

GUSTAW RAK

**PODSTAWOWA POSTAĆ DRGAŃ
WALCOWYCH POKRYĆ KRATOWYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXV**

TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	765
2. Określenie postaci drgań metodą sił	766
2.1. Pokrycie kratowe Föppla z sześcioma masami	768
2.2. Pokrycie kratowe z trzema masami	769
3. Pewien sposób określania podstawowej postaci drgań	770
3.1. Postać drgań przy założeniu pionowego kierunku przesuwania się mas	770
3.2. Przykład liczbowy	771
3.3. Postać drgań z uwzględnieniem poziomych składowych przesunięć	773

1. Wstęp

Walcowe pokrycia prętowe znalazły liczne zastosowania w budowie hal fabrycznych, sal widowiskowych, hangarów itp. W większości powyższych przypadków należy liczyć się z obciążeniami dynamicznymi, np. działaniem wiatru, i dlatego znajomość częstotliwości drgań własnych wspomnianych pokryć jest sprawą ważną przy projektowaniu.

Walcowe pokrycia prętowe, w szczególności pokrycia kratowe, przedstawiają układy o wielu stopniach swobody z masami skupionymi w węzłach. Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych takich układów przy zastosowaniu metod ścisłych pociąga za sobą konieczność wykonania bardzo pracowitych obliczeń.

Jedną z metod stosowanych do obliczenia podstawowej częstotliwości drgań własnych układów sprężystych, pozwalającą ominąć pracochłonne obliczenia, jest metoda kolejnych przybliżeń, [1]. Nie wnikając w tym miejscu w jej podstawy teoretyczne należy zaznaczyć, że przy stosowaniu tej metody sprawą istotną jest założenie tzw. postaci drgań, czyli dynamicznej linii lub powierzchni odkształconej charakterystycznej dla częstotliwości podstawowej.

W zasadzie postać drgań i funkcję tę postać opisującą możemy dobrać dowolnie żądając jedynie, aby spełniała warunki brzegowe. W pracach [2] i [3] na wielu przykładach liczbowych wykazano, że przy dość daleko posuniętej dowolności w doborze postaci drgań trzecie lub czwarte przybliżenie dawało dla częstotliwości wynik dokładny z technicznego punktu widzenia. Z drugiej strony należy stwierdzić, że wykonanie każdego następnego przybliżenia związane jest z koniecznością żmudnych obliczeń szczególnie w układach, gdzie wyznaczenie ugięć nie jest łatwe (wyznaczenie częstotliwości w metodzie kolejnych przybliżeń polega na porównaniu ugięć obliczonych w dwu kolejnych przybliżeniach, [1]). Praca rośnie znacznie w przypadkach, gdy dla zwiększenia dokładności porównujemy ugięcia nie w jednym, lecz w kilku punktach. Z tych względów wydaje się celowe poświęcenie dużej uwagi ustaleniu postaci drgań i doborowi funkcji opisującej tę postać. Bliższa analiza jest szczególnie konieczna wtedy, gdy postaci nie można przewidzieć. W tych przypadkach dowolnie przyjęta postać może znacznie odbiegać od rzeczywistej i pociągnąć konieczność szeregu przybliżeń dla uzyskania zadowalającego wyniku.

Walcowe pokrycia prętowe czy pełnościennie należą niewątpliwie do układów, w których trudno jest przewidzieć podstawową postać drgań.

2. Określenie postaci drgań metodą sił

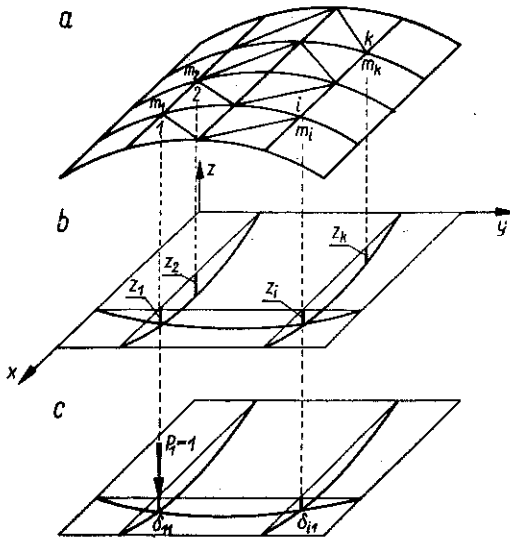
Rozpatrzmy układ przedstawiający schematycznie na rys. 1a walcowe pokrycie obciążone szeregiem mas skupionych.

Zagadnienie dynamiczne, jakim jest obliczenie częstotliwości i ustalenie postaci drgań, możemy sprowadzić do statycznego obciążając badany układ siłami bezwładności.

Przyjmując, że kierunki przesuwania się mas podczas drgań są pionowe, napiszemy wyrażenie na siłę bezwładności w punkcie i

$$(2.1) \quad B_i = -m_i \frac{d^2 Z_i}{dt^2},$$

gdzie $Z_i(x, y, t)$ oznacza wychylenie pionowe punktu i (rys. 1b), m_i masę skupioną w punkcie i .



Rys. 1

Wychylenie każdego punktu zależy w ogólnym przypadku od każdej z sił bezwładności. Całkowite wychylenie danego punktu jest więc sumą wychyleń tegoż punktu, spowodowanych poszczególnymi siłami bezwładności.

Dla układu przedstawionego na rys. 1a możemy napisać następujący układ równań:

$$(2.2) \quad \begin{cases} Z_1 = B_1 \delta_{11} + B_2 \delta_{12} + \dots + B_k \delta_{1k}, \\ Z_2 = B_1 \delta_{21} + B_2 \delta_{22} + \dots + B_k \delta_{2k}, \\ \dots \dots \dots \\ Z_k = B_1 \delta_{k1} + B_2 \delta_{k2} + \dots + B_k \delta_{kk}, \end{cases}$$

gdzie δ_{ik} są współczynnikami zwanymi liczbami wpływu, oznaczającymi pionowe przesunięcie odpowiednich punktów pod wpływem działania siły jednostkowej. Np. δ_{i1} (rys. 1c) oznacza przesunięcie pionowe punktu i , gdy siła jednostkowa jest zaczepiona w punkcie 1.

W odniesieniu do liczb wpływu zachowuje moc twierdzenie MAXWELLA o wzajemności przesunięć: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Wobec zależności (2.1) układ równań (2.2) przekształca się w następujący sposób:

$$(2.3) \quad \begin{cases} Z_1 = - \left(m_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} \delta_{11} + m_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} \delta_{12} + \dots + m_k \frac{d^2 Z_k}{dt^2} \delta_{1k} \right), \\ Z_2 = - \left(m_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} \delta_{21} + m_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} \delta_{22} + \dots + m_k \frac{d^2 Z_k}{dt^2} \delta_{2k} \right), \\ \dots \\ Z_k = - \left(m_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} \delta_{k1} + m_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} \delta_{k2} + \dots + m_k \frac{d^2 Z_k}{dt^2} \delta_{kk} \right). \end{cases}$$

Całki szczególne układu równań (2.3) mają postać

$$(2.4) \quad Z_i = C_i \sin(nt + \psi),$$

gdzie C_i oznacza amplitudę drgań masy i , n częstotliwość kołową drgań oraz ψ kąt przesunięcia fazowego.

Wstawiając (2.4) do (2.3), skracając przez $\sin(nt + \psi)$ oraz dokonując odpowiedniego przekształcenia, otrzymujemy układ równań liniowych jednorodnych ze względu na C_i :

$$(2.5) \quad \begin{cases} (1 - m_1 n^2 \delta_{11}) C_1 - m_2 n^2 \delta_{12} C_2 - \dots - m_k n^2 \delta_{1k} C_k = 0, \\ -m_1 n^2 \delta_{21} C_1 + (1 - m_2 n^2 \delta_{22}) C_2 - \dots - m_k n^2 \delta_{2k} C_k = 0, \\ \dots \\ -m_1 n^2 \delta_{k1} C_1 - m_2 n^2 \delta_{k2} C_2 - \dots - (1 - m_k n^2 \delta_{kk}) C_k = 0. \end{cases}$$

Interesują nas rozwiązania, w których nie wszystkie C_i równają się zeru. Stąd powinien być spełniony warunek

$$(2.6) \quad \Delta(n^2) = \begin{vmatrix} (1 - m_1 n^2 \delta_{11}) & -m_2 n^2 \delta_{12} & \dots & -m_k n^2 \delta_{1k} \\ -m_1 n^2 \delta_{21} & (1 - m_2 n^2 \delta_{22}) & \dots & -m_k n^2 \delta_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_1 n^2 \delta_{k1} & -m_2 n^2 \delta_{k2} & \dots & (1 - m_k n^2 \delta_{kk}) \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to równanie częstotliwości. Rozwijając wyznacznik otrzymujemy równanie algebraiczne k -tego stopnia ze względu na n^2 .

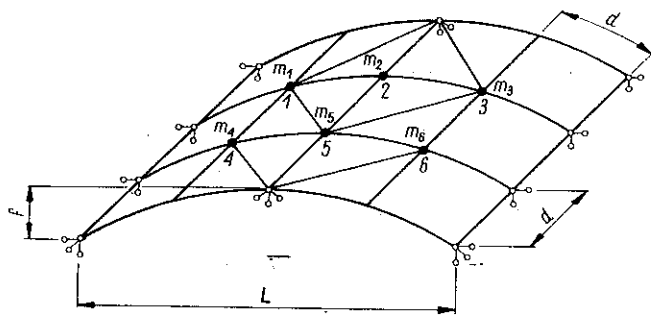
Rozwiązanie tego równania daje kolejne wartości częstotliwości n_1, n_2, \dots, n_k .

Mając wyznaczone częstotliwości możemy dla każdej z nich obliczyć z równań (2.5) stosunki amplitud. Chodzi tu o stosunki jednej z amplitud (obranej za porównawczą) do pozostałych. Wyznaczenie samych amplitud jest niemożliwe, gdyż każde z równań (2.5) jest jednorodne.

Dla określenia odpowiedniej postaci drgań jest wystarczająca znajomość stosunków amplitud odpowiadających danej częstotliwości.

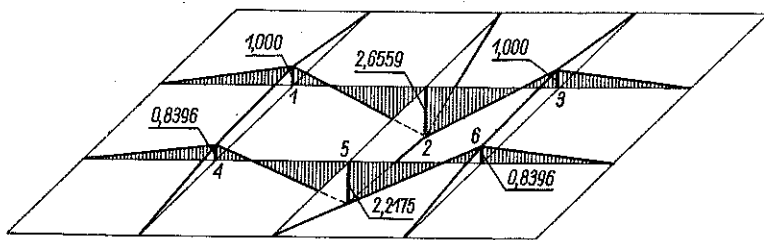
Interesuje nas postać odpowiadająca częstotliwości podstawowej, dlatego do równań (2.5) należy wstawić najmniejszy pierwiastek równania (2.6).

2.1. Pokrycie kratowe (Föppla) z sześcioma masami. W oparciu o metodę sił wyznaczono podstawową częstotliwość i odpowiadającą jej postać drgań dla układu przedstawionego na rys. 2. Jest to tzw. kratownica FÖPPLA.



Rys. 2

Dla uproszczenia rachunku założono, że: (a) kratownica jest wpisana w powierzchnię walcową o kołowym przekroju poprzecznym, (b) oczka siatki jaką tworzą żebra i elementy podłużne są kwadratowe o boku d , (c) EA sztywność podłużna jest stała dla wszystkich prętów, (d) wszystkie masy są równe, (e) w węzłach znajdują się przyguby kuliste. Wyniosłość pokrycia, tzn. $f/L = 0,2$.



Rys. 3

Obliczona częstotliwość podstawowa dla tego przypadku wynosi

$$n = 0,1060 \sqrt{\frac{EA}{md}}$$

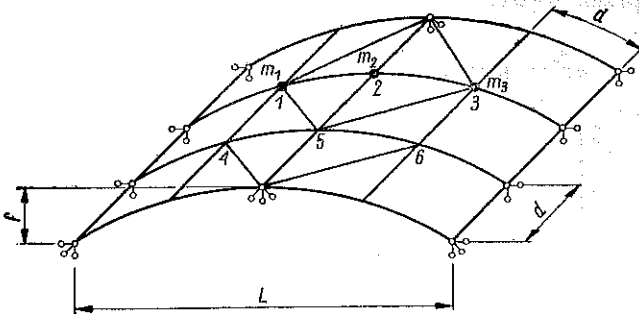
Odpowiadające tej częstotliwości stosunki amplitud przy potraktowaniu amplitudy w p. 1 jako porównawczej, równają się odpowiednio:

$$D_1 = \frac{C_2}{C_1} = -2,6559, \quad D_2 = \frac{C_3}{C_1} = 1,000,$$

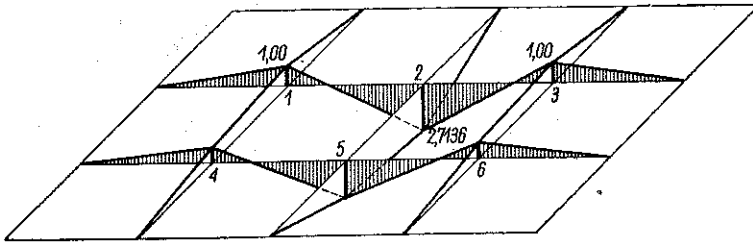
$$D_3 = \frac{C_4}{C_1} = 0,8396, \quad D_4 = \frac{C_5}{C_1} = -2,2175, \quad D_5 = \frac{C_6}{C_1} = 0,8396.$$

Przyjmując $C_1 = 1,00$ wyznaczono podstawową postać drgań. Postać tę przedstawia rys. 3.

2.2. Pokrycie kratowe z trzema masami. Postępując w ten sposób jak w p. 2.1 i zachowując te same założenia rozpatrzono układ analogiczny do rozpatrywanego uprzednio jednak z tą różnicą, że masy zostały skupione w punktach 1, 2, 3 (rys. 4).



Rys. 4



Rys. 5

Podstawowa częstotliwość wynosi tu $n = 0,1291\sqrt{EA/md}$.

Odpowiednie stosunki amplitud równają się

$$D_1 = C_2/C_1 = -2,7136, \quad D_2 = C_3/C_1 = 1,000.$$

Przyjmując $C_1 = 1,000$ wyznaczono postać drgań przedstawioną na rys. 5.

3. Pewien sposób określania podstawowej postaci drgań

3.1. Postać drgań przy założeniu pionowego kierunku przesuwania się mas. Badając postacie drgań ustalone w p. 2.1 i 2.2 stwierdzamy odnośnie przekrojów poprzecznych wzdłuż punktów 1, 2, 3 zupełną identyczność co do kształtu i daleko posunięte podobieństwo, jeżeli chodzi o odpowiednie stosunki amplitud.

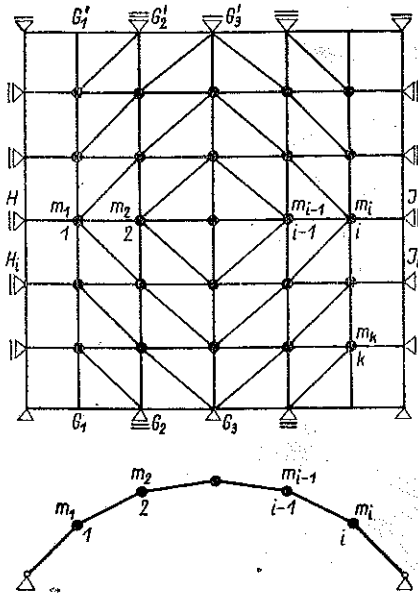
Dla przykładu rozpatrywanego w p. 2.1 otrzymujemy

$$C_1 : C_2 : C_3 = 1,00 : -2,6559 : 1,000,$$

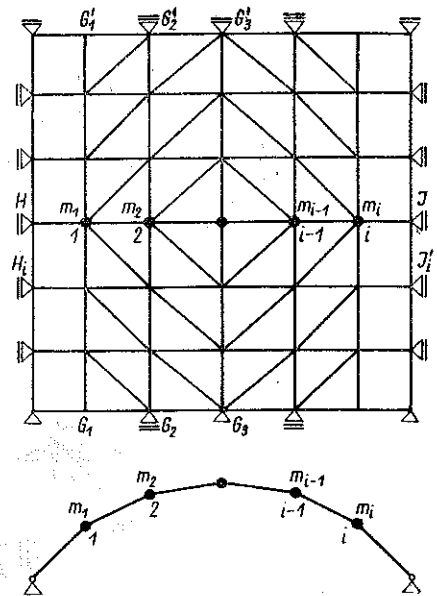
odpowiednio dla przykładu w p. 2.2

$$C_1 : C_2 : C_3 = 1,00 : -2,7136 : 1,000.$$

Spostrzeżenia te nasuwają pewną koncepcję określania podstawowej postaci drgań dla pokryć walcowych obciążonych szeregiem mas skupionych w poszczególnych punktach. Punkty zaczepienia mas tworzą zwykle regularną siatkę wyznaczoną przez węzły.



Rys. 6



Rys. 7

Wspomniana koncepcja polega na tym, że w celu 1) określenia podstawowej postaci drgań dla układu przedstawionego na rys. 6 badamy ten układ przy założeniu, że masy skupione są wzdłuż przekroju poprzecznego na połowie długości lub w jej pobliżu (rys. 7); w szczególności stosując metodę sił wyznaczamy stosunki amplitud

$$C_1 : C_2 : C_3 : \dots : C_{i-1} : C_i$$

oraz na tym, że 2) uzyskane wyniki liczbowe stosunków amplitud, które pozwalają określić przekrój poprzeczny postaci drgań dla układu na rys. 7, przyjmujemy za właściwe dla układu zasadniczego przedstawionego na rys. 6.

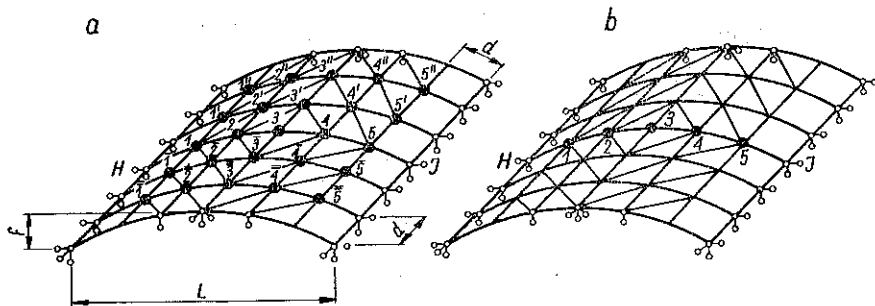
Jeżeli chodzi o liczbę mas dla układu na rys. 7, to jest ona określona liczbą węzłów wzdłuż żebra. W praktyce równa się od 5 do 7.

Postać drgań w przekroju podłużnym pokrycia ma kształt krzywej o jednej półfali, co zostało stwierdzone doświadczalnie, [4].

Znajomość sposobu odkształcania się pokrycia w jego przekrojach podłużnych i poprzecznych pozwala określić postać drgań.

Zaproponowany sposób określania postaci podstawowej aczkolwiek nieprecyzyjny, jednak jak się wydaje, dostatecznie daleko odsuwa subiektywizm i dowolność przy przyjmowaniu stosunków liczbowych dla amplitud w poszczególnych punktach.

3.2. Przykład liczbowy. Określmy podstawową postać drgań dla pokrycia kratowego przedstawionego na rys. 8a. W rozpatrywanym przypadku zachowujemy wszystkie założenia poczynione w p. 2.1.



Rys. 8

Zgodnie z zaproponowanym sposobem postępowania badamy przede wszystkim układ przedstawiony na rys. 8b.

Odpowiednie stosunki amplitud wyznaczone dla najmniejszej częstotliwości są następujące:

$$D_1 = \frac{C_2}{C_1} = -3,5658, \quad D_2 = \frac{C_3}{C_1} = 4,8843,$$

$$D_3 = \frac{C_4}{C_1} = -3,5658, \quad D_4 = \frac{C_5}{C_1} = 1,0000.$$

Przyjmując $C_1 = 1,0$ znajdziemy

$$C_2 = C_4 = -3,5658, \quad C_3 = 4,8443, \quad C_5 = 1,000,$$

czyli wychylenia w przekroju poprzecznym są symetryczne względem punktu 3.

Obecnie rozpatrujemy układ na rys. 8a. Zakładamy, że stosunki rzędnych powierzchni odpowiadającej postaci drgań w punktach 1, 2, 3, 4 i 5 są:

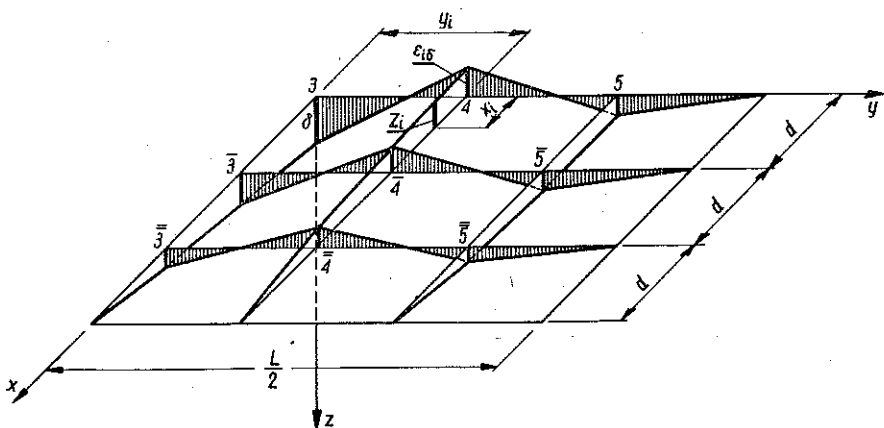
takie same, jak odpowiednie stosunki amplitud w tych punktach w przypadku układu na rys. 8b.

Rzędne postaci oznaczymy przez Z_i . Mamy więc

$$\begin{aligned} C_1 = Z_1 &= 1,000, \\ C_2 = Z_2 &= -3,5658, & C_3 = Z_3 &= 4,8443, \\ C_4 = Z_4 &= -3,5658, & C_5 = Z_5 &= 1,000. \end{aligned}$$

Przyjmując zmienność rzędnych wzdłuż długości pokrycia według półfali sinusoidy uzyskujemy postać drgań dla rozpatrywanego układu jako powierzchnię symetryczną względem punktu 3 na rys. 8a.

Czwarta część powierzchni odpowiadającej podstawowej postaci jest uwidoczniona na rys. 9, gdzie przedstawiony jest schemat wychyleń węzłów w odniesieniu do rzutu pokrycia na płaszczyznę poziomą.



Rys. 9

Wychylenie punktu i w przekroju podłużnym $y = y_i$ (rys. 9) obliczymy ze wzoru

$$(3.1) \quad Z_i = \varepsilon_i \delta \cos \frac{\pi x}{6d},$$

gdzie

$$\delta = Z(0,0)$$

(wychylenie w punkcie 3 traktowane jest jako parametr);

$$\varepsilon_i = \frac{Z(0, Y_i)}{Z(0,0)}.$$

W naszym przypadku mamy:

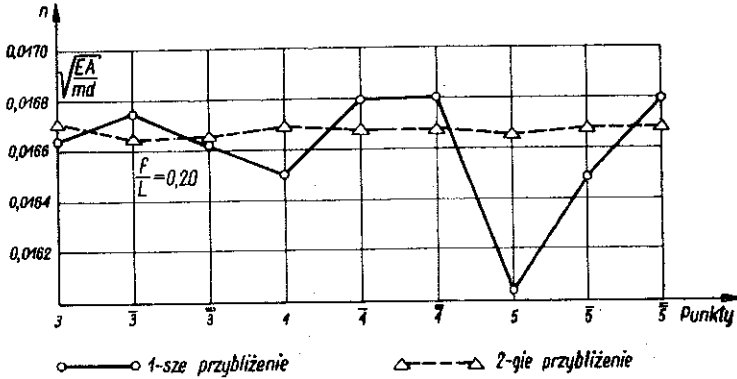
$$\varepsilon_3 = \frac{Z_3}{Z_3} = 1,000,$$

$$\varepsilon_4 = \frac{Z_4}{Z_3} = -\frac{3,5658}{4,8443} = -0,7361, \quad \varepsilon_5 = \frac{Z_5}{Z_3} = \frac{1,000}{4,8443} = 0,2064.$$

Poprawność określonej postaci drgań możemy sprawdzić obliczając częstotliwość z porównania ugięć w dwóch kolejnych przybliżeniach we wszystkich punktach skupienia mas.

O ile postać drgań jest dokładna lub odbiega od dokładnej niezbyt daleko, wtedy wyniki otrzymane w poszczególnych punktach powinny być takie same lub różnice między nimi nie powinny być zbyt duże.

Dokonano sprawdzenia postaci drgań w rozpatrywanym przypadku, przy czym dla każdego punktu wykonano dwa przybliżenia. Odpowiednie wyniki podano w tablicy 1 i przedstawiono na rys. 10. Otrzymane wyniki w pierwszym



Rys. 10

przybliżeniu wykazują pewne wahania. Względna fluktuacja wynosi 4,91% i jest spowodowana wyraźnie odbiegającym wynikiem w punkcie 5. Jednak już w drugim przybliżeniu wyniki dla poszczególnych punktów są prawie jednakowe. Względna fluktuacja wynosi tu około 0,24%.

Tablica 1. Wartości częstotliwości n

Przybliżenie	Punkty, w których porównywano ugięcia								
	3	3̄	3̄	4	4̄	4̄	5	5̄	5̄
I	1,683	1,695	1,684	1,669	1,704	1,707	1,621	1,670	1,709
II	1,689	1,685	1,685	1,689	1,687	1,685	1,687	1,668	1,689

U w a g a. Wszystkie liczby mnożone są przez $10^{-2} \sqrt{EA/md}$.

Znikome różnice wartości dla częstotliwości w drugim przybliżeniu i nieznaczne stosunkowo rozbieżności w pierwszym z wyjątkiem wyników w punkcie 5 świadczą, że zarówno podstawowa postać drgań jak i funkcja opisująca tę postać zostały określone w sposób właściwy.

3.3. Postać drgań z uwzględnieniem poziomych składowych przesunięć. W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że kierunki przesuwania się poszczególnych mas w czasie drgań są pionowe. Założenie to słuszne dla układów

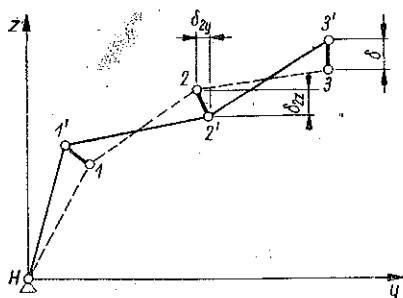
płaskich może być przyjmowane bez zastrzeżeń jedynie przy badaniach pokryć przestrzennych o bardzo małej wyniosłości.

Obecnie pominiemy wspomniane wyżej założenie, przyjmując jedynie w dalszym ciągu, że ruch mas odbywa się w poprzecznych płaszczyznach pionowych przechodzących przez poszczególne zębra $H_i J'_i$ (rys. 6). Dalsze rozważania przeprowadzimy dla pokrycia przedstawionego na rys. 8a.

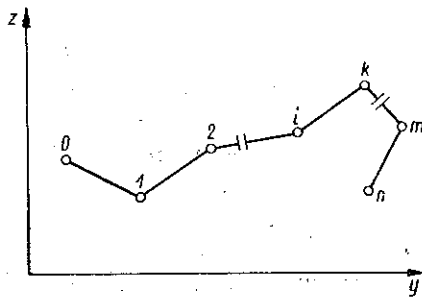
Przewidywana podstawowa postać drgań przy pominięciu założenia o pionowym przesuwaniu się mas będzie podobna ogólnie biorąc do postaci ustalonej w p. 3.1, tzn. sąsiednie masy zaczepione w punktach danego zębra będą wychylone w przeciwnych kierunkach.

Podobnie jak w p. 3.1 będziemy badali środkowy przekrój poprzeczny, tzn. zebro HJ (rys. 8b), przy czym ze względu na symetrię rozpatrzmy tylko część $H-3$.

Układ punktów 1, 2, 3 podczas drgań będzie w skrajnym położeniu taki jak to uwidoczniło na rys. 11 (punkty 1', 2', 3').



Rys. 11



Rys. 12

Punkt 3 ze względu na symetrię będzie się przesuwał pionowo i to przesunięcie potraktujemy jako parametr δ . Pozostałe punkty ruchome będą miały składowe przesunięcia równoległe do osi Z , δ_{iz} , i składowe przesunięcia równoległe do osi y , δ_{iy} (rys. 11).

Dla uzależnienia poszczególnych składowych δ_{iz} i δ_{iy} od parametru δ posłużymy się równaniami łańcucha kinematycznego. Równania te dla łańcucha przedstawionego na rys. 12 mają postać

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sum_{i,k} Q_{ik} Y_{ik} = \delta_{0z} - \delta_{nz}, \\ \sum_{i,k} Q_{ik} Z_{ik} = \delta_{0y} - \delta_{ny}, \end{cases}$$

gdzie symbole δ_{0z} , δ_{0y} , δ_{nz} , δ_{ny} oznaczają odpowiednio składowe punktu 0 lub n równoległe do osi Z lub Y .

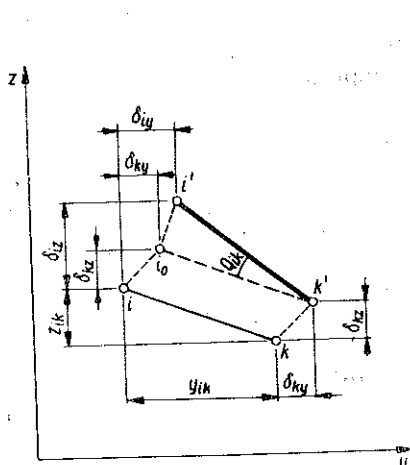
Pozostałe oznaczenia są podane na rys. 13, przedstawiającym jedno z ogniw łańcucha w położeniu początkowym ik po przesunięciu równoległym $k'i_0$ i po obrocie $k'i'$, [5].

Napiszemy jeszcze jedną zależność wynikającą z prostych związków zachodzących pomiędzy wielkościami podanymi na rys. 13:

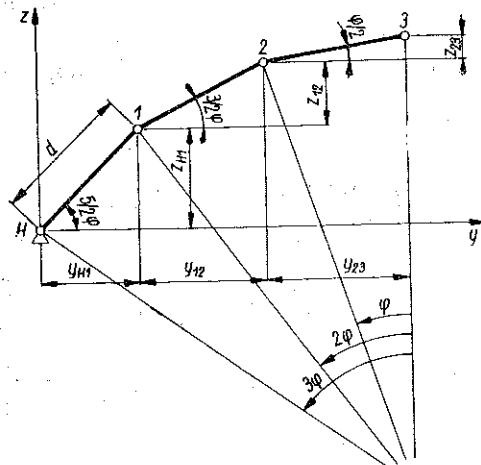
$$(3.3) \quad Q_{ik} = \frac{\delta_{iz} - \delta_{kz}}{Y_{ik}} \quad \text{lub} \quad Q_{ik} = \frac{\delta_{iy} - \delta_{ky}}{Z_{ik}}$$

Równania (3.2) dla części H-3 środkowego żebra HJ (rys. 8b), przedstawionej ponownie na bardziej szczegółowym rys. 14, mają postać

$$(3.4) \quad \begin{cases} Q_{H1} Y_{H1} + Q_{12} Y_{12} + Q_{23} Y_{23} = \delta_{Hz} - \delta_{3z}, \\ Q_{H1} Z_{H1} + Q_{12} Z_{12} + Q_{23} Z_{23} = \delta_{Hy} - \delta_{3y}. \end{cases}$$



Rys. 13



Rys. 14

W punkcie H znajduje się podpora przegubowo nieprzesuwana w płaszczyźnie yz , czyli

$$\delta_{Hz} = \delta_{Hy} = 0.$$

Punkt 3 jak już wspomniano może przesuwac się tylko pionowo równolegle do osi Z w związku z tym $\delta_{3y} = 0$.

Składową pionową przesunięcia w punkcie 3 traktujemy jako parametr, czyli $\delta_{3z} = \delta$.

Przez φ na rys. 14 oznaczono szóstą część kąta środkowego, odpowiadającego odcinkowi przekroju poprzecznego kołowego powierzchni walcowej, w którą wpisane jest badane pokrycie.

W układzie (3.4) mamy dwa równania, a trzy niewiadome kąty obrotu prętów. Dla jednoznacznego wyznaczenia niewiadomych należy mieć jeszcze jedno równanie. Aby uzyskać to równanie robimy założenie, że stosunek składowych pionowych przesunięć punktów 2 i 3 jest taki sam jak stosunek od-

powiednich amplitud dla przypadku rozważanego w p. 3.2, tzn. przy respektowaniu założenia o pionowym kierunku przesuwania się mas. Mamy więc

$$\frac{\delta_{2z}}{\delta_{3z}} = \frac{\delta_{2z}}{\delta} = \frac{Z_2}{Z_3} = \varepsilon_2 = \varepsilon_4$$

(symetria), czyli

$$(3.5) \quad \frac{\delta_{2z}}{\delta} = \varepsilon_4.$$

Pomimo że założenie to nie może być uważane za dostatecznie uzasadnione, to jednak należy zauważyć, że dotyczy ono przesunięć punktów najmniej wyniosłych i że wprowadzamy je tylko do pierwszego etapu pierwszego przybliżenia — wobec czego nie powinno ono powodować większych błędów.

W oparciu o wzory (3.3) i (3.5) możemy napisać

$$(3.6) \quad Q_{23} = \frac{\varepsilon_4 \delta - \delta}{Y_{23}}.$$

Uwzględniając zależność (3.6), wartość przesunięć punktów H i 3 oraz biorąc pod uwagę rys. 14 możemy napisać równanie (3.4) w postaci

$$(3.7) \quad \begin{cases} Q_{H1} d \cos \frac{5}{2} \varphi + Q_{12} d \cos \frac{3}{2} \varphi + \frac{\varepsilon_4 \delta - \delta}{Y_{23}} Y_{23} = -\delta, \\ Q_{H1} d \sin \frac{5}{2} \varphi + Q_{12} d \sin \frac{3}{2} \varphi + \frac{\varepsilon_4 \delta - \delta}{d \cos \frac{\varphi}{2}} d \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując równania (3.7) względem Q_{H1} i Q_{12} otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{cases} Q_{H1} = \delta \frac{\varepsilon_4 \sin \frac{3}{2} \varphi - (\varepsilon_4 - 1) \cos \frac{3}{2} \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{d \sin \varphi}, \\ Q_{12} = \delta \frac{(\varepsilon_4 - 1) \cos \frac{5}{2} \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \varepsilon_4 \sin \frac{5}{2} \varphi}{d \sin \varphi}. \end{cases}$$

W dalszym ciągu wykorzystując związki (3.3) możemy uzależnić składowe przesunięć dla wszystkich punktów zebra HJ od przyjętego parametru δ . Znajomość tych zależności jest wystarczająca dla określenia postaci drgań całego pokrycia. Przyjmując mianowicie zmienność przesunięć wzdłuż długości pokrycia według półfali sinusoidy możemy w dowolnym punkcie pokrycia obliczyć składową pionową przesunięcia ze wzoru

$$(3.9) \quad \delta_{iz} = \bar{\varepsilon}_i \delta \cos \frac{\pi x}{d}$$

i składową poziomą z zależności

$$(3.10) \quad \delta_{iy} = \mu_i \delta \cos \frac{\pi x}{6d},$$

gdzie

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\delta_z(0, Y_i, Z_i)}{\delta}, \quad \mu_i = \frac{\delta_y(0, Y_i, Z_i)}{\delta}$$

oraz $\delta_z(0, Y_i, Z_i)$ jest składową pionową przesunięcia punktu (y_i, z_i) żebra HJ , $\delta_y(0, Y_i, Z_i)$ jest składową poziomą przesunięcia punktu (y_i, z_i) żebra HJ , δ jest przesunięciem pionowym w punkcie 3 (rys. 8b).

Podobnie jak w p. 3.2 wykonano przykład liczbowy dla pokrycia o wyniosłości $f/L = 0,20$ obciążonego dwudziestu pięciu masami skupionymi i dokonano sprawdzenia postaci drgań. Wyniki podano w tablicy 2.

Tablica 2. Wartości n obliczone z uwzględnieniem poziomych składowych przesunięć

Przybliżenie	Punkty, w których porównywano przesunięcia								
	3	$\bar{3}$	$\bar{\bar{3}}$	4	$\bar{4}$	$\bar{\bar{4}}$	5	$\bar{5}$	$\bar{\bar{5}}$
I	1,602	1,612	1,599	1,550	1,572	1,589	1,525	1,565	1,585
II	1,582	1,582	1,585	1,578	1,579	1,578	1,574	1,578	1,576

U w a g a. Wszystkie liczby mnożone są przez $10^{-2} \sqrt{EA/md}$.

Bardzo małe różnice wartości dla częstotliwości obliczonej w drugim przybliżeniu i nieznaczne stosunkowo w pierwszym świadczą, że podstawowa postać drgań została określona w sposób właściwy.

Porównując wartości n z tablicy 1 i 2 stwierdzamy, że częstotliwość obliczona na podstawie postaci drgań z uwzględnieniem poziomych składowych przesunięć jest niższa od częstotliwości przy założeniu pionowego kierunku przesuwania się mas.

Takiego rezultatu należało oczekiwać, gdyż założenie pionowego przesuwania mas jest jednoznaczne z wprowadzeniem dodatkowych usztywnień do układu.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. WIERZBICKI, *Rozprawy z mechaniki budowli*, Warszawa 1958.
- [2] A. STODOLA, *Dampf und Gas-Turbinen*, 1924.
- [3] J. KISIEL, *Dynamika ustrojów prętowych*, Wrocław 1956.
- [4] A. LISOWSKI, *Stateczność i drgania powłok w oparciu o wyniki badań modelowych*, Rozpr. inżyn., 1, 6 (1958).
- [5] M. GIERZEWski, *Ramy — Obliczenia statyczne*, Warszawa 1955.

Резюме

ОСНОВНАЯ ФОРМА КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ

Рассматривается задача определения формы колебаний цилиндрических решетчатых перекрытий, которая соответствует основной (самой низкой) частоты собственных колебаний.

Проводятся исследования при предположении вертикального направления передвижения масс равно, как и пренебрегая этим предположением.

Принятие соответствующей формы имеет существенное влияние при определении частоты собственных колебаний методом последовательных приближений.

Исследуемые перекрытия представляют системы с многими степенями свободы и определение вида колебаний при применении известных методов требует выполнения очень трудоемких расчетов.

Основываясь на результатах исчислений, проведенных при применении метода сил к менее сложным перекрытиям с меньшим количеством масс, предлагается способ определения основной формы колебаний перекрытий, нагруженных значительным количеством масс. Этот способ позволяет установить форму колебаний решетчатых перекрытий на основании расчета этого перекрытия при предположении концентрации масс вдоль образующей цилиндрической поверхности в срединном поперечном сечении.

Для того, чтобы поставить в зависимость отдельные составляющие перемещений, от одного рассматриваемого как параметр, при пренебрежении предположением о вертикальном перемещении масс — применяется уравнение кинематической цепи.

Изменчивость ординат формы по длине перекрытия принимается согласно полуволне синусоиды.

Проводится проверка примененного способа определения формы, определяя методом последовательных приближений частоту собственных колебаний цилиндрического перекрытия с 25-ю массами. Уже в первом приближении получены результаты, удовлетворительно точные для практических целей.

Summary

FUNDAMENTAL MODE OF VIBRATION OF CYLINDRICAL LATTICE ROOFS

The problem under consideration is that of determining the fundamental mode of vibration of a cylindrical lattice roof.

Investigations are carried out assuming vertical motion of masses during vibration and without this assumption.

The assumption of the mode is of essential importance for the computation of natural frequency by means of the iteration method.

The roofs under investigation represent systems of many degrees of freedom and the determination of the vibration mode by means of known accurate methods requires considerable labour.

On the basis of the results of computation by means of the method of forces of less complicated roofs with smaller number of masses, a method is proposed for determining the fundamental frequency of roofs loaded with a considerable number of masses. This method enables us to determine the form of vibration of a lattice roof by assuming that the masses are concentrated along the generant of the cylindrical surface in the middle cross-section.

In order to relate each displacement component to one displacement component treated as a parameter, the assumption of vertical motion of the masses being rejected, the equation of kinematic chain is used.

The variability of the ordinates along the covering is assumed to be represented by a half-wave of a sine curve.

The method proposed is verified by computing by means of the iteration method the natural frequencies of a cylindrical roof with 25 masses. It is found that the first approximation alone suffices to obtain results sufficiently accurate for the practice.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1960 r.