

ANDRZEJ BRANDT

**KSZTAŁTOWANIE BELEK SPRĘŻONYCH
PRZEZ WYRÓWNYWANIE SKRAJNYCH NAPRĘŻEŃ**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLIII**

TOM VIII · ZESZYT 2 · ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	233
2. Oznaczenia	234
3. Wyrównanie naprężeń w belkach sprężonych	234
4. Wyznaczenie zmiennej wysokości belki oraz położenia siły sprężającej	237
5. Wyznaczenie zmiennej wysokości belki przy stałej rzędnej siły sprężającej	239
6. Wyznaczenie zmiennej szerokości belki, gdy dane jest położenie siły sprężającej	242
7. Wyznaczenie zmiennej szerokości belki oraz położenia siły sprężającej	244
8. Kształtowanie belek na ciężar własny	248

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy jest wyznaczenie kształtu belek podpartych swobodnie na dwóch podporach. Belki posiadają prostokątne przekroje poprzeczne, symetryczne względem poziomej osi bezwładności, wykonane są z materiału kruchego i poddane działaniu wstępnego sprężania.

Rozpatrzmy dwa stany obciążenia belki.

W pierwszym stanie belka znajduje się pod działaniem siły sprężającej oraz ciężaru własnego.

W drugim stanie belka przenosi również obciążenie użytkowe, które jest rozłożone równomiernie na górnej powierzchni belki i działa pionowo w dół.

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach ciężar własny belki jest uwzględniony w sposób ścisły.

Przy wyznaczaniu kształtów belki można ograniczyć się do rozpatrzenia tylko tych dwóch zasadniczych stanów obciążenia. Często w przypadku znacznych rozpiętości belek i niewielkiego wpływu obciążenia ruchomego celowe jest określenie kształtu tylko w pierwszym stanie obciążenia.

Należy tu podkreślić zasadniczą różnicę pomiędzy kształtowaniem belki czy też innego elementu konstrukcyjnego, a sprawdzeniem wytrzymałości.

Nie jest możliwe jednoczesne dostosowanie kształtu rozpatrywanego elementu do wielu stanów obciążenia. Natomiast sprawdzenie wytrzymałości powinno oczywiście dotyczyć wszystkich stanów obciążenia, w jakich element może się znajdować.

Kształt belki wyznaczmy z warunków wyrównania wzdłuż rozpiętości skrajnych wartości potencjału, odniesionego do jednostki objętości tworzywa.

Pominiemy tu energię sprężystą, zależną od naprężeń stycznych, wobec energii pochodzącej od naprężeń normalnych. Założenie powyższe ma na celu uproszczenie rachunku i zostało poczynione również w pracach poprzednich, [4], [5] i [6].

W związku z tym założeniem kształt belki wyznaczony będzie z warunków wyrównania skrajnych wartości naprężeń normalnych, a więc w naszym przypadku z naprężeń na górnej i dolnej krawędzi belki.

Nie twierdzimy, że wyrównywanie naprężeń jest jedynym sposobem wyznaczania właściwych kształtów belek sprężonych. Jest to droga często stosowana i opisywana, [1], [2], [3], która posiada określony związek ze stanami

granicznymi belek i sprawdzeniem wytrzymałości. Związek pomiędzy wyrównywaniem skrajnych naprężeń, a kształtami o minimalnym potencjale przy stałej objętości wyjaśniono w pracach [1], [4], [5], [6]. Temu zagadnieniu w odniesieniu do belek sprężonych swobodnie podpartych poświęcony jest w całości p. 7 pracy niniejszej.

Zagadnienie uwzględniania obciążenia użytkowego przy wyznaczaniu kształtu belki jest szczegółowo opisane w pracy [3]. Y. GUYON wprowadza pojęcie rozpiętości krytycznych, wyznaczonych ze względu na wpływ obciążenia użytkowego. W zebranych zadaniach w p. 4-7 ukształtowano belki uwzględniając zarówno stan użytkowy jak i bezużytkowy. Dyskusja nierówności w p. 8 wskazuje raczej na możliwości ograniczenia się do stanu bezużytkowego w przypadkach belek betonowych średnich i większych rozpiętości. Zagadnienie to wymaga jeszcze szczegółowej analizy.

2. Oznaczenia

a	wysokość belki,
b	szerokość belki,
c_1, c_2	stała wartość naprężenia,
\bar{c}, \bar{c}	stałe całkowania,
e	mimośród siły sprężającej,
l	rozpiętość belki,
p	obciążenie użytkowe,
x, y	współrzędne prostokątne,
A, B, K	stałe,
E	współczynnik YOUNGA,
N	siła sprężająca,
U	potencjał energii odkształcenia sprężystego,
V	objętość,
γ	ciężar właściwy,
α	współczynnik stały,
σ_0	naprężenie wywołane siłą sprężającą,
σ^s, σ^t	naprężenie na górnej lub dolnej krawędzi,
σ_q, σ_p	naprężenie wywołane ciężarem własnym i obciążeniem użytkowym,
σ_1, σ_2	naprężenie w pierwszym i drugim stanie obciążenia.

Ściskanie oznaczać będziemy znakiem minus, zaś rozciąganie znakiem plus.

3. Wyrównanie naprężeń w belkach sprężonych

Zagadnienie wyznaczania kształtu belki sprężonej z warunku wyrównania naprężeń na krawędziach może być stawiane w rozmaity sposób, [2] i [3]. Aby pokazać różne możliwości rozwiązania tego zagadnienia, rozpatrzmy rozkład naprężeń w przekroju normalnym belki sprężonej.

Bezpieczeństwo belki będzie zapewnione, jeżeli we wszystkich przekrojach poprzecznych zachowane będą następujące warunki:

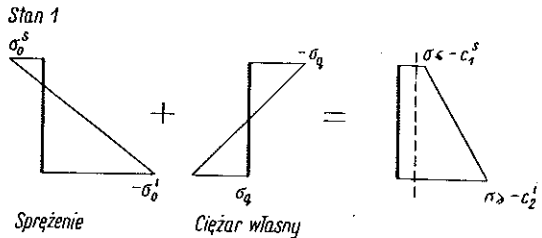
$$(3.1) \quad \sigma_0^s - \sigma_q \leq -c_1^s,$$

$$(3.2) \quad -\sigma_0^i + \sigma_q \geq -c_2^i,$$

$$(3.3) \quad \sigma_0^s - \sigma_q - \sigma_p \geq -c_2^s,$$

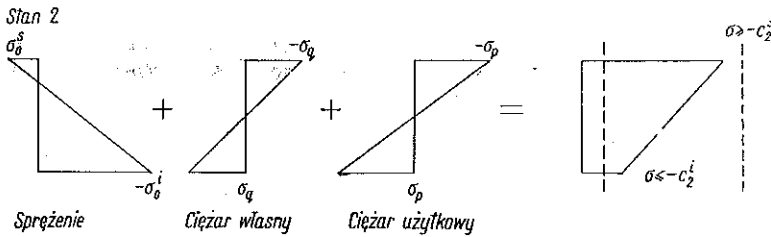
$$(3.4) \quad -\sigma_0^i + \sigma_q + \sigma_p \leq -c_1^i.$$

Nierówności (3.1) i (3.2) odnoszą się do stanu bezużytkowego, zaś (3.3) i (3.4) do stanu użytkowego. Nierówności (3.1) i (3.3) dotyczą naprężeń na górnej krawędzi, a (3.2) i (3.4) na dolnej.



Rys. 1

Stwierdzenie czy we wszystkich przekrojach belki naprężenia spełniają wypisane nierówności, jest sprawdzeniem wytrzymałościowym belki. Zadaniem tym nie będziemy się tu zajmowali. Jednakże będziemy tak obierać warunki kształtowania, aby w większości przypadków sprawdzenie naprężeń wykazało zadowalającą wytrzymałość belki.



Rys. 2

Kształt belki można wyznaczyć przekształcając niektóre nierówności na równości. Rozważając różne możliwości tych przekształceń należy mieć na uwadze dwa aspekty zagadnienia.

1. Potencjał belki, który jest w pewnym sensie proporcjonalny do kosztu materiału, zależy nie tylko od betonu, ale i od stali. Dlatego nie należy kształtować belek w warunkach, które prowadzą do znacznego powiększenia siły sprężającej. Warunkiem tego rodzaju jest np.

$$\sigma_0^s - \sigma_q = -c_1^s.$$

W tym przypadku naprężenie ściskające na górnej krawędzi jest ograniczone do minimalnej wartości $-c_1^i$ za pomocą dodatkowej siły sprężającej, podczas gdy nawet znaczne powiększenie tego naprężenia nie przynosi szkody belce.

2. Podstawowym warunkiem kształtowania belek sprężonych z betonu musi być wyeliminowanie niewielkiego nawet rozciągania w tych miejscach belki, w których może ono łatwo wzrosnąć wraz z upływem czasu i doprowadzić do zniszczenia. Na przykład rozciąganie na dolnej krawędzi w stanie użytkowym należy uznać za niedopuszczalne.

Dyskusja taka jest szczegółowo opisana w pracy [2]. Wynika z niej kilka ogólnych wniosków przytoczonych poniżej.

Wyznaczenie kształtu belki na podstawie zależności (3.1)-(3.4) przekształconych na równości nie zawsze jest możliwe, prowadzi to bowiem do belki równej wytrzymałości, w której osiągnięto naprężenia dozwolone we wszystkich przekrojach poprzecznych na obu krawędziach i w obu stanach obciążenia. Przekroje poprzeczne są symetryczne względem osi obojętnej lub też symetria dotyczy tylko wskaźników wytrzymałości. Symetria jest niecelowa, bowiem nie odpowiada przeważnie zadaniom konstrukcyjnym belki a prowadzi do powiększenia powierzchni betonu ściskanego siłą sprężającą. Powoduje to niepotrzebne zwiększenie tej siły. Wyznaczone mimośrodowo siły sprężającej są zbyt małe, co jest niepożądane ze względów ekonomicznych. W pobliżu podpór wysokość belki maleje do zera.

Belka wyznaczona z trzech równości odpowiada minimalnej objętości betonu i najmniejszej wysokości ustrojowej. Jest to niekiedy użyteczne, jednak prowadzi z reguły do większego zużycia stali sprężającej. Wobec tego w przypadku ogólnym trzykrotne ograniczenie belki nie jest celowe, bowiem koszt elementu zależy również od kosztu stali.

Najbardziej oszczędny kształt belki otrzymamy posługując się dwiema równościami. W tym przypadku w każdym z rozpatrywanych stanów obciążenia tylko na jednej krawędzi będzie wykorzystane naprężenie dozwolone, zaś na drugiej krawędzi pozostanie margines. Zachodzi tu jak widać pewna analogia do zadania o ekonomicznej wysokości belki żelazobetonowej.

Wyznaczenie kształtu tylko na podstawie jednej równości jest celowe, gdy wystarcza rozpatrzenie jednego stanu obciążenia. Wówczas można ograniczyć się do zabezpieczenia na jednej z krawędzi minimalnego naprężenia ściskającego. Na drugiej krawędzi naprężenie ściskające osiągnie znacznie większą wartość, co wymaga oczywiście sprawdzenia i porównania z naprężeniem dozwolonym.

Jeżeli przyjmiemy, że dozwolone naprężenia minimalne i maksymalne na obu krawędziach są sobie równe,

$$c_1^i = c_1^d = c_1, \quad c_2^i = c_2^d = c_2,$$

to z nierówności (3.1)-(3.4) otrzymamy warunki

$$(3.5) \quad \sigma_0^s - \sigma_q \leq -c_1,$$

$$(3.6) \quad -\sigma_0^i + \sigma_q \geq -c_2,$$

$$(3.7) \quad \sigma_0^s - \sigma_q - \sigma_p \geq -c_2,$$

$$(3.8) \quad -\sigma_0^i + \sigma_q + \sigma_p \leq -c_1.$$

Okazuje się więc, że wyrównywanie naprężeń na krawędziach może być prowadzone w różny sposób. Obranie właściwej drogi postępowania decyduje o przydatności rozwiązania.

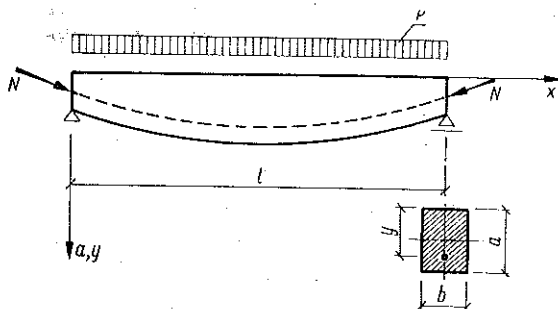
Pewną wskazówką mogą tu być niniejsze rozważania, jednak w każdym przypadku warunki konstrukcyjne decydują o sformułowaniu zadania. Nie można stwierdzić np. ogólnie wyższości kształtowania za pomocą kilku warunków nad kształtowaniem tylko według jednej nierówności, często bowiem w zagadnieniach praktycznych tylko wysokość belki lub grubość płyty mogą być zmienne wzdłuż rozpiętości. Jednakże i wówczas należy wyznaczyć kształt optymalny spośród innych możliwych w danych warunkach.

Rozwiążemy teraz kilka zadań o wyznaczaniu kształtu belek przez wyrównanie naprężeń na krawędziach. Zadania zostały dobrane w ten sposób, aby ilustrowały różne sposoby traktowania zagadnienia. Rozpatrzmy jedynie przypadki wyrównywania naprężeń na jednej lub dwóch krawędziach.

4. Wyznaczenie zmiennej wysokości belki oraz położenia siły sprężającej

Rozpatrzmy belkę przedstawioną na rys. 3.

Szerokość belki b jest stała wzdłuż rozpiętości. Wysokość belki $a(x)$ oraz rzędne siły sprężającej $y = y(x)$ są poszukiwanymi funkcjami niewiadomymi.



Rys. 3

Funkcje te wyznaczmy z dwóch równań otrzymanych z nierówności (3.6) i (3.8):

$$(4.1) \quad -\sigma_0^i + \sigma_q = -c_2,$$

$$(4.2) \quad -\sigma_0^i + \sigma_q + \sigma_p = -c_1.$$

W ten sposób w stanie bezużytkowym naprężenie na dolnej krawędzi będzie stałe i równe $-c_2$. Wartość ta odpowiada dozwolonemu naprężeniu na ściskanie. W stanie użytkowym naprężenie na tej krawędzi będzie równe minimalnej wartości naprężenia od ściskania $-c_1$, co ma przeciwdziałać występowaniu rozciągania w betonie.

Równanie (4.1) i (4.2) można napisać w następującej postaci:

$$(4.3) \quad \frac{6\gamma}{a^2} \left[x \int_0^{l/2} a dx - \int_0^x a(x-\xi) d\xi \right] - \frac{N(6y-3a)}{a^2 b} - \frac{N}{ab} = -c_2,$$

$$(4.4) \quad \frac{3px(l-x)}{a^2 b} + \frac{6\gamma}{a^2} \left[x \int_0^{l/2} a dx - \int_0^x a(x-\xi) d\xi \right] - \frac{N(6y-3a)}{a^2 b} - \frac{N}{ab} = -c_1.$$

Po odjęciu równań stronami otrzymamy

$$(4.5) \quad a = a(x) = \pm \sqrt{\frac{3px(l-x)}{b(c_2-c_1)}} = \pm a\sqrt{x(l-x)}.$$

Ułamek pod pierwiastkiem jest zawsze większy od zera; tylko znak plus przed pierwiastkiem odpowiada warunkom zadania.

Funkcję $y(x)$ wyznaczmy z równania (4.3):

$$(4.6) \quad y = \frac{1}{3}a + c_2 \frac{a^2 b}{6N} + a \frac{\gamma b}{N} \left[\sqrt{x(l-x)} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{lx}{6} - \frac{l^2}{8} \right) + \frac{l^2}{8} \left(x - \frac{l}{2} \right) \arcsin \frac{l-2x}{l} + \frac{l^3 \pi}{32} \right].$$

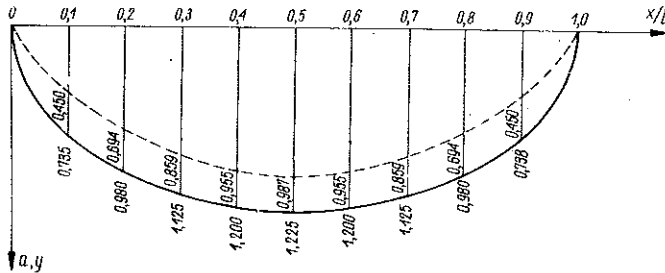
Podobnie jak w pracy [3] otrzymaliśmy belkę o zerowej wysokości w punktach $x=0$ i $x=l$. Wynik ten jest spowodowany pominięciem wpływu sił stycznych. Praktyczne znaczenie mogą mieć funkcje $a(x)$ i $y(x)$ z pominięciem otoczenia punktów skrajnych, gdzie należy wartości a i y wyznaczyć bądź z innych warunków wytrzymałościowych, bądź też z warunków konstrukcyjnych.

Wskazany sposób postępowania jest stosowany powszechnie przy wyznaczaniu wysokości i mimośrodów w belce o stałej wysokości. Wówczas jednak tylko przekrój środkowy będzie posiadał na dolnej krawędzi naprężenia w obu stanach równe skrajnym wartościom $-c_1$ i $-c_2$. We wszystkich pozostałych przekrojach naprężenia na dolnej krawędzi nie osiągają wartości dozwolonych.

Zgodnie z podstawowymi twierdzeniami kształtowania wytrzymałościowego, [1], powiększanie przekrojów elementów w punktach, w których panują większe naprężenia, i zmniejszanie ich w punktach mniej obciążonych przy zachowaniu stałej objętości zmniejsza potencjał elementu. Zmieniając w ten sposób kształt elementów osiągniemy rozkład naprężeń zgodny z warunkami (4.1) i (4.2).

Belka określona równaniami (4.5) i (4.6) odpowiada więc minimum potencjału przy danej objętości elementu konstrukcyjnego. Minimum to należy traktować w sposób właściwy, co wymaga zwrócenia uwagi na przyjęte warunki i zastrzeżenia dotyczące sposobu określenia stanów obciążeniami oraz parametrów kształtu belki.

Przykład liczbowy. Wyznamy funkcje $a(x)$ i $y(x)$ przy następujących danych: $b = 0,4$ m, $\gamma = 2,6$ t/m, $p = 4,0$ t/m, $c_1 = 50$ t/m, $c_2 = 550$ t/m, $l = 10$ m, $N = 120$ t.

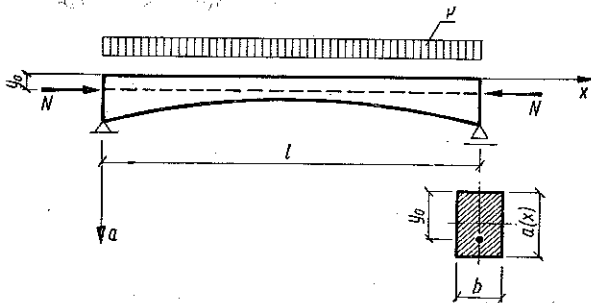


Rys. 4

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzorów (4.5) i (4.6) otrzymamy wykresy funkcji przedstawione na rys. 4, na którym linia ciągła oznacza przebieg funkcji $a(x)$, a więc krawędź dolną belki, zaś linia przerywana stanowi wykres funkcji $y(x)$ określającej położenie kabla sprężającego.

5. Wyznaczanie zmiennej wysokości belki przy stałej rzędnej siły sprężającej

Rozpatrzmy belkę sprężoną kablem prostoliniowym o stałej wielkości siły sprężającej. Należy wyznaczyć zmienną wysokość belki $a(x)$. Szerokość belki b i położenie kabla sprężającego y_0 są stałe wzdłuż rozpiętości belki.



Rys. 5

Funkcję poszukiwaną $a = a(x)$ wyznaczymy z warunku wyrównania naprężeń na dolnej krawędzi belki w stanie użytkowym do wartości $-c$. W ten sposób w stanie obciążonym w belce nie będą występowały naprężenia rozciągające.

Z warunku wyrównania naprężeń na dolnej krawędzi otrzymujemy równanie

$$(5.1) \quad \sigma^t = \frac{3pl}{a^2b}x - \frac{3p}{a^2b}x^2 + \frac{6\gamma x}{a^2} \int_0^{l/2} adx - \frac{6\gamma}{a^2} \int_0^x a(x-\xi)d\xi - \frac{6Ny_0}{a^2b} + \frac{2N}{ab} = -c.$$

Po uporządkowaniu równania i dwukrotnym różniczkowaniu względem zmiennej niezależnej x otrzymamy podobnie jak w pracy [6]

$$(5.2) \quad 6p + 6\gamma ba - 2Na'' - 2bc(a'^2 + aa'') = 0.$$

Rozwiązanie równania całkowego (5.1) jest równoważne rozwiązaniu równania (5.2) przy następujących warunkach brzegowych:

$$(5.3) \quad \begin{cases} 6Ny_0 - 2Na(0) - a^2(0)bc = 0, \\ -3pl - 6\gamma b \int_0^{l/2} adx - 2Na'(0) - 2a(0)a'(0)bc = 0. \end{cases}$$

W ten sposób sformułowane zadanie jest analogiczne do rozwiązane go w pracy [6] p. 3.1, przy czym różnice w warunkach brzegowych wynikają z odmiennego sposobu podparcia belki. Skorzystamy tu więc z podanego tam rozwiązania po wprowadzeniu zmiany oznaczeń. Ostatecznie otrzymamy analogiczne rozwiązanie zadania w postaci funkcji odwrotnej

$$(5.4) \quad x = x(a) = \bar{c} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{(bca + N)da}{\sqrt{\frac{1}{3}\gamma b^2 ca^3 + \frac{1}{2}(pbc + N\gamma b)a^2 + Npa + \bar{c}}}.$$

Zarówno dodatni jak i ujemny znak w obu otrzymanych wzorach odpowiada warunkom zadania. Rozwiązanie będzie symetryczne względem prostej $x = l/2$.

Stałą \bar{c} wyznaczmy z drugiego z warunków (5.3):

$$a'(0) = - \frac{\frac{3}{2}pl + 3\gamma b \int_0^{l/2} adx}{a(0)bc + N},$$

a po podstawieniu do (5.10) dla $[da/dx]_{x=0} = a'(0)$ znajdziemy

$$\bar{c} = -\frac{1}{3}\gamma b^2 ca^3(0) - \frac{1}{2}(pbc + N\gamma b)a^2(0) - Npa(0) + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2}pl + 3\gamma b \int_0^{l/2} adx \right)^2.$$

Aby obliczyć wartość liczbową stałej \bar{c} , ustalimy objętość tworzywa, z której ukształtujemy belkę. Przeto

$$(5.5) \quad \bar{c} = -\frac{1}{3}\gamma b^2 ca^3(0) - \frac{1}{2}(pbc + N\gamma b)a^2(0) - Npa(0) + \frac{1}{4}(pl + \gamma V)^2.$$

Funkcję $a(x)$ w punkcie $x = 0$ określimy z pierwszego z warunków (5.3):

$$(5.6) \quad a(0) = \frac{N}{bc} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 6 \frac{bcy_0}{N}} \right).$$

We wzorze tym tylko dodatni znak przed pierwiastkiem odpowiada warunkom zadania.

Stałą \bar{c} wyznaczyć można z warunku zgodności: $x[a(0)] = 0$.

Rozwiązanie zadania w postaci (5.4) nie pozwala na bezpośrednie wyciągnięcie wniosków o kształcie belki; będzie to możliwe po wykonaniu przykładów liczbowych.

O praktycznej stronie zadania można zauważyć, że jedna funkcja niewiadoma występuje w przypadkach, gdy ze względów na wykonanie nie chcemy stosować kabli krzywoliniowych. Wówczas zmianę mimośrodów uzyskać można przez zmianę wysokości kształtowanego elementu wzdłuż rozpiętości. Taki układ bywa często stosowany w przypadku nośnej płyty sprężonej, gdzie potrzebny mimośród może być uzyskany przez zmianę kształtu płyty przy pozostawieniu prostoliniowego kabla.

W zadaniu występuje tylko jedna funkcja niewiadoma określająca kształt elementu, przeto naprężenia mogą być wyrównane tylko na jednej krawędzi. Obranie krawędzi oraz stanu obciążenia, w których następuje wyrównanie, podyktowane jest przez warunki zadania.

W rozpatrywanym przypadku wyrównano naprężenia na dolnej krawędzi w stanie użytkowym do wartości $-c$. Wartość ta odpowiada minimalnemu naprężeniu dozwolonemu, które zabezpiecza przed powstaniem rozciągania w betonie. Na górnej krawędzi naprężenie jest wielokrotnie większe i powinno być sprawdzone niezależnie od kształtowania belki.

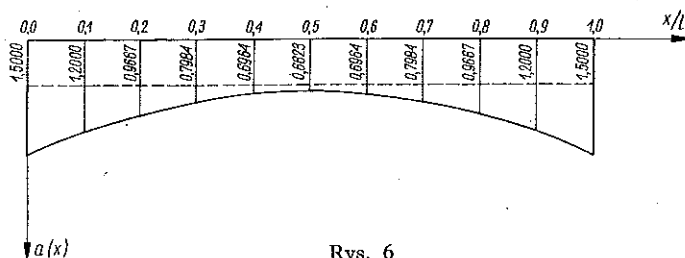
W stanie bezużytkowym na dolnej krawędzi występują ściskania o wartości bezwzględnej większej od c , zaś na górnej krawędzi naprężenia ścisające mniejsze od występujących w stanie użytkowym. W przypadku dużego wpływu obciążenia użytkowego w stosunku do ciężaru własnego należy sprawdzić, czy beton na górnej krawędzi w stanie bezużytkowym nie jest rozciągany. Rozważania, na temat wpływu obciążenia użytkowego przedstawiono w p. 8.

Widać stąd, że kształtowanie belki o jednym parametrze zmiennym ma charakter jednostronny i nie gwarantuje właściwego układu naprężeń bez założeń dodatkowych odnośnie sposobu obciążenia. Tym niemniej wyrównanie naprężeń na jednej krawędzi pozwala na najwłaściwsze rozłożenie materiału wzdłuż rozpiętości.

Przykład liczbowy. Wyznamy wysokość belki $a(x)$ przy następujących danych: $b = 0,4$ m, $p = 3$ t/m, $l = 10$ m, $c = 50$ t/m², $\gamma = 2,6$ t/m³, $N = 150$ t.

Rzędna siły sprężającej jest wielkością stałą $y_0 = 0,55$ m. Objętość tworzywa przyjmujemy równą $V = 3,75$ m³, a stałą \bar{c} obliczamy ze wzoru (5.5): $\bar{c} = -347,4$.

Ze wzoru (5.6) wyznaczamy wysokość przekroju na podporze $a(0) = 1,50$ m. Rzędne poszukiwanej funkcji $a(x)$ obliczamy metodą RUNGGO-KUTTA. Przebieg funkcji oraz wartości poszczególnych rzędnych pokazano na rys. 6. Należy zauważyć, że w rozwiązany przykładzie w stanie bezużytkowym wystąpią niewielkie rozciągania na górnej krawędzi belki. Wobec tego nierówność (3.1) nie jest tu spełniona. W rozwiązaniu praktycznym taka sytuacja



Rys. 6

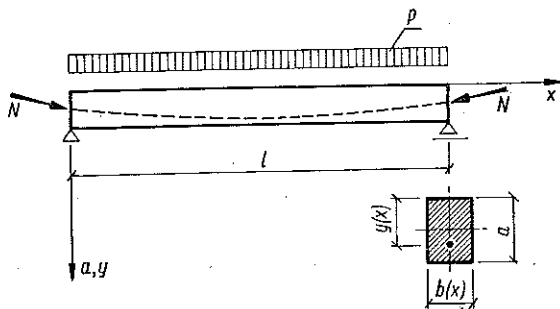
nie mogłaby być uznana za niebezpieczną dla belki, ponieważ rozciąganie ulegać będzie szybkiemu zmniejszeniu wraz ze spadkiem siły sprężającej z upływem czasu, jak również wobec ustawienia obciążeń stałych jak np. budowy nawierzchni na pomoście mostu, co następuje zwykle niedługo po sprężeniu belki.

6. Wyznaczenie zmiennej szerokości belki, gdy dane jest położenie siły sprężającej

Rozpatrzmy belkę sprężoną kablem o trasie krzywoliniowej parabolicznej:

$$(6.1) \quad y = \frac{a}{2} \left[\frac{4}{l^2} x(l-x) + 1 \right].$$

Siła sprężająca jest stała wzdłuż rozpiętości belki. Wysokość belki a jest stała, natomiast szerokość $b = b(x)$ jest funkcją poszukiwaną. Belka jest pod-



Rys. 7

dana działaniu obciążenia użytkowego p , równomiernie rozłożonego, oraz ciężaru własnego.

Funkcję poszukiwaną $b = b(x)$ wyznaczymy z warunku wyrównania naprężeń na dolnej krawędzi belki w stanie użytkowym do wartości $-c$.

Kształt trasy kabla sprężającego poprowadzono dla uproszczenia rachunku w taki sposób, aby w środku rozpiętości belki była ona styczna do dolnej krawędzi. Pominięto tu konieczną warstwę betonu ochronnego.

Wyrównanie naprężeń na dolnej krawędzi wymaga spełnienia następującego warunku:

$$\frac{3px(l-x)}{a^2b} + \frac{6\gamma}{ab} \left[x \int_0^{l/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi \right] - \frac{N(6y-3a)}{a^2b} - \frac{N}{ab} = -c$$

lub

$$(6.2) \quad 3px(l-x) + 6\gamma a \left[x \int_0^{l/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi \right] - 6Ny + 2Na + a^2bc = 0.$$

Po podstawieniu obranej funkcji $y(x)$ otrzymamy

$$(6.3) \quad \left(\frac{12Na}{l^2} - 3p \right) (lx - x^2) - 6\gamma a \left[x \int_0^{l/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi \right] + Na - a^2bc = 0.$$

Różniczkując dwukrotnie względem zmiennej niezależnej znajdziemy

$$(6.4) \quad b'' - b \frac{6\gamma}{ac} = - \left(\frac{24N}{acl^2} - \frac{6p}{a^2c} \right).$$

Rozwiązanie równania całkowego (6.3) jest równoważne rozwiązaniu równania różniczkowego (6.4) przy warunkach brzegowych

$$(6.5) \quad \begin{cases} -Na + a^2cb(0) = 0, \\ \frac{12Na}{l} - 3pl - 6\gamma a \int_0^{l/2} b dx - a^2cb'(0) = 0. \end{cases}$$

Całą ogólną równania (6.4) jest funkcja

$$(6.6) \quad b = \frac{4N}{l^2\gamma} - \frac{p}{a\gamma} + A_1 e^{x\sqrt{\frac{6\gamma}{ac}}} + B_1 e^{-x\sqrt{\frac{6\gamma}{ac}}},$$

gdzie A_1 i B_1 są stałymi, które wyznaczymy z warunków brzegowych (6.5).

Całka równania (6.3) posiada postać następującą:

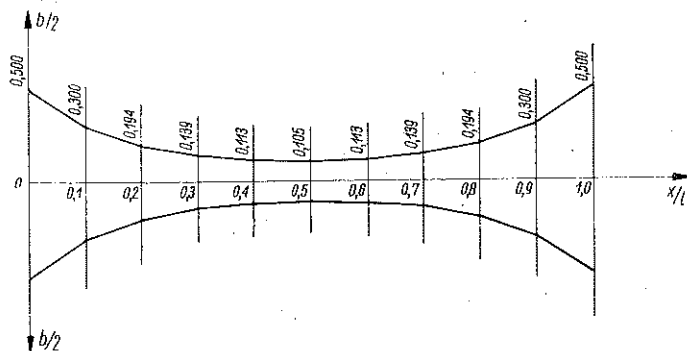
$$(6.7) \quad b = \frac{4N}{l^2\gamma} - \frac{p}{a\gamma} + \left(\frac{N}{ac} - \frac{4N}{l^2\gamma} + \frac{p}{a\gamma} \right) \frac{e^{(x-l)\sqrt{\frac{6\gamma}{ac}}} + e^{-x\sqrt{\frac{6\gamma}{ac}}}}{1 + e^{-l\sqrt{\frac{6\gamma}{ac}}}}.$$

O obranej krawędzi, na której wyrównano naprężenia, wypowiedzieć można uwagi podobne do uwag w p. 5. Zadanie miało na celu przedstawienie zmien-

ności szerokości belki przy stałej wysokości. Paraboliczna trasa kabla sprężającego jest często używana w belkach swobodnie podpartych i obciążonych w sposób ciągły, ponieważ posiada kształt wieloboku sznurowego obciążenia.

Belki o zmiennej szerokości są rzadko stosowane ze względu na koszt wykonania. Istniejące konstrukcje tego rodzaju to przeważnie belki poprzeczne w mostach o znacznej szerokości pomostu i ograniczonej wysokości ustrojowej.

Przykład liczbowy. Wyznamy kształt belki przy następujących wartościach parametrów: $a = 0,8$ m, $p = 0,5$ t/m, $l = 10$ m, $c = 50$ t/m², $\gamma = 2,6$ t/m³, $N = 20$ t.



Rys. 8

Po wprowadzeniu tych wartości do wzoru (6.8) otrzymamy

$$b = 0,067 + \frac{0,433}{1,001933} [e^{(x-1)0,6245} + e^{-x0,6245}].$$

Wykres funkcji $b(x)$ przedstawiono na rys. 8.

7. Wyznaczenie zmiennej szerokości belki oraz położenia siły sprężającej

Rozpatrzmy belkę o stałej wysokości a oraz zmiennej szerokości $b(x)$, sprężoną kablem o stałej sile sprężającej. Położenie kabla w przekroju poprzecznym $y(x)$ jest drugą funkcją poszukiwaną (rys. 9).

Poszukiwane funkcje wyznaczymy wyrównując naprężenia na obu końcach belki w stanie użytkowym do wartości $-c_1$ i $-c_2$.

Otrzymujemy stąd dwa równania

$$(7.1) \quad -3plx + 3px^2 - 6\gamma a [x \int_0^{1/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi] + 6Ny - 4Na + c_2 a^2 b = 0,$$

$$(7.2) \quad 3plx - 3px^2 + 6\gamma a [x \int_0^{1/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi] - 6Ny + 2Na + c_1 a^2 b = 0.$$

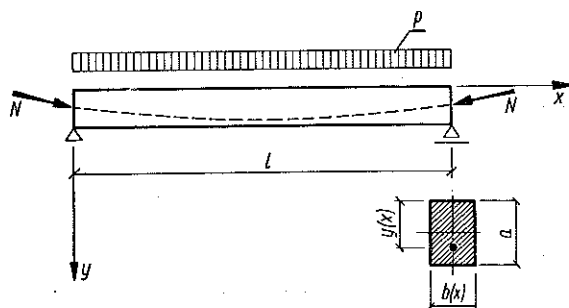
Po dodaniu równań stronami otrzymamy

$$(7.3) \quad -2Na + a^2b(c_1 + c_2) = 0, \quad a \neq 0, \quad b = \frac{2N}{a(c_1 + c_2)} = \text{const},$$

a zatem belka posiada stałe wymiary wzdłuż rozpiętości. Podstawiając zależność (7.3) do równania (7.2) wyznaczmy poszukiwaną funkcję $y(x)$

$$(7.4) \quad y(x) = \frac{a}{3} \left(1 + \frac{c_1}{c_1 + c_2} \right) + \left(\frac{p}{2N} + \frac{\gamma}{c_1 + c_2} \right) (xl - x^2).$$

Na tym kończy się pierwsza część zadania polegająca na wyznaczeniu dwóch funkcji z warunków (3.3) i (3.4).



Rys. 9

Rozpatrywaną belkę ukształtujemy powtórnie wychodząc bezpośrednio z warunku minimum potencjału odkształcenia sprężystego przy zachowaniu stałej objętości.

Celem tego rozważania będzie wykazanie zbieżności obu dróg kształtowania; zadanie to ma charakter teoretyczny, jak to wskazuje układ naprężeń niecelowych praktycznie.

Potencjał całkowity belki pochodzący od zginania i ściskania oraz objętość belki określone są wzorami:

$$(7.5) \quad U = \frac{6}{Ea^3} \int_0^l \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} px(l-x) + \right. \\ \left. + \gamma a \left[x \int_0^{l/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi \right] - N \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \right] dx + \frac{N^2}{2Ea} \int_0^l \frac{dx}{b},$$

$$(7.6) \quad V = a \int_0^l b dx.$$

Warunkiem minimalnej wartości funkcjonału U przy stałej wartości funkcjonału V jest równanie

$$(7.7) \quad \frac{\partial}{\partial y} [U - Kb] = 0.$$

Stąd otrzymamy

$$\frac{1}{2} px(l-x) + \gamma a \left[x \int_0^{l/2} b dx - \int_0^x b(x-\xi) d\xi \right] - Ny + \frac{1}{2} Na = 0.$$

Po podstawieniu do równania (7.5) mamy

$$(7.8) \quad U = \frac{N^2}{2Ea} \int_0^l \frac{dx}{b}.$$

Drugi warunek minimum można napisać w postaci

$$(7.9) \quad \frac{\partial}{\partial b} (U - Kb) = 0.$$

Równania (7.7) i (7.8) stanowią układ równań EULERA, którego rozwiązaniem są dwie poszukiwane funkcje $b(x)$ i $y(x)$, określające minimum funkcjonału U przy stałej wartości V .

Z równania (7.9) otrzymamy

$$(7.10) \quad -\frac{N^2}{b^2} - K = 0.$$

Należy zauważyć, że warunkiem minimum jest zerowa wartość tego składnika potencjału, który związany jest z momentami zginającymi. Istotnie, główna część potencjału w belkach zginanych pochodzi, jak wiadomo, od momentów zginających. Sprowadzenie do zera tego składnika redukuje wartość potencjału do wielkości drugorzędnych. Analogiczna zupełnie sytuacja występuje w klasycznych zadaniach o kształtowaniu osi łuków.

Jeżeli wykorzystamy tu funkcje y i b wyznaczone poprzednio, (7.3) i (7.4), to otrzymamy

$$(7.11) \quad -\frac{Nac_1}{3(c_1+c_2)} + \frac{1}{6} Na = 0,$$

$$(7.12) \quad K = \frac{1}{4} a^2 (c_1 + c_2)^2.$$

Z równania (7.11) otrzymujemy bezpośrednio warunek

$$(7.13) \quad c_1 = c_2 = c.$$

W tym przypadku obie poszukiwane funkcje przybierają postać

$$(7.14) \quad b = \frac{N}{ac},$$

$$(7.15) \quad y = \frac{1}{2}a + \frac{(p + \gamma ab)l^2}{2N} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right].$$

Okazuje się, że funkcje otrzymane z warunków wyrównania naprężeń na krawędziach spełniają równania EULERA przy zachowaniu równości (7.13). Wówczas istnieje całkowita zbieżność pomiędzy obiema przytoczonymi drogami kształtowania. Minimum potencjału odkształcenia sprężystego przy stałej objętości tworzywa odpowiada warunkowi wyrównania potencjału jednostkowego we wszystkich punktach belki. Ponieważ naprężenia w przekroju poprzecznym belki rozkładają się prostoliniowo, przeto zbieżność występuje wtedy, gdy we wszystkich punktach belki naprężenia normalne posiadają stałą wartość c .

Wykazana zbieżność jest dobrą ilustracją ogólnych twierdzeń kształtowania wytrzymałościowego, [1]. Ograniczenia kształtu wprowadzone tu przy formułowaniu zadania umożliwiają osiągnięcie całkowitego wyrównania naprężeń i stan ten odpowiada minimum potencjału. W rozwiązywaniach praktycznych nie zawsze jest to możliwe.

Należy jednak zauważyć, że w belce sprężonej kształt minimalny, ustalony ze względu na potencjał odkształceń betonu, nie jest równoznaczny z optymalnym kształtem belki ze względu na koszt materiału zużytego na jej wykonanie. Doprowadzenie bowiem do kształtu minimalnego nie zawsze jest możliwe, a pociąga za sobą znaczne powiększenie siły sprężającej lub mimośrod. Belka sprężona, w której we wszystkich punktach naprężenia normalne są jednakowe, nie jest belką ekonomiczną, gdyż dodatkowa wielkość siły sprężającej została zużyta na zmniejszenie naprężeń ściskających na jednej z krawędzi. Okazuje się więc, że przy jednoznacznym wyznaczaniu optymalnego kształtu belki sprężonej z warunku minimum potencjału należy uwzględnić również potencjał proporcjonalny do odkształceń stali sprężającej. W skrajnych przypadkach czynnik ten może mieć poważne znaczenie.

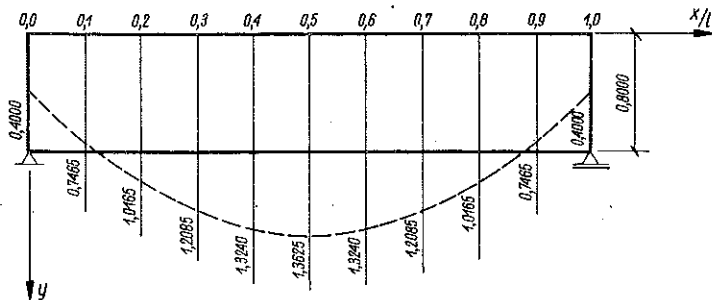
Przykład liczbowy. Wyznamy kształt kabla sprężającego w belce przy następujących parametrach: $a = 0,8$ m, $p = 0,5$ t/m, $l = 10$ m, $c = 50$ t/m², $\gamma = 2,6$ t/m³, $N = 20$ t.

Po wprowadzeniu tych wartości szczególnych do wzoru (7.15) otrzymamy funkcje

$$y(x) = 0,4 + 3,85 \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right].$$

Wykres funkcji $y(x)$ pokazano na rys. 10.

Okazuje się, że przy obranych parametrach takich jak w poprzednich przykładach w belce gromadzącej minimum potencjału kabel sprężający znajduje się poza betonem.



Rys. 10

Przykład ten wskazuje na konieczność odstępowania od dokładnego spełnienia warunku na minimum. W zadaniach praktycznych należy więc dążyć do takiego obrania warunków, aby otrzymana belka posiadała kształt zgodny z jej przeznaczeniem. W takim przypadku jednak otrzymamy minimum względne i kształt optymalny w danych warunkach

8. Kształtowanie belek na ciężar własny

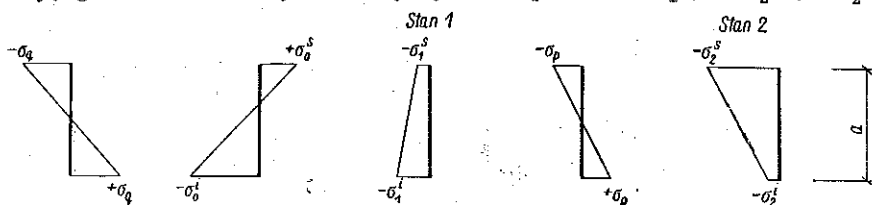
Przy rozpatrywaniu belek sprężonych w dwóch stanach obciążenia powstaje pytanie, czy słuszne jest przedstawione tutaj sformułowanie zagadnienia. Ograniczenie kształtowania do jednego stanu uprościłoby znacznie rozwiązania zarówno rachunkowo jak i pojęciowo. W analogicznych zagadnieniach kształtowania osi łuków niecelowość uwzględnienia obciążenia użytkowego została udowodniona.

Kształtowanie belki prowadzimy przez wyrównanie naprężeń, opisane w p. 1 i 3. Naprężenia powinny być wyrównane do takich wartości, aby zapewnić bezpieczeństwo elementu oraz dobre wykorzystanie tworzywa. Po ukształtowaniu belki z takich czy innych warunków należy sprawdzić wytrzymałość belki w poszczególnych miejscach i stanach, w których bezpieczeństwo nie wynika bezpośrednio z warunków kształtowania. Wydaje się rzeczą celową dobieranie warunków kształtowania w taki sposób, aby sprawdzenie wytrzymałościowe wykazywało wystarczające bezpieczeństwo, nie zaś konieczność zmiany wymiarów. Jest to możliwe tylko w przypadku wyrównania naprężeń do takich wielkości, które zachowują pewne zapasy w stosunku do naprężeń dozwolonych w betonie.

Rozpatrzmy pod tym kątem widzenia kształtowanie belki z uwzględnieniem tylko ciężaru własnego pomijając obciążenie użytkowe.

Niech w dowolnym symetrycznym przekroju poprzecznym belki naprężenia będą przedstawione wykresami jak na rys. 11.

Jeżeli belkę ukształtujemy w stanie bezużytkowym na wyrównanie naprężeń $-\sigma_1^i$, to trzeba będzie sprawdzić, czy pozostałe trzy naprężenia nie przekraczają granic dozwolonych. Dotyczy to naprężeń $-\sigma_1^s$, $-\sigma_2^i$ i $-\sigma_2^s$.



Rys. 11

Rozpatrzmy najpierw naprężenie $-\sigma_1^i$:

$$(8.1) \quad \sigma_1^i = -\sigma_q + \sigma_0^s.$$

Naprężenie $-\sigma_q$ jest znane co do znaku i wielkości, natomiast σ_0^s jest zależne od położenia siły sprężającej w przekroju i znajduje się w przedziale

$$(8.2) \quad \frac{1}{2} \sigma_0^i \geq -\sigma_0^s \geq -\sigma_0^i.$$

Wobec wyrównania naprężenia $-\sigma_1^i$ do wartości zapewniającej ściskanie na dolnej krawędzi zachodzi nierówność

$$(8.3) \quad \sigma_0^i \geq \sigma_q.$$

Z zależności (8.2) i (8.3) $\sigma_1^i \leq 0$ wynika warunek,

$$(8.4) \quad \sigma_0^i \leq 2\sigma_q.$$

Jeżeli nierówności (8.3) i (8.4) są spełnione, to

$$(8.5) \quad \sigma_p \leq \sigma_1^i, \quad \sigma_1^i \leq \sigma_q,$$

przeto

$$(8.6) \quad \sigma_p \leq \sigma_q.$$

Naprężenia w stanie 2: σ_2^i i σ_2^s różnią się od naprężeń w stanie 1 o wartości $\pm \sigma_p$ i spełniają nierówności

$$(8.7) \quad -\sigma_p \geq \sigma_2^s \geq -\frac{3}{2} \sigma_q, \quad 0 \geq \sigma_2^i \geq -\sigma_q.$$

Naprężenia σ_2^i i σ_2^s nie przekroczą więc granic dopuszczalnych, jeżeli parametry wyjściowe zadania zostaną odpowiednio dobrane w stosunku do wytrzymałości tworzywa belki. Nie wprowadza to dodatkowych warunków do naszego zadania.

Okazuje się, że do spełnienia pozostałych trzech warunków przy kształtowaniu na wyrównania naprężenia σ_1^i potrzeba, aby naprężenie od ciężaru użytkowego było nie większe od naprężenia od ciężaru własnego,

$$(8.8) \quad |\sigma_p| \leq |\sigma_q|.$$

Warunek ten jest spełniony w elementach, w których decydującą rolę odgrywa ciężar własny. W tych przypadkach można belki kształtować uwzględniając tylko jeden stan obciążenia. W belkach mostowych z betonu sprężonego odpowiada to większym rozpiętościom podporowym. Można nawet wyznaczyć pewne rozpiętości graniczne, powyżej których nierówność (8.6) jest spełniona. Rozpiętości te będą zależne od wielkości obciążenia użytkowego i innych parametrów zadania, jednak na ogół przy rozpatrywaniu kształtu belek mostów średniej i dużej rozpiętości można pominąć wpływ obciążenia użytkowego.

Rozważania powyższe nie wyczerpują zagadnienia i wskazują tylko na możliwość i celowość kształtowania belek w jednym stanie obciążenia.

Literatura cytowana w tekście

[1] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akademia Nauk Technicznych, Warszawa 1939.

[2] J. R. ROBINSON, *Cours de béton précontraint*, Dunod, Paris 1959.

[3] Y. GUYON, *Béton précontraint*, Eyrolles, Paris 1954.

[4] A. BRANDT i Z. WASIUTYŃSKI, *Kształtowanie wytrzymałościowe płyt z betonu sprężonego* Inżyn. Bud., 2(1957).

[5] A. BRANDT, *Kształtowanie belek sprężonych*, Inżyn. Bud., 1(1958).

[6] A. BRANDT i J. IGNACZAK, *Kształtowanie wytrzymałościowe belki wspornikowej*, Rozpr. Inżyn., 1, 6(1958).

[7] J. IGNACZAK, *O rozpiętościach belek wspornikowych ukształtowanych z warunku wyrównania naprężeń*, Rozpr. inżyn., 2, 7 (1959).

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК ПУТЕМ ВЫРАВНЕНИЯ КРАЙНИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Темой работы является определение формы изостатических, предварительно напряженных балок. Рассматриваются два состояния нагрузки балок.

В первом состоянии балка находится под влиянием собственного веса и усилия напряжения арматуры, а во втором — балка воспринимает также и полезную нагрузку.

Форма балки определяется из условий выравнивания крайних значений нормальных напряжений вдоль пролета балки. Эти условия в числе четырех, в общем случае не все пригодны для определения формы балки. Это зависит в значительной степени от отношения собственного веса к полезной нагрузке; часто достаточно использовать одно или два условия. В части 8 доказывается, что при балках с большими пролетами, когда главную роль играет собственный вес, целесообразным будет определить форму балки только в нагруженном состоянии.

В работе решается несколько задач, представляя определение формы балок в случаях, когда:

— искомыми функциями являются высота балки $a(x)$ и ордината усилия напряжения арматуры $y(x)$, (ч. 4);

— следует определить высоту балки $a(x)$ при постоянном положении усилия напряжения арматуры (ч. 5);

— искомой функцией является переменная ширина балки $b(x)$, а ордината силы определяется данной функцией $y(x)$ (ч. 6);

— искомыми функциями являются ширина балки $b(x)$ и ордината усилия напряжения арматуры $y(x)$ (ч. 7).

В ч. 7 дается кроме того пример сходимости двух методов определения формы балок, а именно метода выравнивания крайних значений нормальных напряжений и метода непосредственного применения условия минима потенциала упругой деформации, при сохранении постоянного объема материала. Эта сходимость является иногда менее отчетливой, ввиду добавочного ограничения формы, вытекающего обычно из условий практических применений.

Не утверждая что во всяком случае выражение напряжений является единственным способом определения форм предварительно напряженных балок, в работе приводится применение этого метода, а также его связь с проверкой прочности формируемых элементов.

Summary

THE DESIGN OF PRESTRESSED BEAMS BY EQUALIZING THE EXTREMAL STRESSES

This paper is devoted to determination of the shape of prestressed concrete isostatic beams. Two states of load are considered.

In the first case, the beam is subjected to the action of its load and the prestressing force. In the second state, the beam also carries a useful load.

The shape of the beam is determined from the condition of equal extreme values of the normal stresses along the span of the beam. These conditions, which are four in general, are not always all needed for the determination of the shape of the beam. This depends to a considerable degree on the ratio of own weight to the useful load; it frequently suffices to use one or two conditions. In Sec. 8, it is shown that for beams of considerable span, where the dominating role is played by own weight, it is reasonable to determine the shape in the unloaded state.

Several problems are solved, showing the determination of the shape of the beams in cases where functions sought for are

— the beam height $a(x)$ and the ordinate of the prestressing force;

— the beam height $a(x)$, with constant position of the prestressing force (Sec. 5);
— the variable width of the beam $b(x)$, the ordinate of the force constituting a given function $y(x)$ (Sec. 6);
— the beam width $b(x)$ and the ordinate of the prestressing force $y(x)$, (Sec. 7). In addition, in Sec. 7, the convergence of the two methods is shown by equalizing the extreme values of the normal stresses and directly, from the condition of minimum potential of elastic strain for a constant volume of the material. This agreement is sometimes less distinct in view of additional limitations on the form following from the conditions imposed usually by practice. It is not maintained that the method of equalizing the stresses is the only possible for the determination of the shape of prestressed beams. A description is given only of the application of this method and its relation to question of verification of the strength.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 października 1959 r.