

**WŁADYSŁAW BOGUSZ i KAZIMIERZ SZPUNAR**

**UKŁAD O JEDNYM STOPNIU SWOBODY  
O SILNIE NIELINIOWEJ PARZYSTEJ  
CHARAKTERYSTYCE TLUMIENIA**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CL**

**TOM VIII . ZESZYT 2 . ROK 1960**

## SPIS TREŚCI

1. Analiza jakościowa	189
2. Analiza ilościowa równania (1.1)	194

W pracach [1], [2] i [5] przeprowadzona została analiza rozwiązań układu o silnie nieliniowej nieparzystej charakterystyce tłumienia. Otrzymane wnioski wskazują, że przy takiej charakterystyce ruch jest zawsze asymptotycznie zanikający.

W pracy niniejszej przeprowadzona jest analiza jakościowa i ilościowa układu o silnie nieliniowej charakterystyce parzystej. Badania jakościowe przeprowadzono metodą hodografu prędkości, [4], zaś badania ilościowe metodą opisaną w pracy [5] na płaszczyźnie  $\dot{x}$   $\ddot{x}$ .

Otrzymane dwiema metodami przebiegi trajektorii (rys. 3 i 5) pokrywają się. Okazuje się, że istnieją w otoczeniu punktu osobliwego rozwiązania okresowe. Poza tym otoczeniem rozwiązania są nieograniczone.

W pracach [1] i [2] analizowane są układy o dysypacji dodatniej przy nieparzystych charakterystykach tłumienia. Ruch w tych przypadkach jest zawsze zanikający asymptotycznie. Przy wprowadzeniu wyrazów o potęgach parzystych do charakterystyk tłumienia metody stosowane w wymienionych pracach komplikują się i z tego względu zastosowana metoda w niniejszej pracy jest pożyteczna.

### 1. Analiza jakościowa

Rozważamy ruch układu punktów materialnych o jednym stopniu swobody opisany równaniem:

$$(1.1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x + a\dot{x}^2 = 0, \quad a > 0.$$

Analizę równania (1.1) przeprowadzimy metodą hodografu prędkości, opisaną w pracy [4].

Przez podstawienie  $\tau = \omega t$  równanie (1.1) przechodzi w równanie:

$$(1.2) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} + x + a \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy równanie w postaci (1.2) i będziemy stosować zapis:  $\dot{x} = dx/d\tau$ ,  $\ddot{x} = d^2x/d\tau^2$ .

Równanie (1.2) można napisać w postaci układu równań:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - ax_1^2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Na płaszczyźnie  $f_1 f_2$  rozpatrujemy iloczyn skalarny wektora  $\bar{\rho}$  o współrzędnych  $(f_1, f_2)$  i wektora  $\bar{v}$  o współrzędnych  $(\dot{f}_1, \dot{f}_2)$  oraz moment wektora  $\bar{v}$  względem początku układu  $(0,0)$  (rys. 1).

Iloczyn skalarny wektorów  $\rho$  i  $\bar{v}$  wyraża się wzorem

$$(1.4) \quad \Phi = f_1 \dot{f}_1 + f_2 \dot{f}_2.$$

Po obliczeniu pochodnych  $\dot{f}_1$  i  $\dot{f}_2$  i uwzględnieniu równań (1.3) otrzymamy

$$(1.5) \quad \Phi = f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_1 f_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) + f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2a f_2 f_1^2.$$

Funkcja  $\Phi$  znika w punktach:

$$(1.6) \quad f_1 = 0, f_2 \text{ dowolne} \quad \text{lub} \quad f_2 = 0, f_1 \text{ dowolne};$$

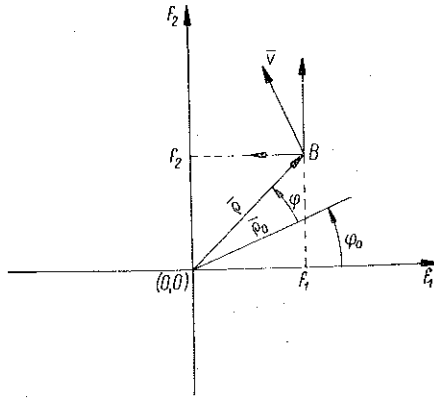
posiada znak nieujemny dla  $f_2 \leq 0$  i znak niedodatni dla  $f_2 \geq 0$ .

Ze wzoru (1.4) wynika, że funkcja  $\Phi$  jest pochodną względem czasu funkcji:

$$\frac{1}{2} \rho^2 = \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2),$$

czyli

$$(1.7) \quad \Phi = \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{dt}.$$



Rys. 1

Na płaszczyźnie  $f_1 f_2$  funkcja  $\rho$  określa odległość punktu  $B$  od początku układu (rys. 1). Z powyższych wzorów wynika, że dla  $f_2 < 0$  odległość punktu  $B$  od początku układu rośnie, zaś dla  $f_2 > 0$  odległość ta maleje.

Obliczymy moment wektora  $\bar{v}$  względem początku układu. Moment ten określa funkcja

$$(1.8) \quad \Psi = \dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2$$

i po obliczeniu pochodnych  $\dot{f}_1$  i  $\dot{f}_2$  z uwzględnieniem równań (1.3) otrzymamy

$$(1.9) \quad \Psi = f_1^2 + 2f_1 f_2^2 a + f_2^3.$$

Jeżeli  $a^2 f_2^2 - 1 < 0$ , funkcja  $\Psi$  jest stale dodatnia poza punktem osobliwym  $f_1 = f_2 = 0$ , w którym znika.

Obszar, w którym funkcja  $\Psi$  jest dodatnia, określa nierówność:

$$(1.10) \quad -\frac{1}{a} < f_2 < \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad f_1^2 + f_2^2 \neq 0.$$

Poza zbiorem (1.10), czyli dla  $f_2 \geq 1/a$  lub  $f_2 \leq -1/a$  funkcja  $\Psi$  może przyjmować wartości dodatnie i ujemne.

Zbiory punktów, w których funkcja  $\Psi$  zeruje się, jak wynika z (1.9), są określone wzorami:

$$(1.11) \quad \begin{cases} f_1 = -f_2(af_2 + \sqrt{a^2 f_2^2 - 1}), \\ f_1 = -f_2(af_2 - \sqrt{a^2 f_2^2 - 1}). \end{cases}$$

Krzywa  $\Psi = 0$  posiada asymptotę o równaniu

$$(1.12) \quad f_1 = -\frac{1}{2a}$$

Między funkcjami  $\Phi$  (1.4),  $\Psi$  (1.8) i  $\varrho$  wzdłuż dowolnego rozwiązania jak wykazano w pracy [4] zachodzi związek w obszarze, gdzie  $\Psi \neq 0$ :

$$(1.13) \quad \varrho = \varrho_0 e^{\int \frac{\Phi}{\Psi} d\varphi},$$

gdzie  $\varphi$  jest kątem obrotu wektora  $\bar{\varrho}$ ,  $\varrho_0$  długością początkową wektora  $\bar{\varrho}$  dla  $\varphi = \varphi_0$ . Między prędkością kątową wektora  $\bar{\varrho}$ ,  $\dot{\varphi}$  a funkcją  $\Psi$  zachodzi związek:

$$(1.14) \quad \dot{\varphi} = \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Zbadamy funkcję  $\Phi/\Psi$  i kąt obrotu  $\varphi$  wektora  $\bar{\varrho}$ .

Korzystając ze wzorów (1.5) i (1.9) możemy napisać

$$(1.15) \quad \frac{\Phi}{\Psi} = -\frac{2af_2 f_1^2}{f_1^2 + 2af_1 f_2^2 + f_2^2}.$$

Ze wzoru (1.15) wynika, że jeżeli  $f_2$  zmienia znak, to  $\Phi/\Psi$  zmienia także znak zachowując bezwzględną wartość.

Wstawiając (1.9) do (1.14) otrzymamy na prędkość kątową wzór:

$$(1.16) \quad \dot{\varphi} = \frac{f_1^2 + 2af_1 f_2^2 + f_2^2}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Wzór (1.16) upraszcza się, jeżeli podstawimy  $f_1 = \varrho \cos \varphi$ ,  $f_2 = \varrho \sin \varphi$ :

$$(1.17) \quad \dot{\varphi} = 1 + 2\varrho a \cos \varphi \sin^2 \varphi.$$

Jeżeli prawa strona jest dodatnia, wówczas pochodna  $\dot{\varphi}$  jest dodatnia i kąt  $\varphi$  rośnie nieograniczenie z czasem.

Podstawimy  $f_1 = \varrho \cos \varphi$  i rozwiążemy nierówność

$$(1.18) \quad 1 + 2af_1 \sin^2 \varphi > 0.$$

Nierówność (1.18) jest stale spełniona, jeżeli

$$(1.19) \quad f_1 > -\frac{1}{2a}.$$

Stąd wniosek, że na półpłaszczyźnie  $f_1 > -1/2a$  kąt obrotu wektora  $\bar{\varrho}$  rośnie nieograniczenie.

Możemy obliczyć całkę występującą we wzorze (1.13) w granicach  $[0, 2\pi]$ :

$$(1.20) \quad C = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{\Psi} d\varphi.$$

Ze wzoru (1.13) wynika, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{\Psi} d\varphi = \ln \varrho(2\pi) - \ln \varrho(0).$$

Z układu (1.3) po zróżniczkowaniu względem  $t$  i pod tawieniu  $f_1 = \varrho \cos \varphi$ ,  $f_2 = \varrho \sin \varphi$  otrzymamy

$$\frac{d\varrho \cos \varphi}{dt} = -\varrho \sin \varphi (2a\varrho \cos \varphi + 1), \quad \frac{d\varrho \sin \varphi}{dt} = \varrho \cos \varphi.$$

Jeżeli pomnożymy w pierwszym równaniu lewą stronę przez  $\varrho \cos \varphi$ , zaś prawą przez  $d\varrho \sin \varphi / dt$ , to pierwsze równanie można przekształcić do postaci:

$$\frac{\varrho \cos \varphi}{2a\varrho \cos \varphi + 1} \frac{d\varrho \cos \varphi}{d\varphi} = -\varrho \sin \varphi \frac{d\varrho \sin \varphi}{d\varphi}.$$

Całkując obustronnie otrzymamy związek między  $\varrho$  i  $\varphi$  w postaci

$$\varrho^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{a} \varrho \cos \varphi - \frac{1}{2a^2} \ln \left( \varrho \cos \varphi + \frac{1}{2a} \right) = D.$$

Stałą  $D$  obliczymy z warunku  $\varphi = 0$ ,  $\varrho = \varrho_0$  i otrzymamy

$$D = \frac{1}{a} \varrho_0 - \frac{1}{2a^2} \ln \left( \varrho_0 + \frac{1}{2a} \right).$$

Obliczymy  $\varrho$  dla  $\varphi = 2\pi$ . Otrzymamy równanie

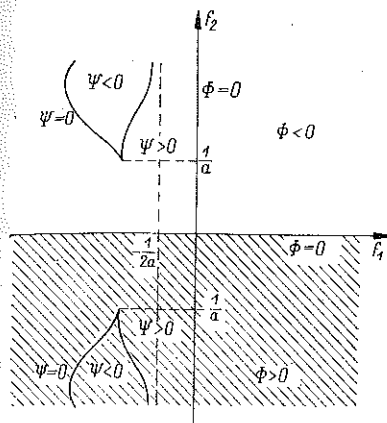
$$\frac{1}{a} \varrho(2\pi) - \frac{1}{2a^2} \ln \left[ \varrho(2\pi) + \frac{1}{2a} \right] = \frac{1}{a} \varrho_0 - \frac{1}{2a^2} \ln \left( \varrho_0 + \frac{1}{2a} \right).$$

Równanie powyższe ma jedno rozwiązanie  $\varrho(2\pi) = \varrho_0 = \varrho(0)$ , a stąd wartość całki  $C = 0$ .

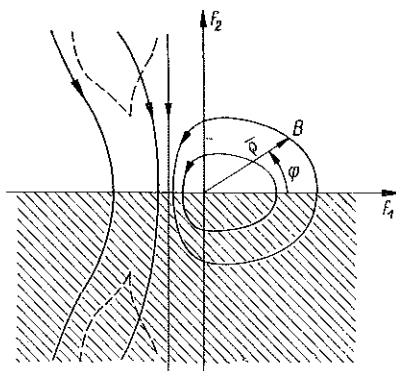
Na podstawie przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy obszary punktów na płaszczyźnie  $f_1 f_2$ ; podano je na rys. 2. W punktach określonych wzorem (1.6) funkcja  $\Phi = 0$ , zaś poza tymi punktami dla  $f_2 < 0$  funkcja  $\Phi > 0$ , dla  $f_2 > 0$  funkcja  $\Phi < 0$ . W punktach określonych wzorami (1.11) funkcja  $\Psi = 0$ , zaś między krzywymi (1.11) jak zaznaczono na rys. 2 funkcja  $\Psi < 0$ . W obszarze, gdzie  $\Psi < 0$ , prędkość kątowna  $\dot{\varphi}$  wektora  $\bar{\varrho}$  według wzoru (1.14) jest ujemna. Na półpłaszczyźnie  $f_1 > -1/2a$  kąt obrotu wektora  $\bar{\varrho}$  stale rośnie i prędkość kątowna  $\dot{\varphi}$  jest dodatnia.

Z otrzymanych wyników otrzymamy następujący przebieg trajektorii punktu  $B$  (rys. 3):

Na półpłaszczyźnie  $f_1 > -1/2a$  całka (1.20) jest zerem i trajektorie punktu  $B$  są krzywymi zamkniętymi okrążającymi punkt  $(0,0)$ . Asymptota (1.12) jest trajektorią punktu  $B$ . Na półpłaszczyźnie  $f_1 < -1/2a$  trajektorie punktu  $B$



Rys. 2



Rys. 3

idą do nieskończoności. Kierunek ruchu punktu  $B$  po trajektoriach zaznaczono strzałkami na podstawie znaku prędkości kątowej.

Z płaszczyzny  $f_1 f_2$  przechodzimy na płaszczyznę  $x_1 x_2$  stosując transformację odwrotną (1.3). Jakobian transformacji (1.3) wynosi

$$(1.21) \quad J = \begin{vmatrix} -2ax_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

a więc jest stale różny od zera i transformacja (1.3) jest odwracalna.

Poprzez transformację odwrotną asymptota (1.12) przechodzi w parabolę o równaniu

$$(1.22) \quad x_2 = -ax_1^2 + \frac{1}{2a}.$$

Łatwo sprawdzić, że (1.22) jest trajektorią na płaszczyźnie  $x_1 x_2$ .

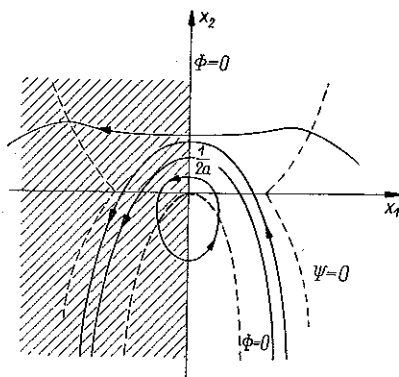
Proste (1.6) przechodzą w krzywe:

$$(1.23) \quad x_2 = -ax_1^2 \quad \text{i} \quad x_1 = 0, \quad x_2 \text{ dowolne.}$$

Krzywe (1.11) przechodzą w krzywe:

$$(1.24) \quad x_2 = x_1 \sqrt{a^2 x_1^2 - 1} \quad \text{i} \quad x_2 = -x_1 \sqrt{a^2 x_1^2 - 1}.$$

Przebieg trajektorii na płaszczyźnie fazowej  $x_1 x_2$  przedstawia rys. 4. Obszar leżący wewnątrz paraboli (1.22) jest obszarem rozwiązań okresowych. Poza tym obszarem rozwiązania są nieograniczone.



Rys. 4

Z równania (1.17) można określić w przybliżeniu okres rozwiązań okresowych. Przyjmujemy  $\varphi_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$  i po scałkowaniu względem czasu  $t$  dla małych  $\epsilon$  otrzymujemy wzór na okres:

$$(1.25) \quad T = 2\pi \text{ dla układu (1.2),} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ dla układu (1.1).}$$

Otrzymana wartość okresu jest przybliżoną wartością szeregu (2.30) określającego okres rozwiązań okresowych.

## 2. Analiza ilościowa równania

Przez obustronne zróżniczkowanie równania (1.1) otrzymujemy:

$$(2.1) \quad \ddot{x} + 2ax\dot{x} + \omega^2\dot{x} = 0.$$

Zastosujemy podstawienie:  $\dot{x} = p$  i otrzymamy równanie:

$$(2.2) \quad \dot{p} + 2ap\dot{p} + \omega^2p = 0.$$

Powyższe równanie przez kolejne podstawienie  $\dot{p} = u$  doprowadzamy do równania rzędu pierwszego:

$$(2.3) \quad u \frac{du}{dp} + 2apu + \omega^2p = 0,$$

gdzie  $p$  uważamy jako zmienną niezależną, zaś  $u$  jako funkcję poszukiwaną.

Równanie (2.3) możemy napisać w postaci:

$$(2.4) \quad \frac{du}{dp} = -p \left( 2a + \frac{\omega^2}{u} \right) \quad \text{dla } u \neq 0.$$

Łatwo wykazać, że przez każdy punkt różny od początku układu przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.4), zaś początek układu jest punktem osobliwym, przez który nie przechodzi żadna krzywa całkowa.

Jeżeli

$$(2.5) \quad 2a + \frac{\omega^2}{u} \neq 0,$$

to w równaniu (2.4) możemy rozdzielić zmienne i po scałkowaniu otrzymamy całkę ogólną w postaci:

$$(2.6) \quad \frac{u}{2a} - \frac{\omega^2}{4a^2} \ln(2au + \omega^2) + \frac{p^2}{2} = C.$$

Całką szczególną jest funkcja:

$$(2.7) \quad u = -\frac{\omega^2}{2a}.$$



Dyskusję równania (1.1) przeprowadzimy przy warunkach początkowych

$$(2.8) \quad t = t_1, \quad x = x_1 \neq 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Warunki początkowe dla równania (2.4) są wówczas następujące:

$$(2.9) \quad \dot{p} = 0, \quad u = u_1 = -\omega^2 x_1 \neq 0.$$

Jeżeli jest  $u_1 \neq -\omega^2/2a$ , to całka równania (2.4) jest postaci:

$$(2.10) \quad \frac{1}{2a} (u - u_0) - \frac{\omega^2}{4a^2} \ln \left| \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2} \right| + \frac{p^2}{2} = 0.$$

Jeżeli natomiast jest  $u_0 = -\omega^2/2a$ , to wówczas funkcja

$$(2.11) \quad x = \frac{1}{4a} [2 - \omega^2(t - t_1)^2]$$

spełnia równanie (1.1) i warunki (2.8).

Pole elementów liniowych równania (2.4) wykazuje symetrię względem osi  $u$ , a stąd wynika, że całka  $u(p)$  jest funkcją parzystą.

Z warunku jednoznaczności wynika, że żadna całka z rodziny (2.10) nie ma punktu wspólnego z krzywą całkową  $u = -\omega^2/2a$  i wobec tego jest

$$(2.12) \quad \operatorname{sgn}(2au + \omega^2) = \operatorname{sgn}(2au_0 + \omega^2)$$

i całkę (2.10) można napisać w postaci:

$$(2.13) \quad p^2 = \frac{1}{a} (u_0 - u) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}.$$

Jeżeli  $u_0 > -\omega^2/2a$ , to łatwo wykazać, że jest spełniona nierówność:

$$(2.14) \quad \frac{1}{a} u_0 + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{\omega^2}{2au_0 + \omega^2} > 0.$$

Przyjmując  $u = 0$  we wzorze (2.13) otrzymamy na  $p$  dwie wartości różniące się znakiem, z których dodatnią określa wzór:

$$(2.15) \quad p_0 = \sqrt{\frac{1}{a} u_0 + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{\omega^2}{2au_0 + \omega^2}}.$$

Jeżeli podstawimy  $p = 0$  we wzorze (2.13), otrzymamy równanie

$$(2.16) \quad \frac{1}{a} (u_0 - u) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2} = 0.$$

W celu przeprowadzenia dyskusji co do kształtu krzywych (2.13) w zależności od wartości początkowej  $u_0$  rozróżnimy trzy przypadki.

*Przypadek pierwszy.* Założymy, że  $u_0 > 0$  i wykażemy, że równanie (2.16) spełnia również pewna liczba ujemna  $\bar{u}_0$  z przedziału

$$(2.17) \quad -\frac{\omega^2}{2a} < \bar{u}_0 < 0.$$

Oznaczmy w tym celu prawą stronę (2.13) przez  $f(u)$ . Na podstawie (2.14) mamy  $f(0) > 0$ . Natomiast

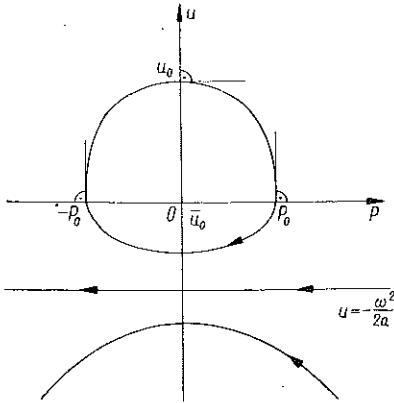
$$(2.18) \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty,$$

gdy  $u \rightarrow -\omega^2/2a$  oraz  $f'(u) < 0$  dla  $-\omega^2/2a < u < 0$ .

Z otrzymanych nierówności wynika istnienie liczby  $\bar{u}_0$  w przedziale (2.17), spełniającej równanie (2.16).

Różniczkując równanie (2.4) otrzymamy:

$$(2.19) \quad \frac{d^2u}{dp^2} = -\left(2a + \frac{\omega^2}{u}\right) + p \frac{\omega^2}{u^2} \frac{du}{dp} = -\frac{2au + \omega^2}{u} \left(1 + \frac{p^2\omega^2}{u^2}\right).$$



Rys. 5

Ze wzorów (2.4) i (2.19) wynika, że jeżeli  $p > 0$  oraz bądź  $u > 0$ , bądź  $u < -\omega^2/2a$ , to łuki krzywych całkowych mają przebieg malejący i są wypukłe, natomiast dla  $-\omega^2/2a < u < 0$  rosnące i wklęsłe. Przebieg krzywych całkowych równania (2.4) przedstawia rys. 5.

Z (2.4) wynika, że krzywe  $u(p)$  przecinają osie układu pod kątem prostym. Ponieważ  $u = dp/dt$ , więc jeżeli  $u > 0$ , to  $p$  rośnie ze wzrostem  $t$ .

Strzałka na rys. 5 oznacza, że ze wzrostem  $t$  punkt przemieszcza się zgodnie z tą strzałką.

Z równania (2.13) wynika następująca zależność:

$$(2.20) \quad x = -\frac{1}{\omega^2} (u + ap^2) = -\frac{u_0}{\omega^2} - \frac{1}{2a} \ln \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}.$$

Różniczkując (2.20) względem  $u$  po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(2.21) \quad \frac{dx}{du} = -\frac{1}{2au + \omega^2}.$$

Ze wzoru (2.13) otrzymamy

$$(2.22) \quad p = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{a} (u_0 - u) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Podstawiając (2.21) i (2.22) do wzoru

$$(2.23) \quad \frac{dt}{du} = \frac{1}{p} \frac{dx}{du}$$

otrzymamy

$$(2.24) \quad \frac{dt}{du} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}(u_0 - u) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}}.$$

Aby podać rozwiązanie równania (2.1) dla  $t > t_1$ , przyjmujemy  $\varepsilon = 1$ , bo wówczas gdy  $t$  rośnie, to  $u$  maleje od wartości  $u_0$  do wartości  $\bar{u}_0$ .

Całkując (2.24) otrzymamy

$$(2.25) \quad t - t_1 = - \int_{u_0}^u \frac{ds}{(2as + \omega^2) \sqrt{\frac{1}{a}(u_0 - s) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2as + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}}.$$

W ten sposób określona jest funkcja  $t(u)$  w przedziale  $\bar{u}_0 \leq u \leq u_0$ . Wzory (2.20) i (2.25) określają całość równania (2.1). Parametrem w tych wzorach jest  $u = \ddot{x}$ .

Oznaczmy przez  $t_2$  kolejny po  $t_1$  czas, w którym całka równania (2.1) osiąga ekstremum lokalne i to maksimum określone wzorem

$$(2.26) \quad x_2 = -\frac{\bar{u}_0}{\omega^2} > 0.$$

Podstawiając do (2.25)  $t = t_2$ ,  $u = \bar{u}_0$  otrzymamy

$$(2.27) \quad \Delta t = t_2 - t_1 = - \int_{u_0}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(2as + \omega^2) \sqrt{\frac{1}{a}(u_0 - s) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2as + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}}.$$

Wzory

$$(2.28) \quad \begin{cases} x = -\frac{u_0}{\omega^2} - \frac{1}{2a} \ln \frac{2au + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}, \\ t - t_2 = \int_{\bar{u}_0}^u \frac{ds}{(2as + \omega^2) \sqrt{\frac{1}{a}(u_0 - s) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2as + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}} \end{cases}$$

określają w przedziale  $[\bar{u}_0, u_0]$  całość równania (2.1), która jest przedłużeniem rozwiązania (2.20) i (2.25). Wstawiając do (2.28)  $t = t_3$  otrzymamy  $\Delta t = t_3 - t_2$ . Jest to okres czasu między dwoma kolejnymi ekstremami całki  $x(t)$ .

Dla  $t = t_2$  otrzymujemy  $u = u_0 > 0$  i  $p = 0$ , czyli  $x = x_1 = -u_0/\omega^2 < 0$  i  $\dot{x} = 0$ , a to są wartości, które przyjęliśmy za warunki początkowe dla  $t = t_1$ .

Wykazaliśmy, że w przypadku  $u_0 > 0$  całka równania (2.1) jest okresowa i oscylacyjna i okres określa wzór:

$$(2.29) \quad T = 2\Delta t = 2 \int_{u_0}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(2as + \omega^2) \sqrt{\frac{1}{a}(u_0 - s) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2as + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}}.$$

Całkę (2.29) można przedstawić w postaci zbieżnego szeregu nieskończonego, zbudowanego z całek niewłaściwych, ale dających się obliczyć efektywnie. Szereg ten ma postać:

$$(2.30) \quad T = \pi \sqrt{\frac{2}{\omega^2}} \sqrt{\frac{e^a - 1}{a}} \left( D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} D_n \right),$$

gdzie

$$a = 2a(x_2 - x_1), \quad A_n = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\alpha^{i-2}}{(n+i)!} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$D_0 = A_0^{-1/2}, \quad D_1 = \left( -\frac{1}{2} \right) A_0^{-3/2} A_1,$$

$$D_2 = \frac{1}{2!} \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) A_0^{-5/2} A_1^2 + \left( -\frac{1}{2} \right) A_0^{-3/2} 2A_2 \right],$$

.....

Możemy określić zależność pomiędzy  $x_1$  i  $x_2$ . Ponieważ liczby  $u_0$  i  $\bar{u}_0$  są pierwiastkami równania (2.16), możemy napisać

$$(2.31) \quad \frac{1}{a} (u_0 - \bar{u}_0) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2a\bar{u}_0 + \omega^2}{2au_0 + \omega^2} = 0.$$

Z określenia  $u_0$  i  $\bar{u}_0$  wynika, że  $u_0 = -\omega^2 x_1$ ,  $\bar{u}_0 = -\omega^2 x_2$  i na podstawie (2.31) możemy napisać:

$$(2.32) \quad 2ax_1 + \ln(1 - 2ax_1) = 2ax_2 + \ln(1 - 2ax_2).$$

Z powyższego wzoru wynika, że amplituda wychylenia  $x_2$  zależy od  $x_1$  i od  $a$ , zaś nie zależy od  $\omega^2$ , tj. od współczynnika sprężystości. Ponieważ  $a$  i współczynniki  $D_i$  nie zależą od  $\omega$ , więc ze wzoru (2.20) wynika, że okres ruchu jest odwrotnie proporcjonalny do  $\omega$ .

*Przypadek drugi.* Załóżmy, że  $-\omega^2/2a < u_0 < 0$ . Jeżeli liczbę  $u_0$  będziemy pisali w postaci  $\bar{u}_0$ , a odpowiadające wartości  $x$  i  $t$  oznaczymy przez  $x_2$  i  $t_2$ , to wówczas przypadek ten sprowadza się formalnie do przypadku pierwszego. Całka równania (2.1) jest funkcją okresową.

*Przypadek trzeci.* Załóżmy, że  $u_0 < -\omega^2/2a$ . W tym przypadku jest stale

$$(2.33) \quad u = \frac{dp}{dt} < 0,$$

czyli gdy  $t$  rośnie, to  $p$  maleje.

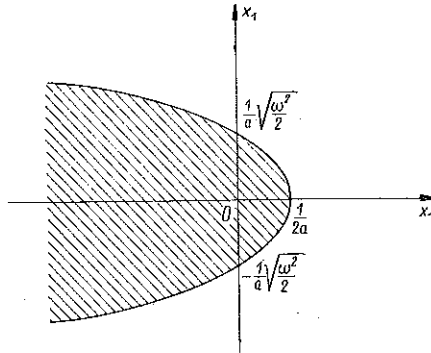
Aby określić całkę równania (2.1) dla  $t > t_1$ , musimy przyjąć  $\varepsilon = -1$  we wzorach (2.22) i (2.24). Wówczas  $p < 0$  i  $u$  maleje, gdy  $t$  rośnie. Zależność  $t$  od  $u$  określa obecnie wzór:

$$(2.34) \quad t - t_1 = \int_{u_0}^u \frac{ds}{(2as + \omega^2) \sqrt{\frac{1}{a} (u_0 - s) + \frac{\omega^2}{2a^2} \ln \frac{2as + \omega^2}{2au_0 + \omega^2}}},$$

zaś zależność  $x$  od  $u$  wzór (2.20).

Ze wzorów (2.20), (2.22), (2.24) i (2.34) wynika, że przy  $t \rightarrow \infty$  mamy  $u \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , czyli rozwiązanie równania (2.1) jest nieograniczone.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że przez każdy punkt półpłaszczyzny  $u > -\omega^2/2a$  przechodzi krzywa całkowa odpowiadająca rozwiązaniu okresowemu, zaś w półpłaszczyźnie  $u \leq -\omega^2/2a$  leżą krzywe odpowiadające rozwiązaniom nieograniczonym i nieoscylacyjnym.



Rys. 6

Obszary rozwiązań okresowych i nieograniczonych przedstawia rys. 6. W obszarze zakreskowanym leżą rozwiązania okresowe.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] S. ZIEMBA, *Free Vibration with Damping of Marked Non-Linear Character*, Arch. Mech. stos., 5, 9 (1957), 525-548.
- [2] S. ZIEMBA, *Free Vibration of Systems of One Degree of Freedom with Non-Linear Elastic Characteristic and Non-Linear Viscous-Type Damping*, Arch. Mech. stos., 2, 10 (1958), 163-193.
- [3] J. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Zastosowanie metody delta do badania silnie nieliniowych mechanicznych układów drgających o skończonej liczbie stopni swobody* [Application of the Delta Method for Investigation of Vibrating Systems of Finite Degree of Freedom and with Strong Non-Linearity], Biul. WAT, 1, 1958.
- [4] W. BOGUSZ, *Determination of Stability Regions of Dynamic Non-Linear System*, Arch. Mech. stos, 6, 11 (1959).
- [5] K. SZPUNAR, *Drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody przy silnie nieliniowym tłumieniu* [Free Vibration of System of One Degree of Freedom with Strong Non-Linear Damping]. Zesz. nauk. AGH (in print).

#### Резюме

СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Проводится исследование нелинейной системы, описанной уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x + ax^2 = 0$$

двумя методами.

Для качественного исследования применяется метод годографа скорости при аналитическом исследовании решений на плоскости  $\dot{x} \ddot{x}$ . Результаты полученные обеими методами совпадают с собой. Оказывается, что рассматриваемое уравнение имеет периодическое решение в соседстве особой точки, тогда как вне этого соседства решение стремится к бесконечности. Получено форму траектории на всей фазовой плоскости, а также в случае периодических решений формулы определяющие период и амплитуды отклонений.

#### Summary

THE NON-LINEAR SYSTEM DESCRIBED BY THE EQUATION  $\ddot{x} + \omega^2 x + a\dot{x}^2 = 0$   
IS INVESTIGATED BY MEANS OF TWO METHODS

For qualitative investigation the method of the velocity hodograph is used. Analytic investigation is done by means of the method of analysis of the solution in the  $\dot{x}\ddot{x}$ -plane. The results obtained by the two methods are in agreement. It is found that the equation under consideration has periodic solutions in the neighbourhood of the singular points and the solutions outside this region being unbounded. The form of the trajectory is determined in the entire phase plane. Equations for the period of the periodic solutions and the displacement amplitudes are obtained.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 marca 1959 r.*

---

ZBYSZKO STOJEK

O ZASTOSOWANIU ZASADY HAMILTONA  
DO WYPROWADZANIA RÓWNAŃ DRGAŃ GIĘTYCH BELKI  
Z UWZGLĘDNIENIEM ŚCINANIA

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLI

TOM VIII . ZESZYT 2 . ROK 1960