WITOLD NOWACKI

USTALONE NAPRĘŻENIA W WALCU ORTOTROPOWYM ORAZ W TARCZY ORTOTROPOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXV

TOM VIII • ZESZYT 3 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Walec ortotropowy

Rozpatrzmy walec z materiału wykazującego własności ortotropii termicznej oraz sprężystej. Niech płaszczyzny ortotropii pokrywają się z płaszczyznami przyjętego układu współrzędnych prostokątnych (x_1, x_2, x_3), przy czym zakładamy, że oś x_3 pokrywa się z osią walca. Niech w walcu panuje ustalone pole temperatury zależne jedynie od zmiennych x_1, x_2. W walcu wytworzy się płaski stan odkształcenia.

Uogólnione prawo HOOKE'A ma tu postać

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}+\alpha_1 T, \\ \varepsilon_{22} = a_{21}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}+\alpha_2 T, \\ \varepsilon_{33} = 0 = a_{31}\sigma_{11}+a_{32}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}+\alpha_3 T, \\ \varepsilon_{12} = a_{66}\sigma_{12}, \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \end{cases}
$$

przy czym

$$
(1.2)\qquad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{E_1}, & a_{12} = -\dfrac{\nu_{21}}{E_2}, & a_{13} = -\dfrac{\nu_{31}}{E_3}, \\ a_{21} = -\dfrac{\nu_{12}}{E_1}, & a_{22} = \dfrac{1}{E_2}, & a_{23} = -\dfrac{\nu_{32}}{E_3}, \\ a_{31} = -\dfrac{\nu_{13}}{E_1}, & a_{32} = -\dfrac{\nu_{23}}{E_2}, & a_{33} = \dfrac{1}{E_3}, \quad a_{66} = \dfrac{1}{G_{12}}. \end{cases}
$$

Tutaj przez E_1, E_2, E_3 oznaczono moduły YOUNGA w kierunku osi x_1, x_2, x_3, przez G_{12} moduł odkształcenia postaciowego, przez $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ współczynniki POISSONA, a przez α_1, α_2, α_3 współczynniki rozszerzalności termicznej w kierunku osi układu współrzędnych. Z równań (1.1) wyeliminujemy naprężenie σ_{33}. Wtedy

$$
(1.3)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{11} = A_{11}\sigma_{11}+A_{12}\sigma_{22}+\gamma_1 T, \\ \varepsilon_{22} = A_{21}\sigma_{11}+A_{22}\sigma_{22}+\gamma_2 T, \\ \varepsilon_{12} = A_{66}\sigma_{12}, \end{cases}
$$

gdzie

$$A_{11}=\frac{1}{E_1}(1-\nu_{31}\nu_{13}),\qquad A_{22}=\frac{1}{E_2}(1-\nu_{23}\nu_{32}),$$

$$A_{12}=A_{21}=-\frac{1}{E_2}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})=-\frac{1}{E_1}(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{23}),$$

$$A_{66}=a_{66},$$

$$\gamma_1=\alpha_1+\alpha_3\nu_{31},\qquad \gamma_2=\alpha_2+\nu_{23}\alpha_3.$$

Korzystaliśmy tu również z zależności

$$E_1\nu_{21}=E_2\nu_{12},\qquad E_2\nu_{32}=E_3\nu_{23},\qquad E_3\nu_{13}=E_1\nu_{31}.$$

Temperatura spełniać powinna równanie przewodnictwa cieplnego

$$(\lambda_1\partial_1^2+\lambda_2\partial_2^2)T=-W,\qquad \partial_i^2=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\qquad (i=1,2). \tag{1.4}$$

Tutaj λ_1 i λ_2 oznaczają współczynniki przewodnictwa cieplnego w kierunku osi x_1 i x_2, W jest ilością ciepła, wytworzoną przez źródło ciepła w jednostce objętości i czasu.

Wiadomo, że w jednospójnym walcu izotropowym znajdującym się w ustalonym polu temperatury, różnym od zera, pozostaje jedynie naprężenie σ_{33}, jeśli założyć, że w walcu brak liniowych (równoległych do osi x_3) źródeł ciepła. Jest to treść znanego twierdzenia N.J. Muschieliszwilego, [1].

Stawiamy sobie następujące pytanie: czy w walcu ortotropowym możliwy est taki szczególny stan naprężenia, w którym jedynie naprężenie σ_{33} jest różne od zera — a jeśli tak, to przy jakich warunkach.

Dla wyznaczenia stanu naprężenia w walcu posłużymy się funkcją Airy'ego F, przy czym

$$\sigma_{11}=F_{,22},\qquad \sigma_{22}=F_{,11},\qquad \sigma_{12}=-F_{,12}, \tag{1.5}$$

a naprężenie σ_{33} wyznaczymy z trzeciego równania grupy (1.1),

$$\sigma_{33}=\nu_{31}F_{,22}+\nu_{32}F_{,11}-E_3\alpha_3T. \tag{1.6}$$

Funkcja Airy'ego spełnia równania równowagi: $\sigma_{ij,j}=0$. Wyrażając odkształcenia (1.1) za pomocą funkcji Airy'ego i wstawiając je do równań geometrycznej zgodności

$$\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=2\varepsilon_{12,12} \tag{1.7}$$

otrzymujemy następujące równanie różniczkowe dla funkcji F:

$$\varkappa^4F_{,1111}+2\eta\varkappa^2F_{,1122}+F_{,2222}+\omega(T_{,22}+\vartheta T_{,11})=0, \tag{1.8}$$

gdzie

$$\varkappa^4=\frac{A_{22}}{A_{11}},\qquad 2\eta\varkappa^2=\frac{2A_{12}+A_{66}}{A_{11}},\qquad \omega=\frac{\gamma_1}{A_{11}},\qquad \vartheta=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Zakładamy, że powierzchnia boczna walca jest wolna od naprężeń. Rozwiązać należy zatem równanie (1.8) przy uwzględnieniu warunków brzegowych

$$F = 0, \qquad F_{,n} = 0 \tag{1.9}$$

na powierzchni bocznej walca. Drugi z warunków brzegowych (1.9) oznacza zanikanie pochodnej funkcji F w kierunku normalnej do brzegu.

Wprowadźmy funkcję GREENA $F^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ równania (1.8). Funkcja F^* powinna spełniać równanie

$$\varkappa^4 F^*_{,1111} + 2\eta\varkappa^2 F^*_{,1122} + F^*_{,2222} + \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2) = 0 \tag{1.10}$$

oraz warunki brzegowe

$$F^* = 0, \qquad F^*_{,n} = 0. \tag{1.11}$$

Tutaj δ oznacza symbol funkcji DIRACA.

Korzystając z funkcji GREENA F^* przedstawić możemy rozwiązanie równania (1.8) w następującej postaci

$$F(x_1, x_2) = \omega \int\limits_{(\Gamma)}\int T(\xi_1, \xi_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + \vartheta\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)\,d\xi_1\,d\xi_2. \tag{1.12}$$

Wykonując na prawej stronie równania (1.12) przekształcenie GREENA na płaszczyźnie otrzymamy przy uwzględnieniu warunków brzegowych (1.11) następujące rozwiązanie:

$$F(x_1, x_2) = \omega \int\limits_{(\Gamma)}\int F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + \vartheta\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)T(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2. \tag{1.13}$$

Biorąc pod uwagę równanie przewodnictwa cieplnego (1.4) przekształcimy równanie (1.13) do postaci

$$F(x_1, x_2) = -\frac{\omega}{\lambda_2}\int\limits_{(\Gamma)}\int F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)W(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 + \tag{1.14}$$

$$+\omega(\vartheta - \beta)\int\limits_{(\Gamma)}\int F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)\frac{\partial^2 T(\xi_1, \xi_2)}{\partial\xi_1^2}\,d\xi_1\,d\xi_2, \qquad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Z ostatniego równania wysnuć możemy szereg interesujących wniosków.

Załóżmy, że w walcu brak jest źródeł ciepła. Wtedy pierwsza całka równania (1.14) będzie równa zeru. Druga całka równania będzie równa zeru jedynie w przypadku szczególnym $\vartheta = \beta$ lub gdy $\lambda_2(\alpha_2 + \nu_{23}\alpha_3) = \lambda_1(\alpha_1 + \alpha_3\nu_{31})$. Jeśli ten nader szczególny przypadek nie wystąpi, w walcu pojawią się wszelkie składowe stanu naprężenia występujące w płaskim stanie odkształcenia.

Niech w walcu istnieje izotropia poprzeczna, taka, że

$$E_1 = E_3 = E, \qquad \nu_{13} = \nu_{31} = \nu, \qquad \nu_{21} = \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu', \qquad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha.$$

Funkcja F będzie równa zeru w całym obszarze walca jedynie, gdy $\vartheta = \beta$, albo gdy $\alpha_1(1+\nu)\lambda_2 = (\alpha_2+\nu'\alpha_1)\lambda_1$. W tym szczególnym przypadku mamy $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ oraz $\sigma_{33} = -\alpha ET$. W przypadku izotropii poprzecznej, w której

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad \nu_{31} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu', \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

warunek $\nu = \beta$ jest spełniony. W całym obszarze walca $F = 0$, tak że w walcu istnieje następujący stan:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{33} = -E_3\alpha_3 T.$$

Jeśli przejść z izotropii poprzecznej do izotropii, to brak źródła ciepła w walcu jednospójnym prowadzi do stanu naprężenia

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{33} = -E\alpha T.$$

2. Tarcza ortotropowa

Rozpatrzmy z kolei jednospójną tarczę ortotropową o grubości h, znajdującą się w ustalonym polu temperatury. Oznaczmy jak poprzednio przez E_1, E_2 moduły sprężystości, przez ν_1, ν_2 współczynniki POISSONA, przez α_1, α_2 współczynniki rozszerzalności cieplnej, a przez λ_1, λ_2 współczynniki przewodnictwa cieplnego w kierunku osi x_1, x_2 leżących w płaszczyźnie środkowej tarczy. Przez $G_{12} = G$ oznaczamy moduł odkształcenia postaciowego.

W rozpatrywanym płaskim stanie naprężenia mamy następujące związki między stanem odkształcenia i naprężenia, [2]:

$$\text{(2.1)} \qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+\alpha_1 T,\\ \varepsilon_{22} &= a_{21}\sigma_{21}+a_{22}\sigma_{22}+\alpha_2 T,\\ \varepsilon_{12} &= a_{66}\sigma_{12},\end{aligned}\right.$$

gdzie

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \qquad a_{12} = -\frac{\nu_1}{E_1},$$

$$a_{21} = -\frac{\nu_2}{E_2}, \qquad a_{66} = \frac{1}{2G}; \qquad E_1\nu_2 = E_2\nu_1.$$

Oznaczmy temperaturę ośrodków otaczających tarczę dla $x_3 > h/2$ przez θ_1, dla $x_3 < -h/2$ przez θ_2. Układ współrzędnych umieszczono w płaszczyźnie środkowej tarczy w ten sposób, że oś x_3 jest do tej płaszczyzny prostopadła. Temperatura T powinna spełniać równanie

$$\text{(2.2)} \qquad (\lambda_1\partial_1^2+\lambda_2\partial_2^2+\lambda_3\partial_3^2)T(x_1, x_2, x_3) = -W(x_1, x_2, x_3).$$

Całkujemy równanie (2.2) względem x_3 od $-h/2$ do $h/2$. Otrzymamy

$$(2.3)\qquad (\lambda_1\partial_1^2+\lambda_2\partial_2^2)\tau_0+\frac{\lambda_3}{h}\left[\frac{\partial T}{\partial x_3}\right]_{-h/2}^{h/2}=-q_0.$$

Wprowadzílśmy tu oznaczenia:

$$\tau_0(x_1,x_2)=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}T(x_1,x_2,x_3)\,dx_3,\qquad q_0(x_1,x_2)=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}W(x_1,x_2,x_3)\,dx_3.$$

Pomnóżmy równanie (2.2) przez x_3 i całkujmy od $-h/2$ do $h/2$. Wtedy

$$(2.4)\qquad (\lambda_1\partial_1^2+\lambda_2\partial_2^2)\tau+\frac{12\lambda_3}{h}\left[x_3\frac{\partial P}{\partial x_3}-T\right]_{-h/2}^{h/2}=-q,$$

gdzie

$$\tau(x_1,x_2)=\frac{12}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}T(x_1,x_2,x_3)x_3dx_3,\qquad q(x_1,x_2)=\frac{12}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}W(x_1,x_2,x_3)x_3dx_3.$$

Uwzględnijmy wymianę ciepła między tarczą a otaczającym ją ośrodkiem korzystając z prawa Newtona; otrzymamy następujące warunki brzegowe w płaszczyznach $\pm h/2$:

$$(2.5)\qquad \lambda_3\left[\frac{\partial T}{\partial x_3}\right]_{x_3=h/2}=\varkappa(\theta_1-T_1),\qquad \lambda_3\left[\frac{\partial T}{\partial x_3}\right]_{x_3=-h/2}=-\varkappa(\theta_2-T_2).$$

Tutaj $\varkappa$ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego między płytą a otaczającym ośrodkiem, a funkcje

$$T_1(x_1,x_2)=T\left(x_1,x_2,\frac{h}{2}\right),\qquad T_2=T(x_1,x_2,-\frac{h}{2},$$

oznaczają temperaturę w płaszczyznach ograniczających tarczę.

Równania (2.3) i (2.4) przyjmą postać:

$$(2.6)\qquad (\lambda_1\partial_1^2+\lambda_2\partial_2^2)\tau_0+\frac{2\varkappa}{h}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\frac{T_1+T_2}{2}\right)=-q_0,$$

$$(2.7)\qquad (\lambda_1\partial_1^2+\lambda_2\partial_2^2)\tau+\frac{6\varkappa}{h}\,\frac{\theta_1-\theta_2}{h}-\frac{6\varkappa}{h}\left(1+\frac{2\lambda_3}{h\varkappa}\right)\frac{T_1-T_2}{h}=-q.$$

Powyższe równania dadzą się rozdzielić, jeśli założymy, że rozkład temperatury w kierunku osi x_3 jest liniowy. Przyjęcie to jest tym bliższe rzeczywistości, im mniejsza jest grubość płyty w stosunku do jej wymiarów liniowych. Przyjmijmy zatem, że

$$(2.8)\qquad T=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{h}x_3,$$

albo, jak łatwo sprawdzić, że

$$T = \tau_0 + x_3 \tau. \tag{2.9}$$

Przy powyższych założeniach otrzymamy dwa od siebie niezależne równania:

$$(m\partial_1^2 + \partial_2^2)\tau_0 + \varepsilon_0(\theta' - \tau_0) = -\frac{q_0}{\lambda_2} \tag{2.10}$$

oraz

$$(m\partial_1^2 + \partial_2^2)\tau - \frac{12}{h^2}(\eta + \varepsilon)\tau + \frac{12}{h^2}\varepsilon\theta'' = -\frac{q}{\lambda_2}. \tag{2.11}$$

Tutaj

$$\theta' = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \theta'' = \frac{\theta_1 - \theta_2}{h}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2\varkappa}{h\lambda_2}, \quad \varepsilon = \frac{\varkappa h}{2\lambda_2},$$

$$\eta = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Oddzielnie też rozpatrywać można stan naprężenia wywołany polem τ_0, oddzielnie polem $x_3\tau$. Wstawiając τ_0 na miejsce T do równań (2.1), a następnie wyrażając naprężenia za pomocą funkcji Airy'ego

$$\sigma_{ij} = (\nabla^2\delta_{ij} - \partial_j\partial_i)F \qquad (i,j = 1, 2), \tag{2.12}$$

jak również wstawiając odkształcenia do równania nierozdzielności otrzymamy następujące równanie dla wyznaczenia funkcji F:

$$\varkappa_0^4 F_{,1111} + 2\eta_0\varkappa_0^2 F_{,1122} + F_{,2222} + E_1\alpha_1(\partial_2^2 + n\partial_1^2)\tau_0 = 0, \tag{2.13}$$

gdzie

$$\varkappa_0^4 = \frac{E_1}{E_2}, \quad 2\eta_0\varkappa^2 = E_1\left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}\right), \quad n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Zakładając wolny od obciążeń brzeg tarczy rozwiążemy równanie (2.13) przy warunkach brzegowych

$$F = 0, \quad F_{,n} = 0. \tag{2.14}$$

Podobnie jak w ustępie pierwszym tak i tu rozwiążemy równanie (2.13) posługując się funkcją Greena $F^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$, spełniającą równanie

$$\varkappa_0^4 F^*_{,1111} + 2\eta_0\varkappa_0^2 F_{,1122} + F_{,2222} + \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2) = 0 \tag{2.15}$$

i warunki brzegowe $F^* = 0$, $F^*_{,n} = 0$.

Rozwiązanie równania (2.13) przedstawić możemy w postaci

$$F(x_1, x_2) = E_1\alpha_1 \iint_{(\Gamma)} \tau_0(\xi_1, \xi_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + n\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)F^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 \tag{2.16}$$

albo

$$(2.16.1)\quad F(x_1,x_2) = E_1\alpha_1 \iint\limits_{(\Gamma)} F^*(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}+n\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)\tau_0(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2.$$

Z ostatniego równania wynika, że funkcja F będzie równa zeru w każdym punkcie tarczy (a zatem i naprężenia będą równe zeru), jeśli w tarczy brak będzie źródeł ciepła ($q_0 = 0$) oraz gdy $\tau_0(x, x_2)$ będzie funkcją liniową zmiennych x_1 i x_2. Funkcja τ_0 staje się liniową tylko wtedy, gdy temperatura θ' bardzo słabo zmienia się w zależności od x_1 i x_2, tak że w równaniu (2.10) pominąć można pierwszy wyraz po lewej stronie w stosunku do drugiego wyrazu i przyjąć, że $\tau_0 \approx \theta'$.

Rozpatrzmy jeszcze szczególny przypadek równania (2.10). Mianowicie załóżmy, że tarcza jest w płaszczyznach $x_3 = \pm h/2$ izolowana termicznie. W tym przypadku równanie (2.10) uprości się do postaci

$$(2.17)\qquad (m\partial_1^2+\partial_2^2)\tau_0 = -\frac{q}{\lambda_2}.$$

Z równania (2.16.1) otrzymamy

$$(2.18)\quad F(x_1,x_2) = -\frac{E_1\alpha_1}{\lambda_2}\iint\limits_{(\Gamma)} F^*(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2)\,q(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 + E_1\alpha_1(n-m)\iint\limits_{(\Gamma)} F^*(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2)\frac{\partial^2\tau_0(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_1^2}\,d\xi_1\,d\xi_2.$$

Jeśli założyć, że w tarczy brak źródeł ciepła ($q_0 = 0$), to znika pierwsza całka wyrażenia (2.18). Druga zniknie, gdy $n = m$ albo gdy $\alpha_2\lambda_2 = \alpha_1\lambda_1$. Przypadek ten nastąpi, gdy tarcza będzie miała różne cechy sprężyste, ale jednakowe właściwości termiczne w kierunkach osi x_1 i x_2. Tarcza taka odkształca się bez występowania w niej naprężeń.

Rozpatrzmy z kolei naprężenia wywołane w tarczy przez pole temperatury $x_3\tau(x_1, x_2)$. Wskutek zmienności temperatury w kierunku osi x_3 również i naprężenia zmieniać się będą liniowo w kierunku grubości tarczy. Mamy do czynienia ze zginaniem płyty. Wstawiając do równań (2.1) $T = x_3\tau(x_1, x_2)$ oraz wyrażając odkształcenia przez ugięcie w płyty

$$(2.19)\qquad \varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \qquad (i, j = 1, 2),$$

a dalej rozwiązując te równania względem naprężeń otrzymamy, [2],

$$(2.20)\qquad \begin{cases} \sigma_{11} = -\dfrac{E_1x_3}{1-\nu_1\nu_2}\left[w_{,11}+\nu_2 w_{,22}+(\alpha_1+\nu_2\alpha_2)\tau\right], \\[2ex] \sigma_{22} = -\dfrac{E_2x_3}{1-\nu_1\nu_2}\left[w_{,22}+\nu_1 w_{,11}+(\alpha_2+\nu_1\alpha_1)\tau\right], \\[2ex] \sigma_{12} = -2Gx_3 w_{,12}. \end{cases}$$

Wprowadzimy wypadkowe naprężeń, momenty zginające i skręcające

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 \, dx_3 \qquad (i, j = 1, 2); \tag{2.21}$$

znajdziemy, że

$$\begin{cases} M_{11} = -N_1 [w_{,11} + \nu_2 w_{,22} + (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2)\tau], \\ M_{22} = -N_2 [w_{,22} + \nu_1 w_{,11} + (\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1)\tau], \\ M_{12} = -2C w_{,12}, \end{cases} \tag{2.22}$$

gdzie

$$C = \frac{Gh^3}{12}, \qquad N_i = \frac{E_i}{1-\nu_1\nu_2} \frac{h^3}{12} \qquad (i = 1, 2).$$

Wstawiając (2.22) do równania równowagi elementu $h dx_1 dx_2$ płyty

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} = 0, \tag{2.23}$$

uzyskamy równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty:

$$\varepsilon^4 w_{,1111} + 2\varrho\varepsilon^2 w_{,1122} + w_{,2222} + \varepsilon^4 (\alpha_1 + \alpha_2 \nu_2) \tau_{,11} + (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \tau_{,22} = 0. \tag{2.24}$$

Tutaj

$$\varepsilon^4 = \frac{N_1}{N_2}, \qquad \varrho\varepsilon^2 = \frac{H}{N_2}, \qquad H = N_1\nu_2 + N_2\nu_1 + 2C, \qquad N_1\nu_2 = N_2\nu_1.$$

W dalszych rozważaniach ograniczmy się na razie do płyt jednospójnych na brzegach zupełnie utwierdzonych. Równanie (2.24) spełnić powinno warunki brzegowe: $w = 0$, $w_{,n} = 0$.

W teorii płyt izotropowych udowadnia się, że w płytach jednospójnych na brzegu zupełnie utwierdzonych, znajdujących się w ustalonym bezźródłowym polu temperatury, jest, [3]

$$u_1 = u_2 = w = 0 \tag{2.25}$$

w każdym punkcie płyty. Momenty zginające i skręcające dane są wzorami

$$M_{11} = M_{22} = -N(1+\nu)\alpha_t \tau, \qquad M_{12} = 0. \tag{2.26}$$

Wykażemy, że dla płyty ortotropowej składowe stanu przemieszczenia będą równe zeru jedynie w nader szczególnych przypadkach.

Wprowadźmy funkcję Greena $w^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$, spełniającą równanie

$$\varepsilon^4 w^*_{,1111} + 2\varrho\varepsilon^2 w^*_{,1122} + w^*_{,2222} + \frac{1}{N_2} \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) = 0 \tag{2.27}$$

z warunkami brzegowymi $w^* = 0$, $w^*_{,n} = 0$.

Funkcja w^* przedstawia ugięcie punktu (x_1, x_2) płyty ortotropowej, wywołane działaniem siły skupionej $P = -1$ umieszczonej w punkcie (ξ_1, ξ_2).

Rozwiązując równanie (2.24) przy użyciu funkcji GREENA w^* otrzymamy

$$w(x_1, x_2) = A\iint_{(\Gamma)} \tau(\xi_1, \xi_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}+s\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)w^*(\xi_1\ \xi_2; x_1, x_2)d\xi_1 d\xi_2, \tag{2.28}$$

gdzie

$$A = N_2(\alpha_1\nu_1+\alpha_2), \qquad s = \frac{N_1(\alpha_1+\nu_2\alpha_2)}{A}.$$

Stosując przekształcenie GREENA na płaszczyźnie i wykorzystując warunki brzegowe $w^* = 0$, $w^*_{,n} = 0$ przedstawić możemy ugięcie w również w postaci

$$w(x_1, x_2) = A\iint_{(\Gamma)} w^*(\xi_1, \xi_2; x_1, x_2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}+m\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)\tau(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2+ \tag{2.29}$$

$$+A(s-m)\iint_{(\Gamma)} w^*(\xi_1, \xi_2; x_1 x_2)\frac{\partial\tau(\xi_1, \xi_2)}{\partial\xi_1^2}d\xi_1, d\xi_2.$$

Z ostatniego równania wynika, że $w = 0$ w całym obszarze płyty ortotropowej jeśli τ jest funkcją liniową lub też ma wartość stałą. Taki przypadek jest możliwy tylko wtedy, gdy temperatura otaczającego ośrodka bardzo słabo zmienia się z x_1 i x_2, tak że w równaniu (2.11) pominąć można pierwszy wyraz po lewej stronie równania w stosunku do dalszych oraz kiedy brak źródła ciepła w tarczy, zatem gdy

$$\tau \approx \frac{\varepsilon\theta''}{\eta+\varepsilon}. \tag{2.30}$$

W tym przypadku naprężenia w płycie nie zależą od ugięcia, a momenty dane są wzorami

$$M_{11} = -N_1(\alpha_1+\nu_2\alpha_2), \qquad M_{22} = -N_2(\alpha_2+\nu_1\alpha_1), \qquad M_{12} = 0. \tag{2.31}$$

Jeśli płaszczyzny ograniczające płytę są izolowane termicznie, to równanie (2.11) redukuje się do postaci

$$(m\partial_1^2+\partial_2^2)\tau = -\frac{q}{\lambda_2}. \tag{2.32}$$

Jeśli w płycie brak źródeł ciepła, to pierwsza z całek (2.19) będzie równa zeru. Ugięcie w będzie równe zeru w każdym punkcie płyty, gdy $s - m = 0$, albo gdy $N_1(\alpha_1+\nu_2\alpha_2) = N_2(\alpha_2+\nu_1\alpha_1)$. Jednak powyższy warunek może być spełniony jedynie dla płyty izotropowej.

Przy wyznaczaniu naprężeń tak w walcu nieograniczonym jak i w tarczy konieczna jest znajomość funkcji F^*. Zważywszy na analogię równań (1.10), (2.15) i (2.27) oraz identyczność warunków brzegowych, można dla wyznaczenia funkcji F^* posłużyć się analogią płytową. Z analogii na przykład równań (2.15) i (2.27) oraz warunków brzegowych od razu wynika, że

$$F^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = N_2 w^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2), \tag{2.33}$$

jeśli zamiast wielkości ε i η wstawić w równanie (2.22) wielkości η_0 i $\varkappa_0$

Znając już funkcję F^* wyznaczymy naprężenia w tarczy ze wzoru (2.12). Zatem dla wyznaczenia funkcji F^* posłużymy się rozwiązaniami z teorii płyt ortotropowych, a funkcje Greena w^* są dla wielu kształtów płyt ortotropowych opracowane.

Przedstawione tu rozważania są tak długo słuszne, jak długo naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ wywołane w tarczy polem temperatury τ_0 oraz naprężenia $\sigma_{ij}^{(2)}$ wywołane polem $x_3\tau$ można superponować. Jeśli jednak uwzględnić zmianę położenia sił $N_{ij}=h\sigma_{ij}^{(1)}$ wywołanych ugięciem tarczy, to będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem jednoczesnego zginania i ściskania tarczy.

Zamiast równania (2.23) wziąć należy pod uwagę równanie

$$M_{11,11}+2M_{12,12}+M_{22,22}+N_{11}w_{,11}+2N_{12}w_{,12}+N_{22}w_{,22} = 0. \tag{2.34}$$

Rozwiązać trzeba zatem układ równań

$$\varkappa_0^4 F_{,1111}+2\eta_0\varkappa^2 F_{,1122}+F_{,2222}+E\alpha_1(\partial_2^2+n\partial_1^2)\tau_0 = 0, \tag{2.35}$$

$$\varepsilon^4 w_{,1111}+2\varrho\varepsilon^2 w_{,1122}+w_{,2222}+\varepsilon^4(\alpha_1+\alpha_2\nu_2)\tau_{,11}+(\alpha_1\nu_1+\alpha_2)\tau_{,22} = \\ = \frac{h}{N_2}(F_{,22}w_{,11}-2F_{,12}w_{,12}+F_{,11}w_{,22}). \tag{2.36}$$

Po wyznaczeniu funkcji F z równania (2.35) znana jest prawa strona równania (2.36), co zezwala już na wyznaczenie ugięcia płyty. W przypadku szczególnym $\tau = 0$ układ równań (2.35) i (2.36) opisuje zagadnienie wyboczenia tarczy spowodowane działaniem pola temperatury, $\tau_0(x_1, x_2)$.

Literatura cytowana w tekście

[1] Н. Я. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва—Ленинград 1949, 159.

[2] M. T. Huber, *Teoria płyt*, Lwów 1921.

[3] Б. М. Майзель, *Температурная задача теории упругости*, Киев 1951.

Резюме

СТАЦИОНАРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ И В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ

В первой части работы даются условия, при которых в ортотропном цилиндре, находящемся в стационарном температурном поле без источников напряженное состояние ограничивается только к одной составляющей, а именно к нормальному напряжению по направлению оси x_3.

Во второй части рассматривается тонкая ортотропная пластинка, находящаяся в стационарном и линейном температурном поле по направлению оси x_3.

Даются условия, при которых в температурном поле без источников исчезают все составляющие напряженного состояния и при которых исчезают составляющие перемещения.

S u m m a r y

STEADY-STATE STRESSES IN AN ORTHOTROPIC CYLINDER AND PLATE

In the first part of the paper conditions are established, in which the state of stress in an orthotropic cylinder in a steady-state sourceless temperature field is confined to one component only, the stress in the direction of the x_3-axis.

In the second part of the paper a thin orthotropic plate is considered under a steady-state linear temperature field (in the direction of the x_3-axis). Conditions are established under which all the stress or displacement components vanish in a sourceless temperature field.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1960 r.