

JAN KOSMOWSKI

WYZNACZANIE UKŁADU PRĘTÓW  
W CZTEROWĘZŁOWYM POLU KRATOWNICY  
Z WARUNKU MINIMUM POTENCJAŁU

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXXXIX

TOM VIII • ZESZYT 1 • ROK 1960

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp	5
2. Postawienie i rozwiązanie zagadnienia	7
2.1. Warunek na minimum potencjału	7
2.2. Wzór podstawowy	9
2.3. Zestawienie możliwych przypadków	10
3. Przypadki szczególne	12
3.1. Układ kwadratowy	12
3.2. Układy prostokątne	13
3.3. Układy rombów	13
3.4. Układy równoległoboczne	15
3.5. Przykład liczbowy	17
4. Zastosowania	18
4.1. Wyznaczanie minimalnych kratownic płaskich	18
4.2. Kratownice trójkątne równoramienne o pasach równoległych	19
4.3. Kratownice zbudowane z układów prostokątnych	21
4.4. Kratownice dachowe	22
4.5. Kratownice ukształtowane na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty	24
4.6. Kratownice o węzłach pasa górnego, położonych na łuku	26

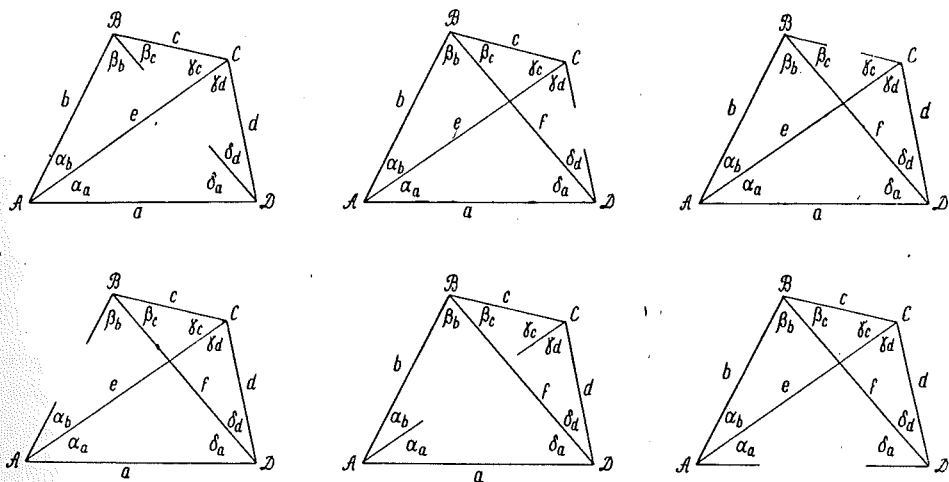
## 1. Wstęp

Przedmiotem rozważań są ustroje kratowe zbudowane z prętów łączących cztery węzły dane na płaszczyźnie. Pręty połączone są w węzłach przegubowo. Rozpatrzmy tu tylko ustroje izostaticzne, a więc takie, które spełniają warunek

$$(1.1) \quad k = 2r - 3,$$

gdzie  $r$  oznacza liczbę węzłów, zaś  $k$  liczbę prętów.

Łącząc cztery węzły dowolnie wybranymi pięcioma prętami otrzymamy sześć różnych układów przedstawionych na rys. 1.



Rys. 1

Celem artykułu jest wskazanie prostych kryteriów pozwalających sprawdzić, który z układów spełnia warunek minimum potencjału sprężystości. Rozpatrzmy tylko ustroje kratowe równej wytrzymałości opierając się na następującym stwierdzeniu, [6]: *Kratownica izostaticzna równej wytrzymałości pod obciążeniem stałym ma mniejszy potencjał od potencjału każdej kratownicy izostaticznej nierównej wytrzymałości o tymże układzie węzłów, tej samej objętości i poddanej temu samemu obciążeniu.*

Każdy z ustrojów przedstawionych na rys. 1 pod działaniem tego samego układu sił zewnętrznych posiada na ogół różny potencjał sprężystości wyrażający się wzorem

$$(1.2) \quad U = \frac{1}{2} e_0 \sum_1^k N_i l_i,$$

gdzie  $e_0$  oznacza odkształcenia jednostkowe,  $N_i$  siłę w pręcie  $i$  oraz  $l_i$  długość pręta  $i$ .

Mając określony układ węzłów oraz układ sił zewnętrznych można obliczyć i porównać potencjał sprężystości każdej z sześciu kratownic. Jeżeli jednak układ węzłów i sił zewnętrznych podany jest w sposób ogólny, to rozwiązanie zagadnienia nastęrcza poważne trudności.

Analogiczne zagadnienie można postawić dla pięciu i więcej węzłów na płaszczyźnie. Liczba możliwych połączeń tych węzłów prowadzących do ustrojów izostatycznych szybko wzrasta i przy pięciu węzłach otrzymujemy już 85 różnych układów prętów.

W celu otrzymania prostych kryteriów określających minimum potencjału sprężystości rozpatrzmy przekształcenia ustrojów pięcioprętowych polegające na wymianie prętów.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

- |  |   |
|--|---|
| $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$                 | węzły kratownicy,   |
| $a, b, c, d, e, f$   | długości prętów,  |
| $V$  | objętość wszystkich prętów kratownicy,  |
| $U$  | potencjał sprężystości kratownicy,  |
| $e_i$  | odkształcenie jednostkowe pręta,  |
| $e_0$  | odkształcenie jednostkowe równej wytrzymałości,   |
| $E$  | współczynnik sprężystości,  |
| $a_e, b_e, c_e, d_e$   | długości rzutów prętów $a, b, c, d$ na przekątne $e$ i $f$ ,  |
| $a_f, b_f, c_f, d_f$   |   |
| $\alpha_a, \alpha_b, \beta_b, \beta_c$                               | kąty zawarte między prętami kratownicy,   |
| $\gamma_c, \gamma_d, \delta_d, \delta_a$                             |   |
| $h_{\mathcal{A}}, h_{\mathcal{B}}, h_{\mathcal{C}}, h_{\mathcal{D}}$ | wysokości trójkątów $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}, \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{A}, \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{B}, \mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{C}$ wystawione z wierzchołków $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ , |
| $S$  | siła skupiona obciążenia zewnętrznego.  |

Przyjmujemy następujące założenia:

- (1) siły zewnętrzne działające na węzły są stałe podczas przekształcania,
- (2) bezwzględne wartości odkształceń jednostkowych wszystkich prętów są jednakowe (odkształcenia równej wytrzymałości).

Założenia te są zgodne z warunkami kształtowania kratownic, [4].

## 2. Postawienie i rozwiązanie zagadnienia

2.1. Warunek na minimum potencjału. Rozpatrywany ustrój izostaticzny przekształcamy na ustrój hiperstatyczny wprowadzając nowy pręt o długości równej odległości między węzłami niepołączonymi w kratownicy nieobciążonej. Kratownicę obciążamy układem sił zewnętrznych, zachowujemy przy tym jednakowe wartości bezwzględne odkształceń jednostkowych pięciu prętów ustroju przekształcanego przez odpowiednią zmianę przekrojów poszczególnych prętów. Z równań równowagi węzłów otrzymamy następującą zależność wiążącą siłę  $N_i$  w dowolnym pręcie  $i$  z siłą  $N_{k+1}$  w nowo wprowadzonym pręcie kratownicy oraz z obciążeniem zewnętrznym:

$$(2.1) \quad N_i = \alpha_i(N_{k+1} + \beta_i S);$$

liczby  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  są współczynnikami zależnymi od układu węzłów i sił zewnętrznych, różnymi dla każdego z pięciu prętów kratownicy. Zgodnie ze wzorem (2.1) w procesie przekształcania siły w prętach przekształcanego ustroju są funkcjami liniowymi siły w nowym pręcie.

Zmieniając wielkość pola przekrojów  $A_i$  prętów kratownicy pierwotnej zachowujemy początkowe wartości odkształceń jednostkowych zgodnie ze wzorem

$$(2.2) \quad e_0 = \frac{N_i}{A_i E_i}.$$

Wielkość pola przekroju  $A_{k+1}$  może być obrana w ten sposób, aby siły we wszystkich pozostałych prętach zachowały swoje pierwotne zwroty.

Siła w nowym pręcie wyrazi się wzorem

$$(2.3) \quad N_{k+1} = e_{k+1} A_{k+1} E_{k+1}.$$

Na ogół przy danej wartości pola  $A_{k+1}$  w żadnym z pozostałych prętów siła nie znika (tzn. dopóki  $N_{k+1}$  nie osiągnie wartości  $\beta_i S$ ). W takich przypadkach mogą być zachowane warunki równej wytrzymałości, przyjęte początkowo, i odkształcenie jednostkowe  $k+1$ -ego pręta będzie miało wciąż wartość równą wzajemnemu przesunięciu jednostkowemu węzłów nie połączonych prętem w kratownicy pierwotnej. W tych warunkach siła  $N_{k+1}$  i siły we wszystkich pozostałych prętach są zależne liniowo od pola przekroju nowego pręta.

Aby zdać sobie sprawę z tego, co się dzieje z potencjałem kratownicy w czasie takiego przekształcenia, wystarczy zwrócić uwagę na to, że kształt kratownicy po odkształceniu jest jednoznacznie określony przez długości  $k$  jej prętów równej wytrzymałości; długości te nie zależą od  $A_{k+1}$ . Przesunięcia punktów przyłożenia obciążenia  $S$  zachowują wartości stałe, a przeto i potencjał sprężystości kratownicy ma wartość stałą. Objętość kratownicy ulega na ogół zmianie.

Gdy pole przekroju nowego pręta osiągnie pewną określoną wartość, wówczas jeden z prętów pierwotnej kratownicy staje się zbędny, gdyż siła w nim działająca spada do zera. Kratownica staje się znowu izostaticzna. Odształcenia jednostkowe  $k$  jej prętów są równe  $|e_i| = e_0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), odształcenie jednostkowe  $k+1$ -ego pręta może mieć wartość dowolną  $|e_{k+1}| \neq e_0$ .

Opisane przekształcenie nazywamy przekształceniem pierwszej fazy. Wobec zależności

$$(2.4) \quad N_i = e_0 EA_i$$

możemy wzór na potencjał sprężystości pierwotnej kratownicy izostaticznej napisać w postaci

$$(2.5) \quad U = \frac{1}{2} e_0^2 E \sum_1^k A_i l_i.$$

Po zakończeniu przekształcenia pierwszej fazy potencjał sprężystości wyrazi się wzorem

$$(2.6) \quad U = \frac{1}{2} e_0^2 E \sum_1^k (A_i - \Delta A_i) l_i + \frac{1}{2} e_{k+1}^2 EA_{k+1} l_{k+1}.$$

Ponieważ w trakcie przekształcania potencjał nie uległ zmianie, przeto z przyrównania prawych stron równań (2.5) i (2.6) otrzymamy

$$(2.7) \quad \sum \Delta A_i l_i = \frac{e_{k+1}^2}{e_0^2} A_{k+1} l_{k+1}.$$

Druga faza przekształcania polega na doprowadzeniu kratownicy do układu równej wytrzymałości. Skoro bowiem przekształcenie pierwszej fazy doprowadziło do kratownicy izostaticznej, to możemy tak zmienić pole przekroju nowego pręta, aby był on tej samej wytrzymałości co pozostałe pręty, tj. aby  $|e_{k+1}| = e_0$ .

Po zakończeniu drugiej fazy przekształcenia otrzymujemy kratownicę, która jest równej wytrzymałości (tak samo jak pierwsza), ale ma inny układ prętów. W drugiej fazie przekształcenia zarówno potencjał sprężystości jak i objętość ulegają na ogół zmianie, przy czym potencjał wynosi

$$(2.8) \quad U + \Delta U = \frac{1}{2} e_0^2 E \sum (A_i - \Delta A_i) l_i + \frac{1}{2} e_0^2 E (A_{k+1} + \Delta A_{k+1}) l_{k+1}.$$

Przyrost potencjału sprężystości w drugiej fazie przekształcenia wyraża się wzorem

$$(2.9) \quad \Delta U = \frac{1}{2} (e_0^2 - e_{k+1}^2) EA_{k+1} l_{k+1} + \frac{1}{2} e_0^2 E \Delta A_{k+1} l_{k+1}.$$

Siła w pręcie  $k+1$  nie ulega zmianie, jest przeto

$$(2.10) \quad A_{k+1} |e_{k+1}| = A_{k+1} |e_0| + \Delta A_{k+1} |e_0|.$$

Z zależności (2.10) wyznaczamy  $\Delta A_{k+1}$  i po podstawieniu do wzoru (2.9) otrzymujemy

$$(2.11) \quad \Delta U = \frac{1}{2} EA_{k+1} l_{k+1} |e_{k+1}| (|e_0| - |e_{k+1}|).$$

Przyrost potencjału jest proporcjonalny do przyrostu objętości prętów kratownicy:

$$(2.12) \quad \Delta U = e_0^3 E \Delta V.$$

Na podstawie wzoru (2.11) dochodzimy do wniosku (por. również [6]), że jeżeli w kratownicy równej wytrzymałości pod działaniem danego obciążenia wzajemne przesunięcie jednostkowe jednej z par węzłów nie połączonych prętem ma wartość bezwzględną większą od bezwzględnej wartości odkształcenia równej wytrzymałości, to można zbudować kratownicę równej wytrzymałości o tymże układzie węzłów, lecz o innym układzie prętów, posiadającą mniejszą objętość i mniejszy potencjał.

Jeżeli wzajemne przesunięcie jednostkowe węzłów nie połączonych prętem ma wartość bezwzględną równą bezwzględnej wartości równej wytrzymałości,

$$|e_{k+1}| = |e_0|,$$

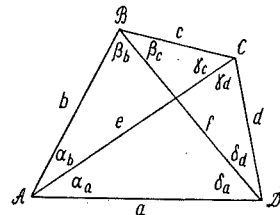
to przekształcenie nie zmienia ani potencjału, ani objętości kratownicy.

Jeżeli  $|e_{k+1}| < |e_0|$ , to przekształcenie jest niecelowe, bowiem zwiększa potencjał sprężystości i objętość kratownicy.

Kryteria powyższe są również słuszne dla kratownic o ilości węzłów większej od czterech.

**2.2. Wzór podstawowy.** Wzajemne przesunięcie jednostkowe węzłów nie połączonych prętem może być określone ze wzoru LEVY'EGO, wskazującego zależności między odkształceniami prętów. Po wprowadzeniu przyjętych oznaczeń zależność LEVY'EGO ma postać:

$$(2.13) \quad \frac{\Delta e - \Delta b_e - \Delta c_e}{h_{Q\beta}} + \frac{\Delta e - \Delta d_e - \Delta a_e}{h_{Q\mathcal{D}}} + \\ + \frac{\Delta f - \Delta a_f - \Delta b_f}{h_{\mathcal{A}}} + \frac{\Delta f - \Delta c_f - \Delta d_f}{h_{\mathcal{E}}} = 0.$$



Rys. 2

Rozpatrując dany układ węzłów i prętów (rys. 2) oraz zakładając, że odkształcenia prętów są dostatecznie małe w stosunku do długości prętów, możemy wypisać następujące zależności geometryczne:

$$h_{\mathcal{A}} = a \sin \delta_a = b \sin \beta_b, \quad h_{Q\beta} = b \sin \alpha_b = c \sin \gamma_c, \\ h_{\mathcal{E}} = c \sin \beta_c = d \sin \delta_d, \quad h_{Q\mathcal{D}} = d \sin \gamma_d = a \sin \alpha_a,$$

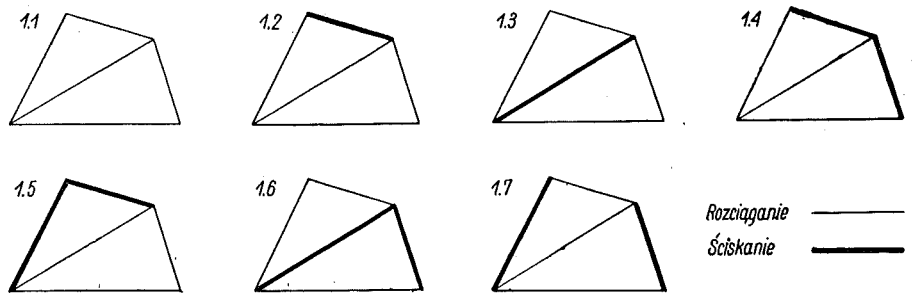
$$\begin{aligned} \Delta e &= e_e e = e_a(b \cos \alpha_b + c \cos \gamma_c) = e_e(a \cos \alpha_a + d \cos \gamma_d), \\ \Delta f &= e_f f = e_f(a \cos \delta_a + b \cos \beta_b) = e_f(c \cos \beta_c + d \cos \delta_d), \\ \Delta a_e &= e_a a_e = e_a a \cos \alpha_a, & \Delta a_f &= e_a a_f = e_a a \cos \delta_a, \\ \Delta b_e &= e_b b_e = e_b b \cos \alpha_b, & \Delta b_f &= e_b b_f = e_b b \cos \beta_b, \\ \Delta c_e &= e_c c_e = e_c c \cos \gamma_c, & \Delta c_f &= e_c c_f = e_c c \cos \beta_c, \\ \Delta d_e &= e_d d_e = e_d d \cos \gamma_d, & \Delta d_f &= e_d d_f = e_d d \cos \delta_d. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu powyższych zależności wzór (2.13) przyjmuje postać:

$$(2.14) \quad e_a(\operatorname{ctg} \alpha_a + \operatorname{ctg} \delta_a) + e_b(\operatorname{ctg} \alpha_b + \operatorname{ctg} \beta_b) + e_c(\operatorname{ctg} \beta_c + \operatorname{ctg} \gamma_c) + \\ + e_d(\operatorname{ctg} \gamma_d + \operatorname{ctg} \delta_d) - e_e(\operatorname{ctg} \alpha_a + \operatorname{ctg} \alpha_b + \operatorname{ctg} \gamma_c + \operatorname{ctg} \gamma_d) - \\ - e_f(\operatorname{ctg} \beta_b + \operatorname{ctg} \beta_c + \operatorname{ctg} \delta_d + \operatorname{ctg} \delta_a) = 0.$$

Ze wzoru tego można wyznaczyć odkształcenia dowolnego pręta za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów kratownicy oraz odkształceń jednostkowych pozostałych prętów. Odkształcenia szóstego pręta nie zależą więc od zmiany układu sił zewnętrznych, dopóki ta zmiana nie doprowadzi do zmiany znaku odkształcenia któregoś z pięciu prętów kratownicy.

2.3. Zestawienie możliwych przypadków. Wszystkie ustroje zbudowane na czterech niezmiennych węzłach można podzielić na dwie zasadnicze grupy. Do pierwszej grupy zaliczamy ustroje, w których cztery węzły są połączone wzdłuż boków czworoboku wypukłego, a brak w nich jednego pręta przekątnego. Do drugiej grupy zaliczamy ustroje, w których węzły połączone są tak, że brak jednego z prętów na obwodzie.



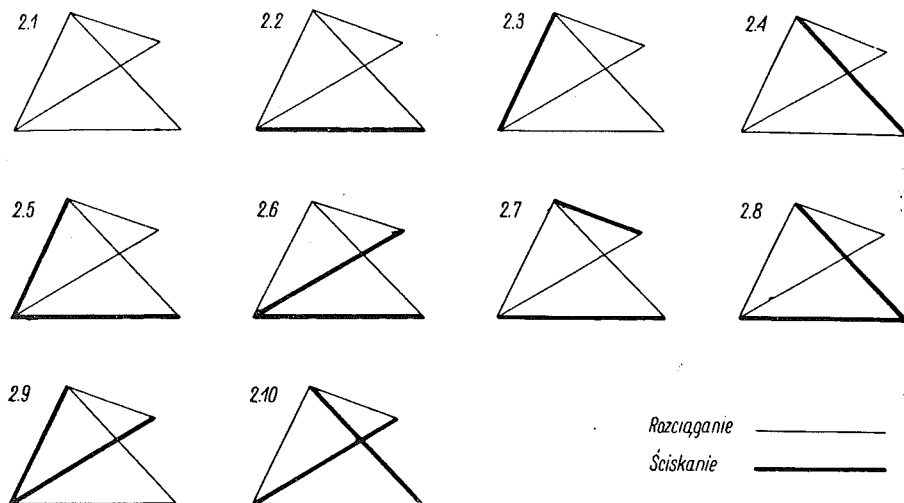
Rys. 3

W grupie pierwszej mamy siedem możliwych układów znaków sił w prętach jak to pokazano na rys. 3. W grupie drugiej mamy dziesięć możliwych układów sił w prętach, jak to pokazano na rys. 4.

Ponieważ jak wynika ze wzoru (2.11) interesuje nas bezwzględna wartość stosunku  $e_{k+1}/e_0$ , każdy z przypadków rozpatrywać musimy oddzielnie.



Na podstawie wyprowadzonego wzoru (2.14) we wszystkich siedemnastu układach można określić wartość stosunku  $e_{k+1}/|e_0|$  w zależności od kątów  $\alpha_a, \alpha_b, \beta_b, \beta_c, \gamma_c, \gamma_d, \delta_a, \delta_b$ . Układy o znakach sił w prętach przeciwnych niż



Rys. 4

na rys. 3 i 4 na podstawie wzoru (2.14) mają te same wartości stosunku  $e_{k+1}/|e_0|$ , toteż nie będziemy ich oddzielnie rozpatrywali. W ten sposób otrzymamy wzory zestawione w tabl. 1 i 2.

Tablica 1

Oznaczenie ustroju	Układ znaków sił w prętach					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $
	a	b	c	d	e	
1.1	-	-	-	-	-	$\frac{\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_d}{\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_d} = 1$
1.2	-	-	+	-	-	$1-2 \frac{\text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d}$
1.3	-	-	-	-	+	$1+2 \frac{\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_d}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d}$
1.4	-	-	+	+	-	$1-2 \frac{\text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_d + \text{ctg } \delta_d}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d}$
1.5	-	+	+	-	-	$1-2 \frac{\text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d}$
1.6	-	-	-	+	+	$1+2 \frac{\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c - \text{ctg } \delta_d}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d}$
1.7	-	+	-	+	-	$1-2 \frac{\text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \gamma_d + \text{ctg } \delta_d}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d}$

Tablica 2

Oznaczenie ustroju	Układ znaków sił w prętach					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $
	a	b	c	e	f	
2.1	-	-	-	-	-	$(\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_a) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_a) = 1$
2.2	+	-	-	-	-	$1+2 (\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \delta_a) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_a)$
2.3	-	+	-	-	-	$1+2 (\text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \beta_b) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_a)$
2.4	-	-	-	-	+	$1-2 (\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$
2.5	+	+	-	-	-	$1+2 (\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \delta_a) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$
2.6	+	-	-	+	-	$1-2 (\text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_a - \text{ctg } \delta_d) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$
2.7	+	-	+	-	-	$1+2 (\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \delta_a) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$
2.8	+	-	-	-	+	$1-2 (\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a - \text{ctg } \alpha_a) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$
2.9	-	+	-	+	-	$1-2 (\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_a - \text{ctg } \beta_b) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$
2.10	-	-	-	+	+	$1-2 (\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d) : (\text{ctg } \gamma_a + \text{ctg } \delta_d)$

Mając dane cztery węzły na płaszczyźnie oraz układ sił zewnętrznych możemy na podstawie tablicy pierwszej i drugiej określić we wszystkich sześciu możliwych ustrojach izostatycznych, zbudowanych na tych węzłach, wartość stosunku  $|e_{k+1}/e_0|$ . Ustrój, w którym ten stosunek będzie mniejszy od 1, jest ustrojem o najmniejszym potencjale sprężystości przy danym obciążeniu.

### 3. Przypadki szczególne

3.1. Układ kwadratowy. Opierając się na wzorach zestawionych w tabl. 1 i 2 oraz uwzględniając, że  $\alpha_a = \alpha_b = \beta_b = \beta_c = \gamma_c = \gamma_a = \delta_a = \delta_d = \pi/4$  otrzymamy wartości stosunku  $e_{k+1} / |e_0|$  zestawione w tabl. 3.

Tablica 3

Ustrój	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $	Ustrój	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $
	a	b	c	d	e			a	b	c	e	f	
1.1	-	-	-	-	-	1	2.1	-	-	-	-	-	1
1.2	-	-	+	-	-	0	2.2	+	-	-	-	-	3
1.3	-	-	-	-	+	3	2.3	-	+	-	-	-	3
1.4	-	-	+	+	-	-1	2.4	-	-	-	-	+	-3
1.5	-	+	+	-	-	-1	2.5	+	+	-	-	-	5
1.6	-	-	-	+	+	2	2.6	+	-	-	+	-	-1
1.7	-	+	-	+	-	-1	2.7	+	-	+	-	-	5
							2.8	+	-	-	-	+	-1
							2.9	-	+	-	+	-	-1
							2.10	-	-	-	+	+	-7

Na podstawie wyników zestawionych w tabl. 3 widzimy, że ustroje o znakach sił w prętach oznaczonych symbolami 1.3, 1.6, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.10 nie są ustrojami o najmniejszym potencjale sprężystości, gdyż  $|e_{k+1}/e_0| > 1$ ; przekształcenie ich przez wymianę prętów jest celowe.

Przekształcenie ustrojów o symbolach 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.7, 2.1, 2.6, 2.8, 2.9 nie jest celowe, gdyż nie zmienia potencjału sprężystości.

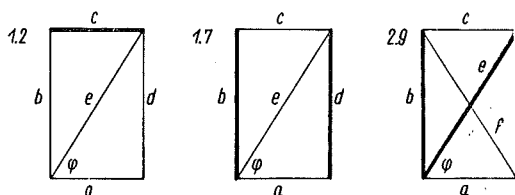
**3.2. Układy prostokątne.** Opierając się na wzorach zestawionych w tablicach 1 i 2 oraz uwzględniając, że  $\alpha_a = \beta_c = \gamma_c = \delta_a = \varphi$ ,  $\alpha_b = \beta_b = \gamma_a = \delta_a = (\pi/2) - \varphi$  otrzymamy wartości stosunku  $e_{k+1} : |e_0|$  zestawione w tablicy 4.

Tablica 4

Oznaczenie ustroju	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $	Oznaczenie ustroju	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $
	a	b	c	d	e			a	b	c	e	f	
1.1	-	-	-	-	-	1	2.1	-	-	-	-	-	1
1.2	-	-	+	-	-	$1 - 2 \cos^2 \varphi$	2.2	+	-	-	-	-	$1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$
1.3	-	-	-	-	+	3	2.3	-	+	-	-	-	3
1.4	-	-	+	+	-	-1	2.4	-	-	-	-	+	$-1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$
1.5	-	+	+	-	-	-1	2.5	+	+	-	-	-	$3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$
1.6	-	-	-	+	+	$1 + 2 \cos^2 \varphi$	2.6	+	-	-	+	-	-1
1.7	-	+	-	+	-	$1 - 4 \sin^2 \varphi$	2.7	+	-	+	+	-	$1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi$
							2.8	+	-	-	-	+	-1
							2.9	-	+	-	+	-	$1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$
							2.10	-	-	-	+	+	$-3 - 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi$

Na podstawie wyników zestawionych w tabl. 4 widzimy, że ustroje o znakach sił w prętach oznaczonych symbolami 1.3, 1.6, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.10 nie są ustrojami o najmniejszym potencjale sprężystości i przekształcenie ich przez wymianę prętów jest celowe.

Przekształcenie ustrojów o symbolach 1.1, 1.4, 1.5, 2.1, 2.6, 2.8 nie jest celowe, gdyż nie zmienia potencjału sprężystości.



Rys. 5

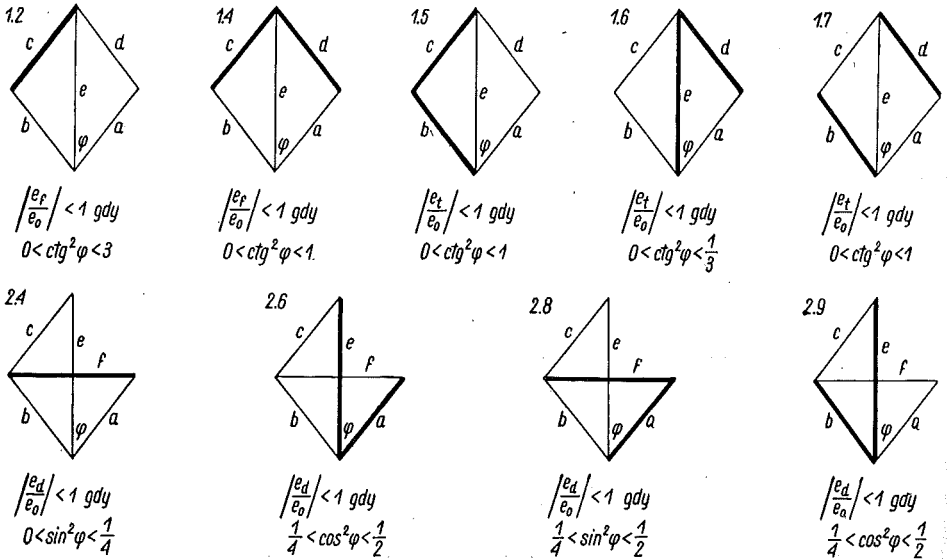
Ustrój o symbolu 1.2 (rys. 5) jest ustrojem o najmniejszym potencjale sprężystości, gdyż przy każdym  $\varphi$  wartość stosunku  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ . Ustrój o symbolu 1.7 (rys. 5) może być ustrojem minimalnym przy  $0 < \varphi < \pi/4$ . Ustrój o symbolu 2.9 (rys. 5) może być ustrojem minimalnym przy  $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ .

**3.3. Układy rombów.** Uwzględniając, że  $\alpha_a = \alpha_b = \gamma_c = \gamma_d = \varphi$  oraz  $\beta_b = \beta_c = \delta_a = \delta_d = (\pi/2) - \varphi$ , otrzymamy wartości stosunku  $e_{k+1}/|e_0|$  zestawione w tablicy 5.

Tablica 5

Oznaczenie ustroju	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $	Oznaczenie ustroju	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $
	a	b	c	d	e			a	b	c	e	f	
1.1	-	-	-	-	-	1	2.1	-	-	-	-	-	1
1.2	-	-	+	-	-	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi$	2.2	+	-	-	-	-	3
1.3	-	-	+	-	+	$1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$	2.3	-	+	-	-	-	3
1.4	-	-	+	+	-	$-\operatorname{ctg}^2 \varphi$	2.4	-	-	-	-	+	$1 - 8 \sin^2 \varphi$
1.5	-	+	+	-	-	$-\operatorname{ctg}^2 \varphi$	2.5	+	+	-	-	-	5
1.6	-	-	-	+	+	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi$	2.6	+	-	-	+	-	$3 - 8 \cos^2 \varphi$
1.7	-	+	-	+	-	$-\operatorname{ctg}^2 \varphi$	2.7	+	-	+	-	-	5
							2.8	+	-	-	-	+	$3 - 8 \sin^2 \varphi$
							2.9	-	+	-	+	-	$3 - 8 \cos^2 \varphi$
							2.10	-	-	-	+	+	-7

Na podstawie wyników zestawionych w tabl. 5 widzimy, że ustroje o znakach sił w prętach oznaczonych symbolami 1.3, 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.10 nie są ustrojami o najmniejszym potencjale sprężystości, gdyż  $|e_{k+1}/e_0| > 1$ .



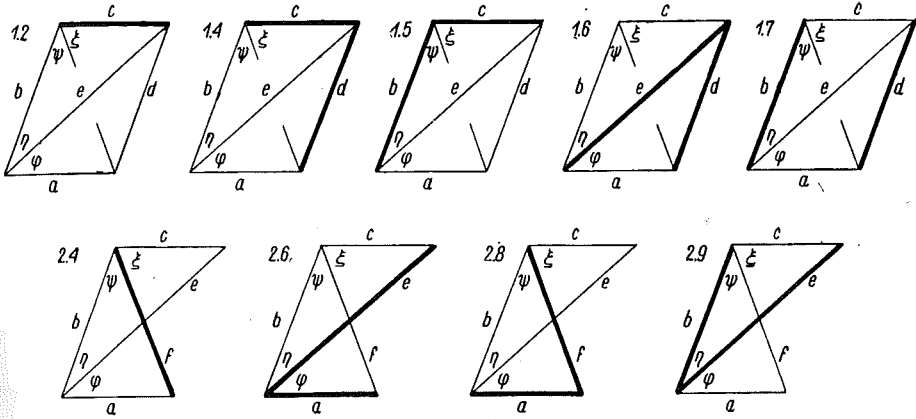
Rys. 6

Przekształcenie ustrojów o symbolach 1.1, 2.1 nie jest celowe, gdyż nie zmienia potencjału sprężystości.

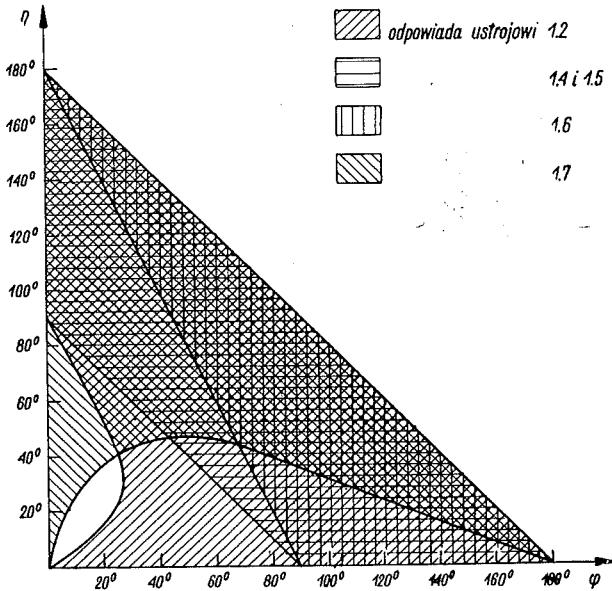
Przekształcenie ustrojów o symbolach 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 2.4, 2.6, 2.8, 2.9 nie jest celowe w przypadkach, w których kąt  $\varphi$  spełnia warunki podane na rys. 6, tj. gdy  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ .

3.4. Układy równoległoboczne. Opierając się na wzorach zestawionych w tabl. 1 i 2 oraz uwzględniając, że  $\alpha_a = \gamma_c = \varphi$ ,  $\beta_c = \delta_a = \xi$ ,  $\beta_b = \delta_d = \psi$ ,  $\alpha_b = \gamma_d = \eta$  i  $\text{ctg } \xi = \text{ctg } \varphi - 2 \text{ctg } (\varphi + \eta)$ ,  $\text{ctg } \psi = \text{ctg } \eta - 2 \text{ctg } (\eta + \varphi)$  otrzymamy wartości stosunku  $e_{k+1}:|e_0|$  zestawione w tablicach 6 i 7. W tablicy 6 zestawiono przypadki, w których brak jednej z przekątnych.

W tablicy 7 zestawiono przypadki pól równoległobocznych, w których brak jednego z prętów na obwodzie.



Rys. 7



Rys. 8

Na rysunku 7 przedstawiono układy o układach znaków sił w prętach, przy których warunek  $|e_{k+1}/e_0| < 1$  może być spełniony w pewnych obszarach wartości kątów  $\varphi$  i  $\eta$ .

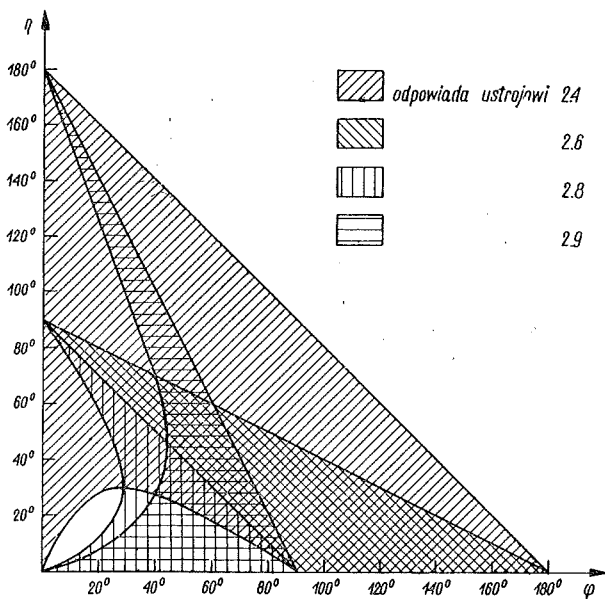
Tablica 6

Ozna- czenie ustroju	Układ znaków sił					Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $	$\left  \frac{e_{k+1}}{e_0} \right  < 1$ , gdy
	a	b	c	d	e		
1.1	-	-	-	-	-	1	
1.2	-	-	+	-	-	$1 - 2 \frac{1 + \text{ctg}^2 \varphi}{(\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2 + 4}$	$3 - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta + \text{ctg}^2 \eta > 0$
1.3	-	-	-	-	+	$1 + 2 \frac{(\text{ctg} \varphi + \text{ctg} \eta)^2}{(\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2 + 4}$	
1.4	-	-	+	+	-	$-\frac{(\text{ctg} \varphi + \text{ctg} \eta)^2}{(\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2 + 4}$	$\text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta < 1$
1.5	-	+	+	-	-	$-\frac{(\text{ctg} \varphi + \text{ctg} \eta)^2}{(\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2 + 4}$	$\text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta < 1$
1.6	-	-	-	+	+	$\frac{(\text{ctg} \varphi + \text{ctg} \eta)^2 + 2(1 + \text{ctg}^2 \varphi)}{(\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2 + 4}$	$1 - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta - \text{ctg}^2 \varphi > 0$
1.7	-	+	-	+	-	$1 - 4 \frac{1 + \text{ctg}^2 \varphi}{(\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2 + 4}$	$2 + \text{ctg}^2 \varphi - \text{ctg}^2 \eta - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta > 0$

Tablica 7

Ozna- czenie ustroju	Układ znaków sił						Stosunek $e_{k+1} :  e_0 $	$\left  \frac{e_{k+1}}{e_0} \right  < 1$ , gdy
	a	b	c	e	f			
2.1	-	-	-	-	-	-	1	
2.2	+	-	-	-	-	-	$1 + 2 \frac{1 + \text{ctg}^2 \varphi}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	
2.3	-	+	-	-	-	-	3	
2.4	-	-	-	-	-	+	$1 - 2 \frac{4 + (\text{ctg} \varphi - \text{ctg} \eta)^2}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	$0 < 3 - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta + \text{ctg}^2 \varphi$
2.5	+	+	-	-	-	-	$3 + 2 \frac{1 + \text{ctg}^2 \varphi}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	
2.6	+	-	-	+	-	-	$-1 + 4 \frac{1 - \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	$-1 - \text{ctg}^2 \eta < 1 - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta - \text{ctg}^2 \eta < 0$
2.7	+	-	+	-	-	-	$1 + 4 \frac{1 + \text{ctg}^2 \varphi}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	
2.8	+	-	-	-	+	-	$-1 - 4 \frac{1 - \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	$0 < 3 - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta + \text{ctg}^2 \eta < 1 + \text{ctg}^2 \eta$
2.9	-	+	-	+	-	-	$1 + 2 \frac{1 - 2 \text{ctg} \varphi \text{ctg} \eta - \text{ctg}^2 \varphi}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	$1 + \text{ctg}^2 \eta < (\text{ctg} \varphi + \text{ctg} \eta)^2 < 2(1 + \text{ctg}^2 \eta)$
2.10	-	-	-	+	+	-	$-3 - 4 \frac{1 + \text{ctg}^2 \varphi}{1 + \text{ctg}^2 \eta}$	

Rysunek 8 przedstawia obszary występowania kątów  $\varphi$  i  $\eta$ , przy których  $|e_{k+1}/e_0| < 1$  w pięciu ustrojach: 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 o węzłach połączonych wzdłuż wieloboku wypukłego.



Rys. 9

Rysunek 9 przedstawia obszary występowania kątów  $\varphi$  i  $\eta$ , przy których  $|e_{k+1}/e_0| < 1$  w czterech ustrojach: 2.4, 2.6, 2.8, 2.9, w których brak jednego z prętów na obwodzie.

**3.5. Przykład liczbowy.** Mając dane cztery węzły na płaszczyźnie oraz układ sił zewnętrznych, jak pokazano na rys. 10, należy określić, która z sześciu kratownic izostatycznych możliwych do zbudowania na tych węzłach ma najmniejszy potencjał sprężystości.

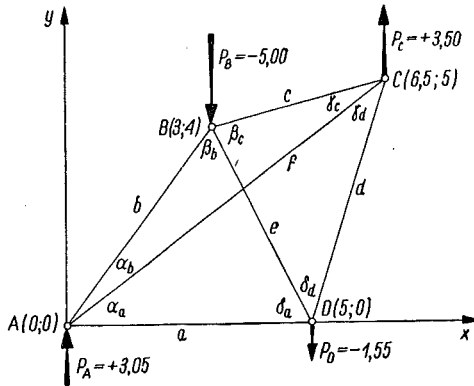
Łącząc cztery węzły dowolnie wybranymi pięcioma prętami otrzymamy sześć różnych układów izostatycznych przedstawionych na rys. 11.

Ustroje te na podstawie znaków sił w prętach przyporządkujemy schematom zestawionym w tabl. 1 i 2.

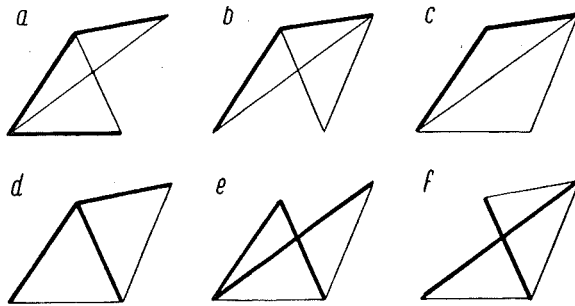
- Ustrój *a* odpowiada schematowi 2.10 z przeciwnymi znakami sił,
- ustrój *b* odpowiada schematowi 2.5,
- ustrój *c* odpowiada schematowi 1.5,
- ustrój *d* odpowiada schematowi 1.4 z przeciwnymi znakami sił,
- ustrój *e* odpowiada schematowi 2.5 z przeciwnymi znakami sił,
- ustrój *f* odpowiada schematowi 2.10.

We wszystkich sześciu ustrojach wyznaczmy stosunek między wzajemnym przesunięciem jednostkowym węzłów nie połączonych prętem a odkształceniem jednostkowym równej wytrzymałości; otrzymamy:

- w ustroju *a* wartość stosunku = 8,914,
- w ustroju *b* wartość stosunku = 8,554,
- w ustroju *c* wartość stosunku = -5,046,
- w ustroju *d* wartość stosunku = -0,034,
- w ustroju *e* wartość stosunku = -4,138,
- w ustroju *f* wartość stosunku = -4,404.



Rys. 10



Rys. 11

Z sześciu ustrojów tylko ustrój oznaczony symbolem *d* charakteryzuje się wartością  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ ; to jest więc ustrój, którego potencjał sprężystości i objętość są najmniejsze.

#### 4. Zastosowania

4.1. Wyznaczanie minimalnych kratownic płaskich. Kryteria na minimum potencjału sprężystości, dotyczące ustroju czterowęzłowego, mogą posłużyć do określenia minimum potencjału niektórych kratownic płaskich, które można ozłóżyć na układy czterowęzłowe.



Każda kratownica płaska równych odkształceń jednostkowych, składająca się z elementów czterowęzłowych, jest kratownicą minimalną, jeśli każdy jej element czterowęzłowy spełnia warunek minimum potencjału  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ .

Kratownicę złożoną możemy rozłożyć na elementarne układy czterowęzłowe, zastępując pręty wspólne dla dwóch elementów o polu przekroju  $A$  przez dwa pręty o polach  $A_1$  i  $A_2$ , przy czym  $A = A_1 + A_2$ .

Oba te pręty są powiązane wspólnymi węzłami  $n$  i  $n-1$ ; występują w nich tylko siły normalne, odkształcenia jednostkowe obu prętów są jednakowe, a siły działające w nich są tego samego znaku.

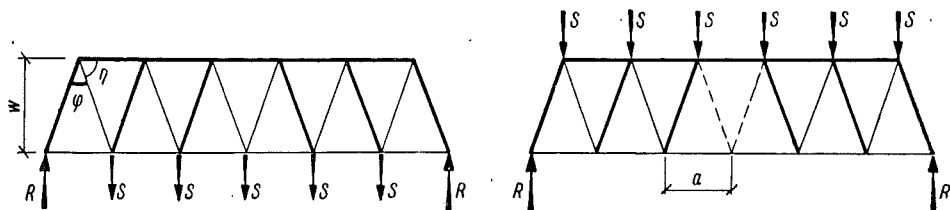
Oznaczmy siłę w pręcie o polu przekroju  $A$  przez  $N$ ; wobec jednakowych odkształceń jednostkowych mamy  $N_1/A_1 = N_2/A_2 = N/A$ . Suma potencjałów dwóch części pręta wyniesie

$$(4.1) \quad |N_1| l |e_0| + |N_2| l |e_0| = |N| l |e_0| \left( \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} \right) = |N| l |e_0|.$$

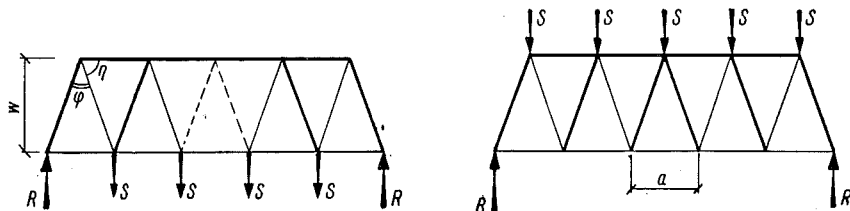
Jest ona równa potencjałowi tegoż pręta w założeniu, że stanowi on jedną całość.

Przekształconą w ten sposób kratownicę możemy rozłożyć na elementy czterowęzłowe. Suma potencjału tych elementów jest równa potencjałowi całkowitemu rozważanej kratownicy. Dlatego też suma potencjałów minimalnych ustrojów czterowęzłowych równa jest potencjałowi minimalnemu kratownicy całkowitej.

**4.2. Kratownice trójkątne równoramienne o pasach równoległych.** Rozpatrzmy kratownice trójkątne równoramienne o obciążeniu  $S$  przyłożonym w węzłach



Rys. 12



Rys. 13

pasa górnego lub w węzłach pasa dolnego. Układy znaków sił w prętach kratownic o parzystej ilości przedziałów pasa dolnego przedstawiono na rys. 12.

Układy znaków sił w prętach kratownic o nieparzystej ilości przedziałów pasa dolnego pokazano na rys. 13.

Z kratownic tych wyodrębnimy elementarne układy składające się z czterech węzłów i pięciu prętów o różnych układach znaków sił w prętach. Oznaczmy je jak uprzednio.

Układy oznaczone symbolem 1.4 mogą mieć potencjał sprężystości najmniej-  
szy, o ile zostanie spełniony warunek  $\text{ctg } \varphi \text{ ctg } \eta < 1$ . Analogicznie układ 1.6  
może spełniać warunek na minimum potencjału, o ile mamy  $1 - 2 \text{ ctg } \varphi \text{ ctg } \eta -$   
 $- \text{ctg}^2 \varphi > 0$ .

Wprowadzając do powyższych zależności podstawienie

$$\text{ctg } \varphi = (1 - \text{ctg}^2 \eta) 2 \text{ ctg } \eta$$

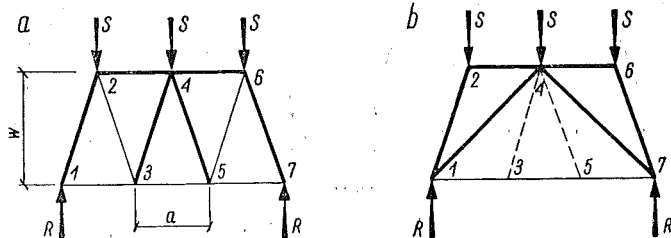
otrzymamy odpowiednio dla 1.4 i 1.6

$$1 - \text{ctg}^2 \eta < 2, \quad 1 - 2 \text{ ctg}^2 \eta - 3 \text{ ctg}^4 \eta < 0.$$

Nierówność pierwsza jest spełniona przy wszystkich wartościach  $\eta$ . Nie-  
równość druga jest spełniona, gdy  $|\text{ctg } \eta| > 1/\sqrt{3}$ . Warunkowi temu odpo-  
wiada  $w/a < \sqrt{3}/2$ .

Tak więc rozpatrywane kratownice trójkątne równoramienne jako zbudowa-  
wane z elementarnych układów o znakach sił w prętach oznaczonych symbo-  
lami 1.4 i 1.6 są kratownicami o najmniejszym potencjale sprężystości, o ile jest  
spełniony warunek  $w/a < \sqrt{3}/2$ .

W przypadku gdy wartość stosunku  $w/a > \sqrt{3}/2$ , należy poszukać innego  
układu prętów pozwalającego wyodrębnić układy elementarne, spełniające  
warunki minimum potencjału sprężystości.



Rys. 14

Rozpatrzmy np. ustrój pokazany na rys. 14a; po usunięciu prętów 2-3 i 5-6  
oraz wprowadzeniu prętów 1-4 i 4-7 otrzymamy ustrój pokazany na rys. 14b,  
z którego możemy wyodrębnić następujące układy elementarne:

Układ oznaczony symbolem 0 niezależnie od układu znaków sił w prętach  
posiada wartość stosunku  $|e_{k+1}/e_0| = 1$ .

Układ równoległoboczny oznaczony symbolem 1.2 może być układem  
o najmniejszym potencjale, o ile zostanie spełniony warunek

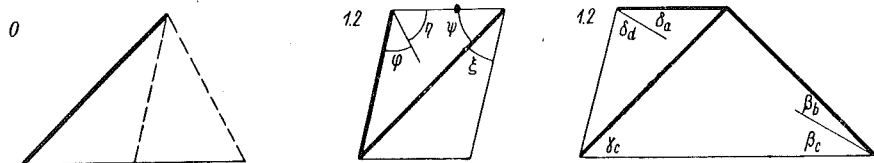
$$3 - 2 \text{ ctg } \psi \text{ ctg } \xi + \text{ctg}^2 \xi > 0.$$

Podstawiając

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{3a}{2w}, \quad \operatorname{ctg} \xi = \frac{4w^2 + 3a^2}{4aw},$$

otrzymamy

$$16 \left( \frac{w}{a} \right)^4 + 24 \left( \frac{w}{a} \right)^2 - 27 > 0.$$



Rys. 15

Nierówność ta jest spełniona, gdy  $w/a > \sqrt{3}/2$ . Układ trapezowy oznaczony symbolem 1.2 może być układem o najmniejszym potencjale  $m$ , o ile zostanie spełniona nierówność

$$\left| 1 - 2 \frac{\operatorname{ctg} \beta_c + \operatorname{ctg} \gamma_c}{\operatorname{ctg} \beta_b + \operatorname{ctg} \beta_c + \operatorname{ctg} \delta_a + \operatorname{ctg} \delta_c} \right| < 1.$$

Podstawiając

$$\operatorname{ctg} \beta_c = \frac{5a}{2w}, \quad \operatorname{ctg} \gamma_c = \frac{3a}{2w}, \quad \operatorname{ctg} \delta_a = \frac{5a}{2w}, \quad \operatorname{ctg} \beta_b = \frac{4w^2 + 15a^2}{4aw},$$

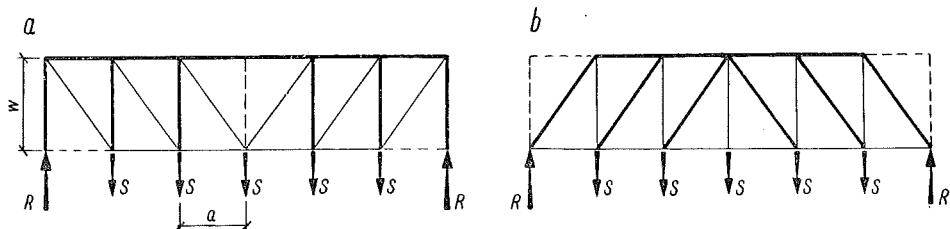
$$\operatorname{ctg} \delta_c = \frac{4w^2 - 5a^2}{12aw},$$

otrzymamy

$$\left| \left[ 4 + 16 \left( \frac{w}{a} \right)^2 \right] : \left[ 100 + 16 \left( \frac{w}{a} \right)^2 \right] \right| < 1.$$

Nierówność ta jest spełniona przy wszystkich wartościach  $w/a$ .

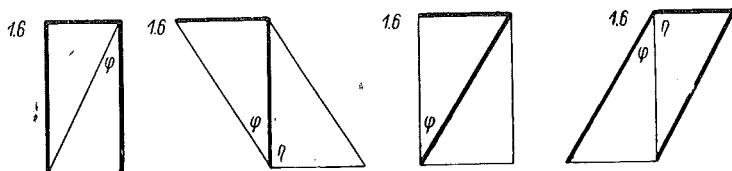
4.3. **Kratownice zbudowane z układów prostokątnych.** Rozpatrzmy kratownice o układach prostokątnych, obciążone siłami  $S$  w węzłach pasa dolnego lub górnego. Układ znaków sił w prętach pokazano na rys. 16.



Rys. 16

Układ znaków sił w prętach kratownicy obciążonej w węzłach pasa górnego jest analogiczny do układu przedstawionego na rys. 16a z wyjątkiem słupka środkowego, który jest ściskany, w kratownicy zaś pokazanej na rys. 16b siła

w słupku środkowym równa się zero. Z kratownic tych wyodrębnimy elementarne układy składające się z czterech węzłów i pięciu prętów o różnych układach znaków sił w prętach (rys. 17) i oznaczymy je zgodnie z oznaczeniami przyjętymi uprzednio.



Rys. 17

Układ prostokątny oznaczony symbolem 1.6 nie posiada najmniejszego potencjału, gdyż przy żadnych wartościach  $\varphi$  nie jest spełniona nierówność  $|1+2\cos^2\varphi| < 1$ .

Układ równoległoboczny oznaczony symbolem 1.6 spełnia warunek minimum potencjału, o ile

$$1 - 2 \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{ctg} \eta - \operatorname{ctg}^2 \varphi > 0.$$

Podstawiając

$$\operatorname{ctg} \eta = 0, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{w}{a},$$

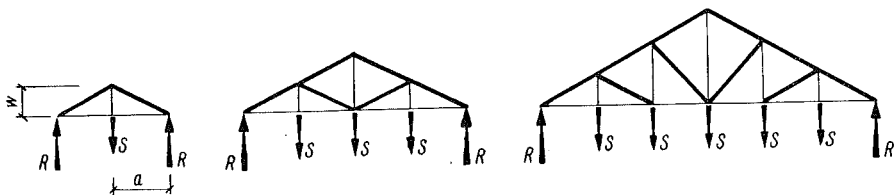
otrzymamy

$$1 - \left(\frac{w}{a}\right)^2 > 0.$$

Nierówność ta jest spełniona, gdy  $-1 < w/a < 1$ .

Rozpatrywana kratownica, obciążona siłami pionowymi w węzłach pasa dolnego lub górnego, nie jest kratownicą o najmniejszym potencjale sprężystości.

**4.4. Kratownice dachowe.** Rozpatrzmy niektóre kratownice dachowe o obciążeniu przyłożonym w węzłach pasa dolnego. Układy znaków sił w prętach takich kratownic przedstawiono na rys. 18.



Rys. 18

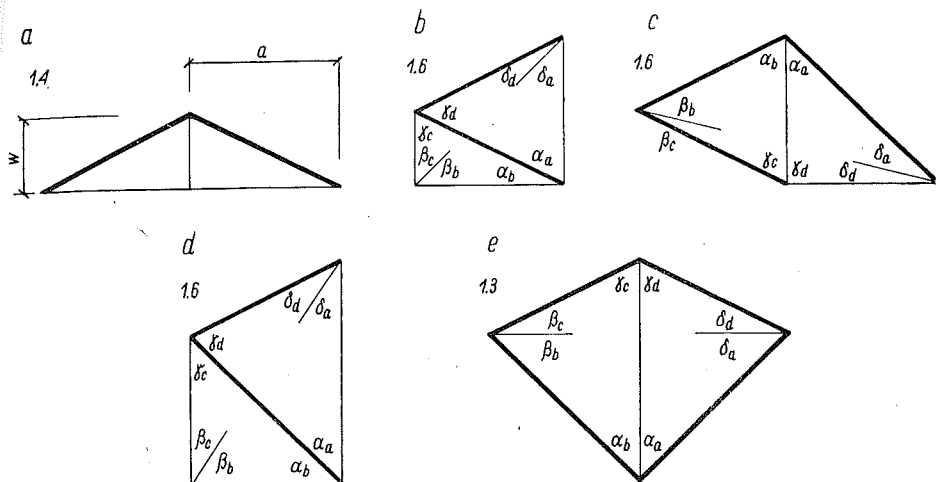
Z kratownic tych wyodrębnimy elementarne układy o czterech węzłach i pięciu prętach i oznaczymy je zgodnie z przyjętymi poprzednio oznaczeniami.

Dla wszystkich tych pól elementarnych obliczymy wartość stosunku wzajemnego przesunięcia jednostkowego węzłów nie połączonych prętami do odkształ-

cenia równej wytrzymałości. Układy, dla których  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ , spełniają warunek minimum potencjału.

Układ *a* oznaczony symbolem 1.4. Wartość stosunku

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1.$$



Rys. 19

Układ *b* oznaczony symbolem 1.6. Wartość stosunku

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 + 2 \frac{\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c - \text{ctg } \delta_a}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_a}.$$

Podstawiając

$$\text{ctg } \alpha_a = \frac{w}{a}, \quad \text{ctg } \alpha_b = \frac{a}{w}, \quad \text{ctg } \beta_b = \frac{a}{2w}, \quad \text{ctg } \beta_c = \frac{2w}{a}, \quad \text{ctg } \gamma_c = \frac{w}{a},$$

$$\text{ctg } \delta_a = \frac{2w}{a}, \quad \text{ctg } \delta_a = \text{ctg} [(\delta_a + \delta_a) - \delta_a] =$$

$$= \left( \frac{w}{a} \frac{2w}{a} + 1 \right) : \left( \frac{2w}{a} - \frac{w}{a} \right) = \frac{2w^2 + a^2}{wa},$$

otrzymamy

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 + 2 \frac{2(w^2 + a^2 + w^2 - 2w^2 - a^2)}{a^2 + 4w^2 + 4w^2 + 4w^2 + 2a^2} = 1.$$

Układ *c* oznaczony symbolem 1.6. Mamy

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 + 2 \frac{\text{ctg } \alpha_a + \text{ctg } \alpha_b + \text{ctg } \gamma_c - \text{ctg } \delta_a}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_a}.$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_a &= \frac{2w}{a}, & \operatorname{ctg} \alpha_b &= \frac{w}{a}, & \operatorname{ctg} \gamma_c &= \frac{w}{a}, & \operatorname{ctg} \delta_a &= \frac{2a}{w}, \\ \operatorname{ctg} \delta_a &= \frac{2w^2 + 2a^2}{3aw}, & \operatorname{ctg} \beta_c &= \frac{w^2 + 2a^2}{aw}, & \operatorname{ctg} \beta_b &= \frac{4w^4 - 7w^2a^2 - 2a^4}{-12w^3a - 3wa^3}, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = \frac{4a^4 + 112w^4 + 44a^2w^2}{16a^4 + 16w^4 + 68a^2w^2}, \quad \left| \frac{e_{k+1}}{e_0} \right| < 1, \text{ gdy } \frac{w}{a} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Układ  $d$  oznaczony symbolem 1.6. Wartość stosunku

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha_a + \operatorname{ctg} \alpha_b + \operatorname{ctg} \gamma_c - \operatorname{ctg} \delta_a}{\operatorname{ctg} \beta_b + \operatorname{ctg} \beta_c + \operatorname{ctg} \delta_a + \operatorname{ctg} \delta_a}.$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_a &= \frac{2w}{a}, & \operatorname{ctg} \alpha_b &= \frac{a}{2w}, & \operatorname{ctg} \beta_b &= \frac{a}{3w}, & \operatorname{ctg} \beta_c &= \frac{3w}{a}, \\ \operatorname{ctg} \gamma_c &= \frac{2w}{a}, & \operatorname{ctg} \delta_a &= \frac{3w}{a}, & \operatorname{ctg} \delta_a &= \frac{3w^2 + a^2}{2wa}, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = \frac{15w^2 + a^2}{9w^2 + a^2} > 1.$$

Układ  $e$  oznaczony symbolem 1.3. Układ ten przy dowolnych wartościach kątowych spełnia warunek  $e_{k+1}/|e_0| > 1$ , a więc nie spełnia warunku minimum potencjału.

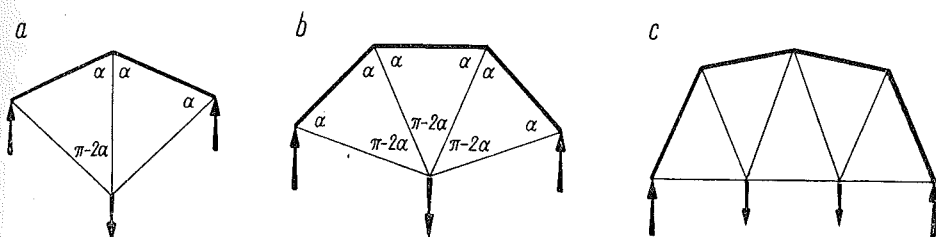
Rozpatrywane kratownice pod danym obciążeniem pionowym w węzłach pasa dolnego nie są kratownicami o najmniejszym potencjale, gdyż w skład ich wchodzi elementarne układy, w których stosunek wzajemnego przesunięcia jednostkowego węzłów nie połączonych prętem do odkształcenia jednostkowego równej wytrzymałości jest większy od 1.

**4.5. Kratownice ukształtowane na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty.** Rozpatrzmy kratownice, które kształtowane były na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty, [7]. Kratownice te przedstawiono na rys. 20.

W kratownicach przedstawionych na rys. 20a i 20b stosunek wzajemnego przesunięcia jednostkowego węzłów nie połączonych prętem do odkształcenia jednostkowego równej wytrzymałości wynosi

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1.$$

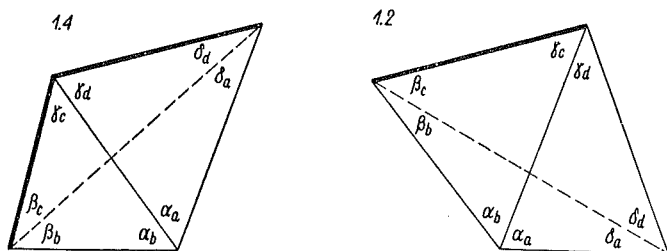
Stosunek  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ , gdy  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ . W tym zakresie wartości kąta  $\alpha$  kratownicy powyższe spełniają warunek minimum potencjału.



Rys. 20

Z kratownicy przedstawionej na rys. 20c wyodrębnimy układy składające się z czterech węzłów i pięciu prętów (rys. 21) oraz obliczymy wartość stosunku  $e_{k+1}/e_0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_a &= 55^\circ 04' 59'', & \gamma_c &= 52^\circ 22' 49,5'', & \alpha_a &= 69^\circ 50' 02'', & \gamma_c &= 52^\circ 22' 49,5'', \\ \alpha_b &= 55^\circ 04' 59'', & \gamma_d &= 72^\circ 32' 11,5'', & \alpha_b &= 55^\circ 04' 59'', & \gamma_d &= 40^\circ 19' 56'', \\ \beta_b &= 42^\circ 13' 40,2'', & \delta_a &= 27^\circ 36' 21,8'', & \beta_b &= 24^\circ 46' 27'', & \delta_a &= 30^\circ 18' 32'', \\ \beta_c &= 30^\circ 18' 31,3'', & \delta_d &= 24^\circ 46' 27,7'', & \beta_c &= 47^\circ 45' 45'', & \delta_d &= 39^\circ 31' 30''. \end{aligned}$$



Rys. 21

Układ oznaczony symbolem 1.4 spełnia warunek

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 - 2 \frac{\text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c + \text{ctg } \gamma_d + \text{ctg } \delta_a}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d} = -0,44022.$$

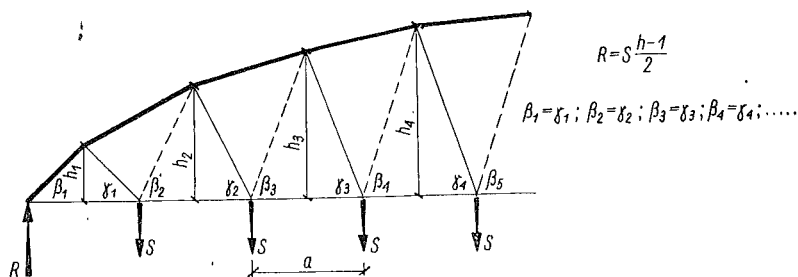
Układ oznaczony symbolem 1.2 posiada wartość stosunku

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 - 2 \frac{\text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \gamma_c}{\text{ctg } \beta_b + \text{ctg } \beta_c + \text{ctg } \delta_a + \text{ctg } \delta_d} = 0,44023.$$

Rozpatrywana kratownica ukształtowana na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty jest kratownicą minimalną również ze względu na przyjęty układ prętów. Kratownica ta składa się z układów elementarnych, w których stosunek wzajemnego przesunięcia jednostkowego węzłów nie połączonych prętem do odkształcenia jednostkowego równej wytrzymałości jest mniejszy od 1.

4.6. Kratownice o węzłach pasa górnego, położonych na łuku. Rozpatrzmy kratownice o poziomym pasie dolnym oraz o węzłach pasa górnego położonych na łuku.

Kratownice obciążamy siłami  $S$  przyłożonymi w węzłach pasa dolnego. Położenie węzłów pasa górnego dobierzemy tak, aby w wieszakach kratownicy występowały tylko siły rozciągające. Położeniem granicznym węzłów pasa gór-



Rys. 22

nego będzie to położenie, przy którym siły w wieszakach pochyłonych ku środkowi kratownicy osiągną wartości zerowe. Przez  $n$  oznaczmy ilość przedziałów pasa dolnego.

Po rozwiązaniu równań równowagi węzłów otrzymamy:

$$h_2 = h_1 \frac{n-1}{n-1} \frac{3n-5}{n+1} = h_1 \frac{3n-5}{n+1},$$

$$h_3 = h_1 \frac{n-1}{n-1} \frac{3n-5}{n+1} \frac{5n-13}{3n-3} = h_2 \frac{5n-13}{3n-3},$$

$$h_4 = h_1 \frac{n-1}{n-1} \frac{3n-5}{n+1} \frac{5n-13}{3n-3} \frac{7n-25}{5n-11} = h_3 \frac{7n-25}{5n-11},$$

$$h_5 = h_1 \frac{n-1}{n-1} \frac{3n-5}{n+1} \frac{5n-13}{3n-3} \frac{7n-25}{5n-11} \frac{9n-41}{7n-23} = h_4 \frac{9n-41}{7n-23}.$$

Oznaczając przez  $i$  rozpatrywany przedział kratownicy otrzymamy

$$h_i = h_{i-1} \frac{(2i-1)n - 2i^2 + 2i - 1}{(2i-3)n - 2i^2 + 6i - 3};$$

wzór ten jest słuszny dla  $i < n/2$ .

Przy spełnianiu warunku

$$h_i : h_{i-1} > \frac{(2i-1)n - 2i^2 + 2i - 1}{(2i-3)n - 2i^2 + 6i - 3}$$

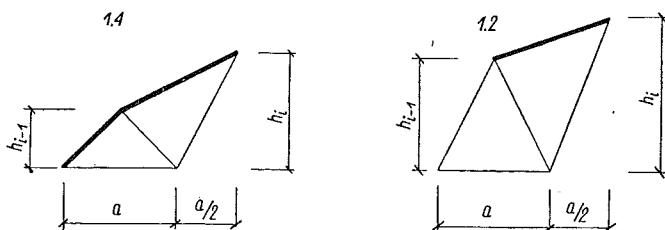
siły we wszystkich wieszakach są tego samego znaku, co siły w prętach pasa dolnego.



Z kratownicy tak ukształtowanej możemy wyodrębnić układy elementarne.

Oznaczając  $h_i/a = w$ ;  $h_{i-1}/a = p$  otrzymamy wartość stosunku wzajemnego przesunięcia jednostkowego węzłów nie połączonych prętem  $e_{k+1}$  do odkształcenia równej wytrzymałości  $e_0$  w układzie oznaczonym symbolem 1.4,

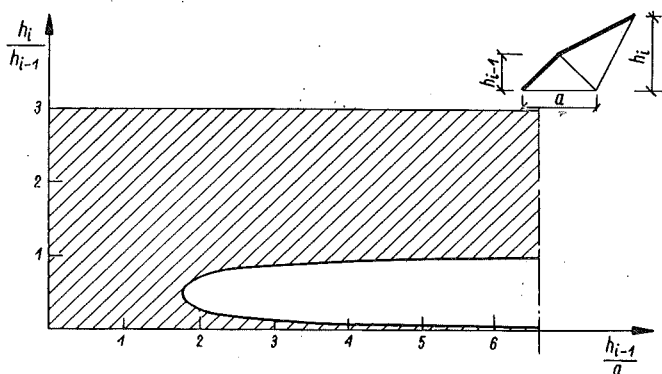
$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 - \frac{4w}{3p+w} - \frac{2w}{p} \frac{(3p-w)^2(4p^2+1)}{(3p+w)(p+w)(9+4w^2)},$$



Rys. 23

oraz w układzie oznaczonym symbolem 1.2,

$$\frac{e_{k+1}}{|e_0|} = 1 - \frac{16w(p^2 - 2pw + w^2 + 1)}{(p+w)(9+4w^2)}.$$



Rys. 24

Układ elementarny oznaczony symbolem 1.4 posiada najmniejszy potencjał przy  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ , gdy

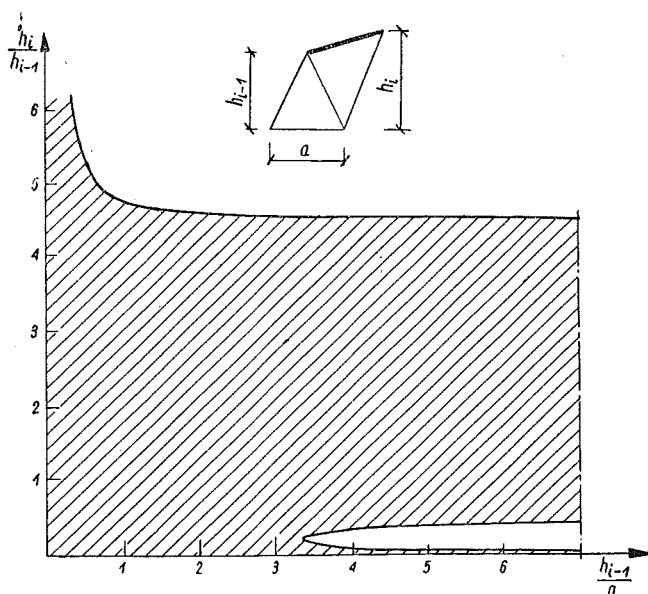
$$(w-3p)(4pw^2 - 4p^2w + w + 3p) < 0.$$

Nierówność ta jest spełniona przez wartości  $p = h_{i-1}/a$ ,  $w/p = h_i/h_{i-1}$  znajdujące się w obszarze zakreskowanym, przedstawionym na rys. 24.

Układ elementarny oznaczony symbolem 1.2 jest układem minimalnym przy  $|e_{k+1}/e_0| < 1$ , gdy

$$8wp^2 - (20w^2 + 9)p + (4w^3 - w) < 0;$$

nierówność ta jest spełniona przez wartości  $p = h_{i-1}/a$ ,  $w/p = h_i/h_{i-1}$  znajdujące się w obszarze zakreskowanym, przedstawionym na rys. 25.



Rys. 25

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] P. S. GIRARD, *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égalé résistance*, 1798.
- [2] M. LÉVY, *La statique graphique*, Vol. 4, note I, Paryż 1907.
- [3] Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, cz. 1-3, Akad. Nauk Techn., Warszawa 1939.
- [4] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych prętów*, Inżyn. Budown., **11** (1950).
- [5] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych węzłów*, Księga Jubil. M. T. HUBERA, Gdańsk 1950.
- [6] Z. WASIUTYŃSKI, *O przekształcaniu kratownic przez wymianę prętów*, Inżyn. Budown., 1958.
- [7] A. BRANDT, J. KOSMOWSKI, Z. WASIUTYŃSKI, *O kształtowaniu kratownic na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów łączących trzy pręty*, Rozpr. Inżyn., **2**, **5** (1957).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ СОСТАВЛЕННОЙ НА ЧЕТЫРЕХ УЗЛАХ И ОФОРМЛЕННОЙ ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛА

В работе рассматриваются фермы изготовленные из стержней, соединяющих данные узлы в плоскости. Стержни соединены в узлах шарнирно. В данном случае рассматриваются изостатические и геометрические неизменяющиеся системы с одинаковыми значениями относительных деформации всех стержней. Соединяя четыре узла произвольно выбранными пятью стержнями получено шесть различных стержневых систем. Для получения простых критериев определяющих систему с наименьшим потенциалом упругости рассматривается преобразования систем путем обмена стержней.

В результате этих рассуждений получено критерий для минимума потенциала упругости, который зависит от абсолютного значения отношения взаимного относительного перемещения узлов, не соединенных стержней к деформации стержней фермы, обладающих одинаковой прочностью.

На основании зависимости Лэви определяется значение взаимного относительного перемещения узлов не соединенных стержнем при всех возможных системах знаков сил в стержнях фермы и при различных положениях узлов в плоскости. Получен ответ на вопрос — которые именно из этих систем могут быть системами, обладающими наименьшим потенциалом упругости, а полученные результаты применены для анализа систем ферм состоящих из треугольников с параллельными поясами, кровельных ферм и ферм с узлами верхнего пояса расположенными на дуге.

### Summary

#### THE DETERMINATION FOR MINIMUM POTENTIAL OF A BAR SYSTEM IN A FOUR-NODE LATTICE FIELD

Concerned in the present considerations are lattice structures of bars connecting four nodes prescribed in a plane, the bars have hinged joints at the nodes. Isostatic, geometrically invariable structures are considered, having the same strain in all the bars. On connecting the four nodes by means of any five bars, six different bar systems are obtained. In order to obtain simple criteria as to which of the six structures is that of minimum elastic potential, transformations by bar exchange are considered.

As a result, the criterion for the minimum elastic potential is obtained in function of the absolute value of the ratio of the relative displacement of the nodes not connected by a bar to the strain in lattice bars of equal strength.

On the basis of the Lévy equation, the value of relative displacement of the nodes not connected by a bar is determined for every possible system of force signs in the lattice bars and for various locations of the nodes in the

plane. Those structures which may be those of minimum elastic potential are found. The results obtained are applied to the analysis of multi-field lattices with parallel chords, roof lattices, and lattices with upper nodes forming an arc.

**ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH**  
**IPPT PAN**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1959 r.*

---