

CZESŁAW WOŹNIAK

**ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DWUWYMIAROWEGO
PRZY STAŁEJ KRZYWIŹNIE LINII IZOSTATYCZNYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLIX**

TOM VIII . ZESZYT 3 . ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	397
2. Warunki równowagi	398
3. Warunek nierozdzielności odkształcenia	401
4. Przykłady rozwiązań zagadnienia brzegowego	404

1. Wstęp

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla równania cząstkowego rzędu wyższego staje się znacznie łatwiejsze, gdy można do kształtu rozpatrywanego obszaru dobrać taki układ współrzędnych α_1 i α_2 , w którym granice obszaru pokrywają się z krzywymi należącymi do rodzin $\alpha_1 = \text{const}$ lub $\alpha_2 = \text{const}$. Ortogonalne współrzędne krzywoliniowe, wprowadzone do teorii sprężystości przez LAMÉGO, [1], znajdują takie właśnie zastosowanie w całym szeregu prac późniejszych (np. [2] i [3]). W pracy tej nie przyjmując na razie określonej postaci układu LAMÉGO (niech przedstawiają go parametry K_1 i K_2) założmy na wstępie, że tworzy on tzw. układ naturalny, tzn. że jest identyczny z układem linii izostatycznych dla dwuwymiarowego stanu naprężenia. Warunki równowagi przy pominięciu sił masowych wyrazi więc następujący układ równań, nazywany równaniami LAMÉGO-MAXWELLA ([4], s. 84):

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varrho_1}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_2},$$

przy czym ϱ_1 i ϱ_2 są promieniami krzywizny krzywych $\alpha_1 = \text{const}$ i $\alpha_2 = \text{const}$, a ds_2 i ds_1 różniczkowymi elementami długości tychże krzywych¹.

O funkcjach σ_1 i σ_2 zakładając zawsze będziemy, że są ciągłe oraz że posiadają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.

Przyjmując układ warunków równowagi w postaci

$$(1.1) \quad \sigma_2 = \sigma_1 + \frac{\varrho_1}{K_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_1}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + \frac{\varrho_2}{K_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha_2}$$

oraz przeprowadzając odpowiednie rugowanie otrzymamy po przekształceniach dwa równania niezależne rzędu drugiego:

$$(1.2) \quad \varrho_1 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + K_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$(1.3) \quad \varrho_2 \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + K_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha_2} = 0.$$

Ich całki ogólne można zapisać w postaci

$$(1.4) \quad \sigma_1 = \sigma_1[\alpha_1, \alpha_2, \varphi, \psi], \quad \sigma_2 = \sigma_2[\alpha_1, \alpha_2, \bar{\varphi}, \bar{\psi}],$$

¹ Stosowane są również oznaczenia odwrotne (np. [4]).

przy czym z czterech funkcji φ , ψ , $\bar{\varphi}$ i $\bar{\psi}$ zgodnie z (1.1) tylko dwie mogą być niezależne.

Aby krzywe $\alpha_1 = \text{const}$ i $\alpha_2 = \text{const}$ tworzyły układ linii izostatycznych, funkcje powyższe muszą spełniać równanie

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{K_2}{K_1} \frac{\partial(\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{K_1}{K_2} \frac{\partial(\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial \alpha_2} \right] = 0.$$

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę powyższego zagadnienia przy założeniu stałej krzywizny krzywych $\alpha_1 = \text{const}$, otrzymując rozwiązania ogólne dla tego przypadku w postaci zamkniętej.

2. Warunki równowagi

Niech krzywoliniowy, ortogonalny układ odniesienia przedstawiony będzie w postaci izometrycznej, przy czym niech

$$\mu = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{K_2}$$

będzie stosunkiem odpowiedniego przekształcenia konforemnego.

Jeżeli

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{K^2} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = - \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1}$$

jest, zgodnie z założeniem, funkcją tylko zmiennej α_1 , wówczas zachodzić musi

$$(2.1) \quad \mu(\alpha_1, \alpha_2) = \mu_1(\alpha_1) + \mu_2(\alpha_2),$$

co implikuje stałość krzywizny również każdej z krzywych ortogonalnych $\alpha_2 = \text{const}$. Równania (1.2) i (1.3) przyjmą postać

$$(2.2) \quad \varrho_1 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(2.3) \quad \varrho_2 \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha_1} = 0$$

lub po podzieleniu przez $\varrho_1 \mu$ oraz przez $\varrho_2 \mu$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha_1} \right) = 0,$$

co pozwala na napisanie rozwiązania ogólnego (1.4) dla rozpatrywanego przypadku:

$$\sigma_1 = \int_b^{a_1} \mu(a_1, a) \varphi(a) da + \psi(a_1), \quad \psi(a_1) = \sigma_1(a_1, b);$$

$$\sigma_2 = \int_a^{a_1} \mu(a, a_2) \bar{\varphi}(a) da + \bar{\psi}(a_2), \quad \bar{\psi}(a_2) = \sigma_2(a, a_2).$$

Zgodnie z (2.1) otrzymamy

$$(2.4) \quad \sigma_1 = \mu_1(a_1) \int_b^{a_2} \varphi(a) da + \int_b^{a_2} \mu_2(a) \varphi(a) da + \psi(a_1),$$

$$(2.5) \quad \sigma_2 = \mu_2(a_2) \int_a^{a_1} \bar{\varphi}(a) da + \int_a^{a_1} \mu_1(a) \bar{\varphi}(a) da + \bar{\psi}(a_2).$$

Równanie (2.4) wraz z pierwszym z równań (1.1) dają rozwiązanie równań równowagi zależne tylko od dwóch funkcji φ i ψ (lub $\bar{\varphi}$ i $\bar{\psi}$). W celu otrzymania rozwiązania zbliżonego budową do wzorów (2.4) i (2.5) (co jest potrzebne w dalszych wywodach) dodajmy stronami równania (1.1); znajdziemy

$$\varrho_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} + \varrho_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_2} = 0,$$

czyli

$$\mu_2'(a_2) \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} + \mu_1'(a_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_2} = 0.$$

Zastępując w powyższych równaniach funkcje σ_1 i σ_2 prawymi stronami wzorów (2.4) i (2.5) otrzymamy

$$\mu_1'(a_1) \left[\mu_2'(a_2) \int_b^{a_2} \varphi(a) da + \bar{\psi}'(a_2) \right] + \mu_2'(a_2) \left[\mu_1'(a_1) \int_a^{a_1} \bar{\varphi}(a) da + \psi'(a_1) \right] = 0,$$

skąd po rozdzieleniu zmiennych

$$(2.6) \quad \frac{\mu_2'(a_2) \int_b^{a_2} \varphi(a) da + \bar{\psi}'(a_2)}{\mu_2'(a_2)} = - \frac{\mu_1'(a_1) \int_a^{a_1} \bar{\varphi}(a) da + \psi'(a_1)}{\mu_1'(a_1)} = k.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.7) \quad \Phi(a_2) = \int_b^{a_2} \varphi(a) da, \quad \bar{\Phi}(a_1) = \int_a^{a_1} \bar{\varphi}(a) da$$

otrzymamy dwa następujące równania:

$$(2.8) \quad \bar{\psi}'(a_2) = k\mu_2'(a_2) - \mu_2'(a_2)\Phi(a_2),$$

$$(2.9) \quad \psi'(a_1) = -k\mu_1'(a_1) - \mu_1'(a_1)\bar{\Phi}(a_1).$$

W celu ich scałkowania zauważmy, że

$$\int_b^{\alpha_2} \mu_2'(a) \Phi(a) da = \int_b^{\alpha_2} \Phi(a) d\mu_2 = \mu_2(\alpha_2) \Phi(\alpha_2) - \int_b^{\alpha_2} \mu_2(a) \Phi'(a) da$$

oraz analogicznie

$$\int_a^{\alpha_1} \mu_1'(a) \bar{\Phi}(a) da = \mu_1(\alpha_1) \bar{\Phi}(\alpha_1) - \int_a^{\alpha_1} \mu_1(a) \bar{\Phi}'(a) da.$$

Jednocześnie z (2.6) wynika

$$-\frac{\psi'(a)}{\mu_1'(a)} = \frac{\bar{\psi}'(b)}{\mu_2'(b)} = k,$$

a z równania (1.1) otrzymamy wobec tego

$$\sigma_2(a, b) - \sigma_1(a, b) = k\mu(a, b),$$

to jest

$$\bar{\psi}(b) - \psi(a) = k\mu_1(a) + k\mu_2(b),$$

skąd wreszcie

$$\bar{\psi}(b) - k\mu_2(b) = \psi(a) - k\mu_1(a) = c.$$

Powyższe pozwala na zapisanie rozwiązań równań (2.8) i (2.9) w postaci

$$(2.10) \quad \bar{\psi}(\alpha_2) = \mu_2(\alpha_2) [k - \Phi(\alpha_2)] + \int_b^{\alpha_2} \mu_2(a) \Phi'(a) da + c,$$

$$(2.11) \quad \psi(\alpha_1) = -\mu_1(\alpha_1) [k + \bar{\Phi}(\alpha_1)] + \int_a^{\alpha_1} \mu_1(a) \bar{\Phi}'(a) da + c.$$

Liczba niezależnych funkcji występujących we wzorach (2.4) i (2.5) zredukowana została do dwóch. Podstawiając (2.10) i (2.11) do wymienionych wzorów otrzymamy najogólniejsze rozwiązanie układu równań równowagi [również gdy $\mu_1'(\alpha_1) = 0$ lub $\mu_2'(\alpha_2) = 0$]:

$$(2.12) \quad \sigma_1 = -\mu_1(\alpha_1) [\bar{\Phi}(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) + k] + \int_a^{\alpha_1} \mu_1(a) \bar{\Phi}'(a) da + \int_b^{\alpha_2} \mu_2(a) \Phi'(a) da,$$

$$(2.13) \quad \sigma_2 = \mu_2(\alpha_2) [\bar{\Phi}(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) + k] + \int_a^{\alpha_1} \mu_1(a) \bar{\Phi}'(a) da + \int_b^{\alpha_2} \mu_2(a) \Phi'(a) da$$

zależne od dwóch funkcji $\bar{\Phi}(\alpha_1)$ i $\Phi(\alpha_2)$. W rozwiązaniach (2.12) i (2.13) pominięto stałą c jako nie posiadającą wpływu na ich ogólność.

3. Warunek nierozdzielności odkształcenia

Równanie (1.5) po podstawieniu rozwiązań (2.12) i (2.13) oraz przeprowadzeniu redukcji przyjmie postać

$$\begin{aligned} \mu_1''(a_1)\bar{\Phi}(a_2) - \mu_1''(a_1)\bar{\Phi}(a_1) + \mu_1(a_1)\bar{\Phi}''(a_2) + \mu_1(a_1)\bar{\Phi}''(a_1) - k\mu_1'(a_1) + \\ + \mu_2''(a_2)\bar{\Phi}(a_1) - \mu_2''(a_2)\bar{\Phi}(a_2) + \mu_2(a_2)\bar{\Phi}''(a_1) + \mu_2(a_2)\bar{\Phi}''(a_2) + k\mu_2'(a_2) = 0, \end{aligned}$$

a po przekształceniu

$$(3.1) \quad [\mu_2''(a_2) - \mu_1''(a_1)][\bar{\Phi}(a_1) - \bar{\Phi}(a_2)] + \\ + [\mu_1(a_1) + \mu_2(a_2)][\bar{\Phi}''(a_1) + \bar{\Phi}''(a_2)] = k[\mu_1'(a_1) - \mu_2'(a_2)].$$

Równanie (3.1) stanowi dodatkowy warunek, który spełniać muszą funkcje $\bar{\Phi}(a_1)$ i $\bar{\Phi}(a_2)$. Zmienne występujące w równaniu (3.1) dadzą się rozdzielić, gdy

$$(3.2) \quad \frac{\mu_1''(a_1) - \mu_2''(a_2)}{\mu_1(a_1) + \mu_2(a_2)} = c,$$

gdzie c jest pewną stałą. Równanie (3.2) prowadzi do układu

$$(3.3) \quad \mu_1''(a_1) - c\mu_1(a_1) = m,$$

$$(3.4) \quad \mu_2''(a_2) + c\mu_2(a_2) = m,$$

przy czym całki równania (3.3) i (3.4) z uwagi na tożsamość LAMÉGO

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial a_1} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial a_2} \right) = 0$$

muszą również czynić zadość równaniu, jakie otrzymamy przyjmując $K = 1/(\mu_1 + \mu_2)$. Otrzymany warunek posiada postać

$$(3.5) \quad [\mu_1(a_1) + \mu_2(a_2)][\mu_1''(a_1) + \mu_2''(a_2)] = [\mu_1'(a_1)]^2 + [\mu_2'(a_2)]^2.$$

Rozpatrzmy poszczególne układy odniesienia, dane przez odnośne stosunki przekształceń konforemnych, zgodnie z równaniami (3.3), (3.4) i (3.5). Dla $c = 0$ otrzymamy

$$\mu_1(a_1) = \frac{ma_1^2}{2} + A_1 a_1 + B_1, \quad \mu_2(a_2) = \frac{ma_2^2}{2} + A_2 a_2 + B_2,$$

przy czym z uwagi na (3.5), jeśli $A_1 = A_2 = 0$, to możemy przyjąć $\mu = B_1 + B_2 = \text{const}$ lub też (jeśli $m = 1$)

$$\mu = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}.$$

Pierwszy przypadek odpowiada oczywiście prostokątnemu układowi odniesienia, a równanie (3.1) określi funkcje $\bar{\Phi}$ i Φ jako wielomiany stopnia drugiego:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \bar{\Phi}(a_1) = \frac{\lambda a_1^2}{2} + \frac{A_1}{2} a_1 + B_1, \\ \Phi(a_2) = -\frac{\lambda a_2^2}{2} + \frac{A_2}{2} a_2 + B_2. \end{cases}$$

Składowe stanu naprężenia wyniosą zgodnie z (2.12) i (2.13) (jeśli $\mu_1 = \mu_2 = 1$)

$$(3.7) \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2\bar{\Phi}(a_2) = -\lambda a_2^2 + A_2 a_2 + C_2, \\ \sigma_2 = 2\bar{\Phi}(a_1) = \lambda a_1^2 + A_1 a_1 + C_1. \end{cases}$$

Układ krzywoliniowy, określony parametrem LAMÉGO $K = 2/(a_1^2 + a_2^2)$, odpowiada przekształceniu inwersyjnemu $\xi = 2/z$ (gdzie $\xi = a_1 + ia_2$ oraz $z = x + iy$), tworząc dwie rodziny okręgów o promieniach

$$r_1 = \frac{1}{|a_1|} \quad \text{i} \quad r_2 = \frac{1}{|a_2|}$$

stycznych w początku prostokątnego układu odniesienia do jego osi.

Równanie (3.1) daje analogiczne wyrażenia analityczne dla funkcji $\bar{\Phi}$ i Φ jak dla przypadku poprzedniego, przy czym określone są one wzorami (3.6).

W oparciu o rozwiązania (2.12) i (2.13) uzyskujemy następujące składowe stanu naprężenia:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\frac{\lambda}{8}(a_1^2 + a_2^2)^2 + \frac{A_1}{2}a_2(a_1^2 + \frac{a_2^2}{3}) + \frac{B_1}{3}a_1^3 + \frac{C_1}{2}a_1^2 + D_1, \\ \sigma_2 = \frac{\lambda}{8}(a_1^2 + a_2^2)^2 + \frac{B_1}{2}a_1(a_2^2 + \frac{a_1^2}{3}) - \frac{A_1}{3}a_2^3 - \frac{C_1}{2}a_2^2 + D_1. \end{cases}$$

Rozpatrując przypadek $c \neq 0$, otrzymamy następujące całki równań (3.3) i (3.4):

$$(3.9) \quad \begin{cases} \mu_1(a_1) = A_1 \operatorname{sh} a_1 + B_1 \operatorname{ch} a_1 - k, \\ \mu_2(a_2) = A_2 \sin a_2 + B_2 \cos a_2 + k, \end{cases}$$

jeśli $c = 1$. Warunek (3.5) dopuszcza dwie możliwości: $A_2 = B_2 = 0$, gdy jednocześnie $A_1 = B_1$, oraz $A_1 = A_2 = 0$, gdy jednocześnie $B_1 = \pm B_2$. Pierwsza z nich da nam przy $A_1 = B_1 = -1$:

$$\mu = -\operatorname{sh} a_1 - \operatorname{ch} a_1 = -e^{a_1}.$$

Skąd, jeśli weźmiemy pod uwagę, że

$$\frac{ds_1}{da_1} = \frac{ds_2}{da_2} = \frac{1}{\mu} = -e^{-a_1},$$

otrzymamy różniczki długości łuków krzywych obu rodzin:

$$ds_1 = -e^{-a_1} da_1, \quad ds_2 = -e^{-a_1} da_2.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.10) \quad e^{-a_1} = r, \quad a_2 = -a$$

otrzymamy we współrzędnych biegunowych wzory

$$ds_1 = dr \quad \text{i} \quad ds_2 = r da.$$

Równanie (3.1) dla rozpatrywanego przypadku da zależności

$$\bar{\Phi}''(a_1) - \bar{\Phi}(a_1) = k_1, \quad \Phi''(a_2) + \Phi(a_2) = k_2, \quad k_1 + k_2 = k.$$

Stąd znajdziemy

$$(3.11) \quad \begin{cases} \bar{\Phi}(\alpha_1) = D_1 \operatorname{ch} \alpha_1 + D_2 \operatorname{sh} \alpha_1 - k_1, \\ \Phi(\alpha_2) = C_1 \cos \alpha_2 + C_2 \sin \alpha_2 + k_2. \end{cases}$$

Podstawiając obie powyższe funkcje do (2.12) i (2.13) otrzymamy z (3.10) składowe stanu naprężenia:

$$(3.12) \quad \begin{cases} \sigma_R = A \frac{\cos \alpha}{r} + B \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{C}{r^2} + D \ln r + E, \\ \sigma_\alpha = -\frac{C}{r^2} + D(1 + \ln r) + E. \end{cases}$$

Wyrażenia (3.12) stanowią dobrze znane rozwiązania teorii sprężystości. Stałe D i E charakteryzują czyste zginanie wycinka pierścienia kołowego, C i E prowadzą do zagadnienia LAMÉGO, wreszcie A i B do zagadnienia obciążenia klina siłą skupioną w jego wierzchołku. Wprowadzenie do rozwiązań układu współrzędnych naturalnych pozwoliło na wspólne ujęcie wymienionych zagadnień.

Ostatni przypadek otrzymamy przyjmując w równaniach (3.9)

$$B_1 = \pm B_2 = \frac{1}{a},$$

czyli

$$(3.13) \quad \mu = \frac{\operatorname{ch} \alpha_1 \pm \cos \alpha_2}{a}.$$

Przypadek ten odpowiada układowi dwubiegunowemu, otrzymanemu z układu prostokątnego xOy przez przekształcenie konforemne postaci (por. [3], s. 15 i 169)

$$z = a \operatorname{th} \frac{\xi}{2} \quad \text{lub} \quad z = ai \operatorname{cth} \frac{\xi}{2},$$

gdzie $z = x + iy$ oraz $\xi = \alpha_1 + i\alpha_2$. Analogicznie jak dla przypadku poprzedniego zachodzą związki (3.11), jeśli $k_1 + k_2 = k$. Podstawiając (3.11) i (3.13) do rozwiązań (2.12) i (2.13), otrzymamy

$$(3.14) \quad \begin{cases} \alpha \sigma_1 = C_1 \left(\operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 \mp \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} \right) + C_2 \left(\operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha_2 \pm \frac{\sin 2\alpha_2}{4} \pm \frac{\alpha_2}{2} \right) - \\ \quad - D_1 \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_1}{2} + D_2 \left(-\frac{\operatorname{sh} 2\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_1}{2} \right) + E, \\ \alpha \sigma_2 = C_1 \left(\mp \cos^2 \alpha_2 \mp \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} \right) + C_2 \left(\mp \frac{\sin 2\alpha_2}{2} \pm \frac{\alpha_2}{2} \right) + \\ \quad + D_1 \left(\pm \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_1}{2} \right) + D_2 \left(\pm \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_1}{2} \right) + E. \end{cases}$$

Wzory (3.7), (3.8), (3.12) i (3.14) stanowią pięcioparametrowe rodziny rozwiązań, których znajomość pozwala na określenie odpowiadających im warunków brzegowych, omówionych już odnośnie rozwiązania (3.12). Cechą szczególną powyższych wzorów jest ich zamknięta i prosta postać. Przykłady zagadnień brzegowych dla rozwiązań (3.8) i (3.14) przedstawiono poniżej.

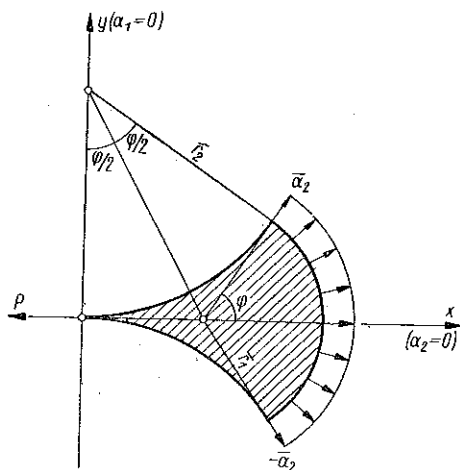
4. Przykłady rozwiązań zagadnienia brzegowego

Wzory (3.8) pozwalają na napisanie rozwiązania dla klina krzywoliniowego, przedstawionego na rys. 1. Warunki brzegowe

$$(4.1) \quad \sigma_1(\bar{a}_1) = q, \quad \sigma_2(\bar{a}_2) = \sigma_2(-\bar{a}_2) = 0$$

wymagają przyjęcia rozwiązania (3.8) w postaci

$$(4.2) \quad \sigma_1 = \frac{C_1}{2} a_1^2 + D_1, \quad \sigma_2 = -\frac{C_1}{2} a_2^2 + D_1.$$



Rys. 1

Obliczając zgodnie z (4.1) stałe całkowania C_1 i D_1 otrzymamy

$$C_1 = q \frac{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}{2}, \quad D_1 = q \frac{\bar{a}_2^2(\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2)}{4},$$

skąd

$$(4.3) \quad \sigma_1 = q \frac{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}{4} (a_1^2 + \bar{a}_2^2), \quad \sigma_2 = -q \frac{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}{4} (a_2^2 - \bar{a}_2^2).$$

Siła P zaczepiona w biegunie O wyniesie

$$P = 2q\bar{r}_1 \sin \varphi = \frac{4q}{\bar{a}_1} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{4q\bar{a}_2}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2},$$

gdyż współrzędne a_1 i a_2 stanowią wprost krzywizny odpowiadających im krzywych.

Postać (4.2) rozwiązania jest również użyteczna w przypadku prostokąta krzywoliniowego ograniczonego krzywymi $\bar{a}_2, -\bar{a}_2, a_1'$ i a_1'' przy równomiernym obciążeniu jego boków.

Z warunków brzegowych

$$(4.4) \quad \sigma_1(a_1') = q', \quad \sigma_1(a_1'') = q'', \quad \sigma_2(\bar{a}_2) = \sigma_2(-\bar{a}_2) = p$$

zgodnie z równowagą całości tylko dwa są niezależne, a stałe całkowania wyniosą

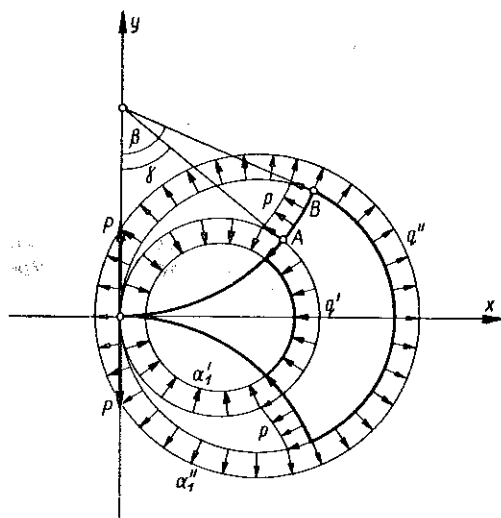
$$C_1 = \frac{2(q' - q'')}{a_1'^2 - a_1''^2}, \quad D_1 = -\frac{q'a_1''^2 + q''a_1'^2}{a_1'^2 - a_1''^2}.$$

Ponieważ

$$(4.5) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{q' - q''}{a_1'^2 - a_1''^2} a_1^2 - \frac{q'a_1''^2 + q''a_1'^2}{a_1'^2 - a_1''^2}, \\ \sigma_2 = -\frac{q' - q''}{a_1'^2 - a_1''^2} a_2^2 - \frac{q'a_1''^2 + q''a_1'^2}{a_1'^2 - a_1''^2}, \end{cases}$$

to równoważące obciążenie wynosi

$$(4.6) \quad p = \sigma_2(\bar{a}_2) = \sigma_2(-\bar{a}_2) = \frac{q''(\bar{a}_2^2 - a_1'^2) - q'(\bar{a}_2^2 + a_1''^2)}{a_1'^2 - a_1''^2}.$$



Rys. 2

Rozwiązanie powyższego zagadnienia, przedstawione w bardziej złożonej postaci, otrzymywane było dotychczas metodą inwersji (np. HUBER, [4], s. 211-217).

Postać (4.2) składowych stanu naprężenia pozwala na uzyskanie rozwiązania dla obszaru zawartego pomiędzy dwoma okręgami st stycznymi pod działaniem obciążeń q' i q'' oraz siły P (rys. 2); obszar jest jednorodny.

Wypadkowa obciążenia p na łuku AB wynosi

$$p_{AB} = \frac{2p}{\bar{a}_2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{2[q''(\bar{a}_2^2 - \alpha_1'^2) - q'(\bar{a}_2^2 + \alpha_1'^2)]}{(\alpha_1' + \alpha_1'') \sqrt{(\bar{a}_2^2 + \alpha_1'^2)(\bar{a}_2^2 + \alpha_1''^2)}}$$

Przechodząc do granicy przy $\bar{a}_2 \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$(4.7) \quad P = \frac{2(q'' - q')}{\alpha_1' + \alpha_1''}$$

Wzory (4.5) i (4.7) są poszukiwanym rozwiązaniem. W celu wyznaczenia stanu naprężenia w określonym powyżej obszarze w przypadku działania tylko obciążeń ciągłych q' i q'' (lub tylko siły P), należy przyjąć rozwiązanie zależne od trzech stałych:

$$(4.8) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{B_1}{3} \alpha_1^3 + \frac{C_1}{2} \alpha_1^2 + D_1, \\ \sigma_2 = \frac{B_1}{2} \alpha_1 \left(\alpha_2^2 + \frac{\alpha_1^2}{3} \right) - C_1 \frac{\alpha_2^2}{2} + D_1. \end{cases}$$

Oprócz warunków na krzywych α_1' i α_1'' napiszemy warunek dla bieguna układu

$$P = \lim_{\bar{a}_2 \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \sigma_2(\bar{a}_2, \alpha_1) \cos(n_{\bar{a}_2}, y) ds_1,$$

gdzie $n_{\bar{a}_2}$ jest normalną do krzywej \bar{a}_2 . Ponieważ

$$\cos(n_{\bar{a}_2}, y) = \mu \frac{\partial y}{\partial \alpha_2},$$

to rozdzielając części rzeczywistą i urojoną w przekształceniu

$$x + iy = \frac{2}{\alpha_1 + i\alpha_2}$$

otrzymamy

$$x = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad \text{i} \quad y = \frac{-2\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

czyli po wykonaniu różniczkowania znajdziemy

$$\cos(n_{\bar{a}_2}, y) = \frac{\bar{a}_2^2 - \alpha_1^2}{\bar{a}_2^2 + \alpha_1^2}.$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia, zgodnie z drugim z równań (4.8) i wobec $ds_1 = d\alpha_1/\mu$, otrzymamy

$$P = \lim_{\bar{a}_2 \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \left[B_1 \frac{\alpha_1}{2} \left(\bar{a}_2^2 + \frac{\alpha_1^2}{3} \right) - C_1 \frac{\bar{a}_2^2}{2} + D_1 \right]^2 \frac{2(\bar{a}_1^2 - \alpha_1^2)}{(\bar{a}_2^2 + \alpha_1^2)^2} d\alpha_1 = \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} (B_1 \alpha_1 - C_1) d\alpha_1.$$

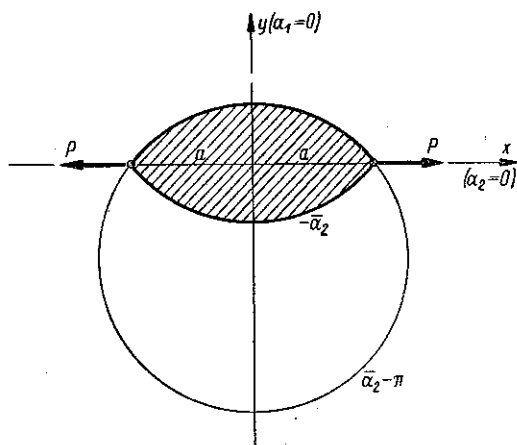
Warunki brzegowe posiadają postać

$$(4.9) \quad \begin{cases} B_1 \frac{\alpha_1'^3}{3} + C_1 \frac{\alpha_1'^2}{2} + D_1 = q', \\ B_1 \frac{\alpha_1''^3}{3} + C_1 \frac{\alpha_1''^2}{2} + D_1 = q'', \quad B_1 \frac{\alpha_1''^2 - \alpha_1'^2}{2} - C_1(\alpha_1'' - \alpha_1') = P. \end{cases}$$

Wzory (4.8) oraz układ (4.9) stanowią rozwiązanie zagadnienia.

Przechodząc do niektórych rozwiązań określonych wzorami (3.14) rozpatrzmy najpierw tarczę symetryczną, rozciąganą wzdłuż osi symetrii siłami P (rys. 3). Warunki brzegowe

$$(4.10) \quad \sigma_2(\bar{a}_2) = \sigma_2(-\bar{a}_2) = 0$$



Rys. 3

pozwalają na przyjęcie rozwiązania w postaci

$$(4.11) \quad \begin{cases} a\sigma_1 = C_1 \left(\operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} \right) + E, \\ a\sigma_2 = -C_1 \left(\cos^3 \alpha_2 + \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} \right) + E. \end{cases}$$

Zgodnie z (4.10) otrzymamy

$$E = C_1 \left(\cos^2 \bar{a}_2 + \frac{\sin^2 \bar{a}_2}{2} \right).$$

Stałą C_1 wyznaczamy z równania równowagi połowy tarczy:

$$P = 2 \int_0^{\bar{a}_2} [\sigma_1 ds_2]_{\alpha_1=0} = C_1 (2\bar{a}_2 + \sin 2\bar{a}_2).$$

Składowe stanu naprężenia wyniosą

$$(4.12) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{P}{a(2\bar{a}_2 + \sin 2\bar{a}_2)} \left(\operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} + \cos^2 \bar{\alpha}_2 + \frac{\sin^2 \bar{\alpha}_2}{2} \right), \\ \sigma_2 = \frac{P}{a(2\bar{a}_2 + \sin 2\bar{a}_2)} \left(-\cos^2 \alpha_2 - \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} + \cos^2 \bar{\alpha}_2 + \frac{\sin^2 \bar{\alpha}_2}{2} \right). \end{cases}$$

Rozwiązanie (4.11) zastosować możemy do przypadku tarczy kołowej (rys. 3) obciążonej siłami P wzdłuż cięciwy o długości $2a$. Warunki brzegowe

$$(4.13) \quad \sigma_2(\bar{a}_2) = \sigma_2(\bar{a}_2 - \pi) = 0$$

dadzą jak w przypadku poprzednim

$$E = C_1 \left(\cos^2 \bar{\alpha}_2 + \frac{\sin^2 \bar{\alpha}_2}{2} \right),$$

przy czym

$$P = \int_{\bar{\alpha}_2 - \pi}^{\bar{\alpha}_2} \left[\sigma_1 \frac{1}{\mu} \right]_{\alpha_1=0} d\alpha_2 = C_1 \pi.$$

Obliczając wartość całki

$$\int_{\bar{\alpha}_2 - \pi}^{\bar{\alpha}_2} \left[\sigma_1 y \frac{1}{\mu} \right]_{\alpha_1=0} d\alpha_2,$$

przedstawiającej moment sił wewnętrznych działających na oś y względem jednego z biegunów układu, wobec (por. [3], s. 15)

$$y = \frac{a \sin \alpha_2}{\operatorname{ch} \alpha_1 + \cos \alpha_2},$$

otrzymamy

$$aC_1 \int_{\bar{\alpha}_2 - \pi}^{\bar{\alpha}_2} \frac{\sin 2\alpha_2 - \sin^3 \alpha_2 + (2\cos^2 \bar{\alpha}_2 + \sin^2 \bar{\alpha}_2) \sin \alpha_2}{(1 + \cos \alpha_2)^2} d\alpha_2 = 0,$$

co oznacza, że bieguny układu nie są miejscami zaczepienia momentów skupionych. Tak więc dla tarczy kołowej, obciążonej siłami wzdłuż dowolnej cięciwy, otrzymamy

$$(4.14) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{P}{a\pi} \left(\operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} + \cos^2 \bar{\alpha}_2 + \frac{\sin^2 \bar{\alpha}_2}{2} \right), \\ \sigma_2 = \frac{P}{a\pi} \left(-\cos^2 \alpha_2 - \frac{\sin^2 \alpha_2}{2} + \cos^2 \bar{\alpha}_2 + \frac{\sin^2 \bar{\alpha}_2}{2} \right). \end{cases}$$

Rozwiązania (4.12) i (4.14) dla $\bar{\alpha}_2 = \pi/2$ (tarcza kołowa o promieniu a obciążona wzdłuż średnicy) dadzą

$$(4.15) \quad \sigma_1 = \frac{P}{a\pi} \left(\operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{\cos^2 \alpha_2}{2} \right), \quad \sigma_2 = -\frac{P \cos^2 \alpha_2}{2a\pi}.$$

Zagadnienie, którego rozwiązaniem są wzory (4.14), było już kilkakrotnie uzyskiwane różnymi metodami² (A. HERTZ, J. H. MICHELL, N. J. MUSCHIELISZWILI), niemniej jednak podane powyżej rozwiązanie przy użyciu współrzędnych naturalnych ujmuje zagadnienie to bardzo prosto.

Proste rozwiązanie otrzymać możemy dla przypadku obszaru przedstawionego na rys. 4, gdy długości łuków krzywych α_2 , ograniczających obszar, są niewielkie w porównaniu z wielkościami t' lub t'' .

Warunki brzegowe

$$(4.16) \quad \sigma_1(\bar{\alpha}_1) = \sigma_1(-\bar{\alpha}_1) = 0$$

oraz warunek

$$(4.17) \quad \int_{-\bar{\alpha}_1}^{\bar{\alpha}_1} \left[\sigma_2 \frac{1}{\mu} \right]_{\alpha_2=0} d\alpha_1 = P,$$

pozwalają na przyjęcie rozwiązania w postaci

$$(4.18) \quad \begin{cases} a\sigma_1 = -D_1 \frac{\text{ch}^2 a_1}{2} + E, \\ a\sigma_2 = D_1 \left(\text{ch} a_1 \cos \alpha_2 + \frac{\text{ch}^2 a_1}{2} \right) + E. \end{cases}$$

Z (4.16) otrzymamy

$$E = D_1 \frac{\text{ch}^2 \bar{\alpha}_1}{2},$$

z (4.17) natomiast

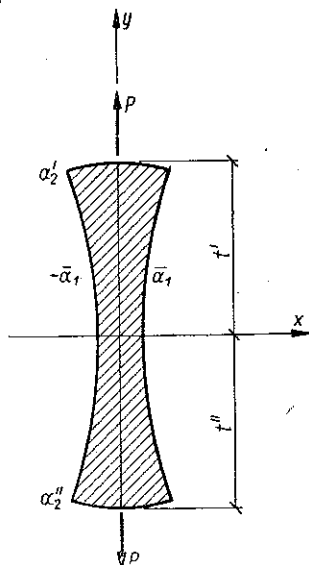
$$P = 2D_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{\text{ch} a_1 + \frac{\text{ch}^2 a_1}{2} + \frac{\text{ch}^2 \bar{\alpha}_1}{2}}{1 + \text{ch} a_1} d\alpha_1 = D_1 \left(\bar{\alpha}_1 + \text{sh} \bar{\alpha}_1 \text{sh}^2 \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \right),$$

czyli, zgodnie z (4.18),

$$(4.19) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{P}{a \left(\bar{\alpha}_1 + \text{sh} \bar{\alpha}_1 \text{sh}^2 \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \right)} \left(-\frac{\text{ch}^2 a_1}{2} + \frac{\text{ch}^2 \bar{\alpha}_1}{2} \right), \\ \sigma_2 = \frac{P}{a \left(\bar{\alpha}_1 + \text{sh} \bar{\alpha}_1 \text{sh}^2 \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \right)} \left(\text{ch} a_1 \cos \alpha_2 + \frac{\text{ch}^2 a_1}{2} + \frac{\text{ch}^2 \bar{\alpha}_1}{2} \right), \end{cases}$$

co stanowi poszukiwane rozwiązanie.

Rodzina rozwiązań (3.8) i (3.14) — prócz przypadków powyższych — można objąć również i inne warunki brzegowe dla obszarów ograniczonych krzywymi $\alpha_1 = c$ lub $\alpha_2 = c$.



Rys. 4

² Por., np. SOKOLNIKOFF [5], s. 284, odnośnik.

Literatura cytowana w tekście

- [1] G. LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, Paryż 1852.
- [2] H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, 1948.
- [3] С. УФЛАНД, *Биполярные координаты в теории упругости*, Москва 1950.
- [4] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, t. 1, Kraków 1948.
- [5] J. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, New York 1956.

Резюме

РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЕ ИЗОСТАТ

Рассматривая двухмерную задачу классической теории упругости в естественных координатах, автор приводит условия равновесия в виде двух уравнений по отношению к компонентам напряженного состояния. Общие интегралы этих уравнений даются в простом виде, предполагая постоянство кривизны изостат.

Это дало возможность выразить напряженное состояние с помощью двух функций Φ и $\bar{\Phi}$, при чем каждая является функцией только одной переменной.

Анализ условия неразрывности деформации приводит к обыкновенным уравнениям для функций Φ и $\bar{\Phi}$, при одновременном определении дифференциального уравнения по отношению к параметру Ламе.

Для отдельных криволинейных систем этим путем получают соответствующие, пятипараметровые семейства решений. Краевая задача представлена с помощью нескольких особых случаев.

Summary

SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM FOR ISOSTATIC LINES OF CONSTANT CURVATURE

Considering the two-dimensional problem of the classical theory of elasticity in natural coordinates, the author expresses the equilibrium conditions in the form of two independent equations in the stress components. The general integrals of these equations are represented in a simple form, assuming constant curvature of the isostatic lines. This enables the expression of the state of stress in terms of two functions Φ and $\bar{\Phi}$, each being a function of only one variable. An analysis of the compatibility condition leads to ordinary equations for the functions Φ and $\bar{\Phi}$. At the same time the differential equation for the LAMÉ parameter is obtained. For each curvilinear system of reference appropriate five-parameter families of solutions are chosen. The boundary-value problem is illustrated by solving several particular cases.

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA PRZEMYSŁOWEGO I OGÓLNEGO
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1959 r.