos \alpha}{r}, & N_{2\alpha} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \\ \left(T_{2\alpha} - \frac{H_2}{R} \right) = -\frac{\partial^2 F}{r \partial \varphi \partial s}, & \left(T_{1\alpha} - \frac{H_1}{R} \right) = \frac{\partial^2 F}{r \partial \varphi \partial s} + \frac{\partial F}{r \partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{r}. \end{cases}$$

Podstawiając odpowiednie wartości do równania trzeciego

$$(2.4) \quad \begin{cases} r \frac{\partial Q_1}{\partial s} = \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} (rM_1) + \frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{\partial}{\partial s} (M_2) \cos \alpha \right], \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} M_2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} (rH_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_2) \cos \alpha \right], \end{cases}$$

$$(2.5) \quad \begin{cases} M_1 = -D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), & N_{1\alpha} = B(\varepsilon_{1\alpha} + \nu \varepsilon_{2\alpha}), \\ M_2 = -D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), & N_{2\alpha} = B(\varepsilon_{2\alpha} + \nu \varepsilon_{1\alpha}), \\ H_1 = H_2 = H = -D(1-\nu)\kappa_{12}, & T_{1\alpha} = B \frac{1-\nu}{2} \gamma_{12\alpha} \end{cases}$$

z tym zastrzeżeniem, iż w naszym przypadku

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial s} \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right), \quad \kappa_{12} = \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{r^2 \partial \varphi} \cos \alpha \right)$$

po przekształceniach i uporządkowaniu napiszemy

$$(2.6) \quad D \left\{ \nabla^2 \nabla^2 w - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\cos \alpha}{r} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right] \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \right\} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - p_2 + \frac{(2h+\delta)^2}{2h} G_{sr} (\vartheta - \nabla^2 w) = 0.$$

Uwzględniając wielkości

$$N_{1\beta} = B(\varepsilon_{1\beta} + \nu \varepsilon_{2\beta}), \quad N_{2\beta} = B(\varepsilon_{2\beta} + \nu \varepsilon_{1\beta}), \quad T_{1\beta} = T_{2\beta} = \frac{1-\nu}{2} B \gamma_{12\beta},$$

gdzie

$$\varepsilon_{1\beta} = \frac{\partial u_\beta}{\partial s}, \quad \varepsilon_{2\beta} = u_\beta \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi}, \quad \gamma_{12\beta} = -v_\beta \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial u_\beta}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s},$$

po podstawieniu do równań (2.2) i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{r \partial \varphi \partial s} - \frac{3-\nu}{2} \frac{\partial v_\beta}{r \partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{r} - \\ - u_\beta \left(\frac{\cos^2 \alpha}{r^2} + \frac{2h+\delta}{h} \frac{G_{sr}}{B} \right) + \frac{(2h+\delta)^2}{2h} \frac{G_{sr}}{B} \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_\beta}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\beta}{r \partial \varphi \partial s} + \frac{3-\nu}{2} \frac{\partial u_\beta}{r \partial \varphi} \frac{\cos \alpha}{r} - \\ - v_\beta \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} + \frac{2h+\delta}{h} \frac{G_{sr}}{B} \right) + \frac{(2h+\delta)^2}{2h} \frac{G_{sr}}{B} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Łatwo można zauważyć, że w przypadku $\alpha = 90^\circ$, tj. dla powłoki walcowej powyższe dwa równania, po zróżniczkowaniu pierwszego względem s a drugiego

względem $r\varphi$ i dodaniu stronami, sprowadzają się do jednego równania podanego przez GRIGOLIUKA,

$$\nabla^2 w = (1 - k\nabla^2)\delta.$$

Rugując ze wzorów określających ε_{1a} , ε_{2a} i γ_{12a} przemieszczenia u_a i v_a otrzymujemy równanie zwartości wewnętrznej, warunek nierozdzielności, podany na gruncie teorii sprężystości przez SAINT-VENANTA:

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{1a}}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{2a}}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12a}}{r \partial \varphi \partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} (\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}) \frac{\cos \alpha}{r} - \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\cos \alpha}{r} + \varepsilon_{1a} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} = 0.$$

Uwzględniając wzory (2.5) na N_{1a} , N_{2a} i T_a oraz odrzucając małe wyższego rzędu, przy wykorzystaniu wzorów (2.3) wprowadzamy funkcje naprężeń AIRYEGO; w tym jednak przypadku przyjmujemy $T = -\partial^2 F / r \partial \varphi \partial s$.

Po przekształceniach i uporządkowaniu znajdziemy

$$(2.9) \quad \nabla^2 \nabla^2 F + (1 - \nu^2) \frac{B}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \left[\nu \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} + (1 - \nu^2) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{B}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \frac{\cos \alpha}{r} = 0.$$

W rezultacie otrzymaliśmy układ czterech równań (2.6), (2.7) i (2.9), które, jak widzimy, są równaniami względem czterech szukanych funkcji u_β , v_β , F i w . Do określenia ich sprowadza się postawione przez nas zagadnienie.

Literatura cytowana w tekście

- [1] А. ЛИАВ, *Математическая теория упругости*, ОНТИ, 1936.
- [2] Б. М. МУШТАРИ, *Некоторое обобщение теории тонких оболочек*, Известия физико-математического Общества при Казанском Университете, Т. 11, Серия 8, 1938.
- [3] В. З. ВЛАСОВ, *Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек*, ПММ, Т. 8, изд. 2, 109-140.
- [4] В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек и ей приложения к технике*, Гостехиздат, 1949.
- [5] Ю. Н. РАБОТНОВ, *Локальная устойчивость оболочек*, Доклады АН СССР, Т. 52, Нр. 2, 1946, 111-112.
- [6] Д. Ю. ПАНОВ, *Об устойчивости биметаллической оболочки при нагреве (к теории теплового выключателя)*, ПММ, 2, 5 (1947), 303-318.
- [7] В. И. ГРИГОЛЮК, *О прочности и устойчивости тонкой упругой биметаллической оболочки*, Инженерный сборник, АН СССР, Т. 16.
- [8] Л. М. КУРШИН, *Устойчивость при сжатии трехслойной цилиндрической свободно опертой панели и цилиндра с наполнителем из гофра*, Вопросы расчета элементов авиационных конструкций, Сборник Статей, Нр. 1, 1959.
- [9] E. REISSNER, *Finite Deflection of Sandwich Plates*, J. Aeron. Sci., 7, 15 (1948), 435-440.
- [10] E. REISSNER, *Errata, Finite Deflection of Sandwich Plates*, J. Aeron. Sci., 2, 17 (1950), 125.
- [11] Б. М. МУШТАРИ, К. В. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Татарский книгоиздат, Казань 1957.
- [12] Б. М. МУШТАРИ, *О работах советских ученых по некоторым проблемам теории оболочек*, Chinese J. Mech., 2, 1 (1957).

Резюме

УРАВНЕНИЕ КОНУСНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВНУТРИ РЕБРАМИ С ЛЕГКИМ ВЫПОЛНЯЮЩИМ СЛОЕМ

В настоящей работе выводятся уравнения равновесия трехслойной конусной оболочки. После определения перемещений, деформаций и напряжений в любой точке оболочки — применяется вариационный метод, получая систему пяти уравнений. Для некоторого рода нагрузки после выведения функции Эри составляется система четырех дифференциальных уравнений в частных производных, из которых для случая цилиндрической оболочки легко перейти к системе двух дифференциальных уравнений, определяющих функцию напряжений и прогибов — данных Григолюком.

Summary

EQUATIONS OF A SANDWICH CONICAL SHELL, RIBBED INSIDE, WITH LIGHT FILLING LAYER

Equations of equilibrium of three-layer conical shell are derived. After the determination of the displacement strains and stresses at any point of the shell the variational method is used thus obtaining a system of five equations. For a certain case of load, after the derivation of the AIRY function, a system of four partial differential equations is obtained, from which it is easy in the case of a cylindrical shell to pass to a system of two differential equations obtained by GRIGOLYUK and determining the stress function and the deflection function.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 maja 1960 r.