

**RYSZARD GANOWICZ**

**ROZWIĄZANIA OSOBLIWE PŁYT  
WZMOCNIONYCH ŻEBRAMI JEDNOSTRONNYMI**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCX**

**TOM IX . ZESZYT 4 . ROK 1961**

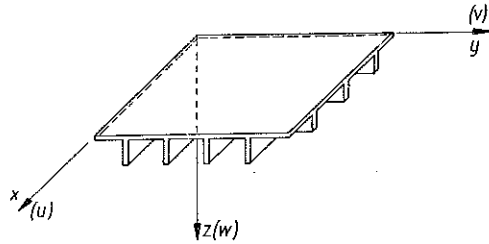
1. W pracy podane zostaną rozwiązania nieograniczonych płyt wzmocnionych żebrami jednostronnymi przy obciążeniu siłą skupioną. Rozwiązania takie dla płyt izotropowych, ortotropowych i anizotropowych można znaleźć w pracach A. PUCHERA, [1], oraz J. MOSSAKOWSKIEGO, [2] i [3].

Uzyskanie rozwiązania dla płyty nieograniczonej, nazywanego też rozwiązaniem osobliwym, pozwala na wyznaczenie powierzchni wpływowych dla płyt o dowolnym kształcie i sposobie podparcia. Wykazał to A. PUCHER nazywając ten sposób budowania powierzchni wpływowych *metodą punktów osobliwych*.

Rozwiązania osobliwe podane w niniejszej pracy otrzymano w oparciu o rozwiązanie, uzyskane przez autora dla pasma wolnopodpartego, [4]. W dalszym ciągu pracy używane będą oznaczenia charakterystyk przekroju i pewnych stałych takie same jak w cytowanej powyżej pracy, wobec czego w pracy niniejszej nie będą one dodatkowo objaśniane.

Rozważania poniższe dotyczą płyt z żebrami spełniających następujące założenia:

- 1) płyta spełnia założenia teorii cienkich płyt izotropowych,
- 2) żebra (traktowane jako pręty) przebiegają w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach,
- 3) rozstaw i przekrój żeber jednego kierunku jest jednakowy,
- 4) żebra są symetryczne i nie posiadają sztywności na skręcanie oraz sztywności na zginanie w kierunku poziomym,
- 5) rozstaw żeber jest mały (model ciągły),
- 6) płyta i zebro w miejscu styku mają jednakowe przemieszczenia.



Rys. 1a

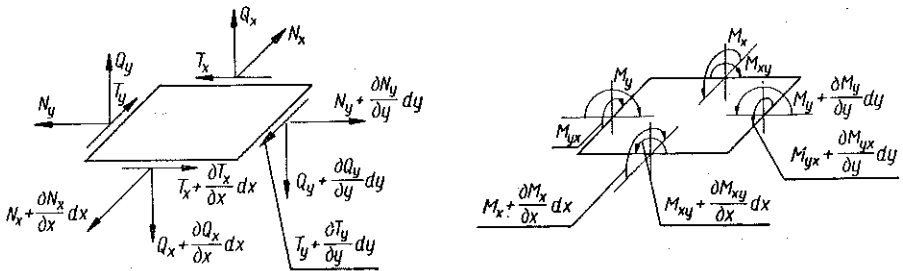
Układ równań dla takich płyt podał A. PFLÜGER, [5]. Układ ten można sprowadzić do jednego równania na funkcję przemieszczeń, [4]. W przypadku obciążenia siłą skupioną równanie to będzie miało postać następującą:

$$(1.1) \quad \frac{\partial^8 F}{\partial y^8} + a \frac{\partial^8 F}{\partial y^6 \partial x^2} + b \frac{\partial^8 F}{\partial y^4 \partial x^4} + c \frac{\partial^8 F}{\partial y^2 \partial x^6} + d \frac{\partial^8 F}{\partial x^8} = 0.$$

Współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  zależą tylko od charakterystyk przekroju żebra i płyty. Można je obliczyć ze wzorów podanych w pracy [4].

Wykorzystując zależności podane w pracy [4] wszystkie wielkości statyczne można przedstawić za pomocą funkcji przemieszczeń. Poniżej podano przykładowo wyrażenie na moment zginający  $M_x$  i siłę normalną  $N_x$  (rys. 1):

$$(1.2) \left\{ \begin{aligned} N_x &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[ \nu t \bar{S}_x \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} - (\bar{S}_x t_y + \bar{S}_y t_x) \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} + \nu t \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} \right], \\ M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{1-\nu}{2} t (\bar{I}_x t_x - \bar{S}_x^2) \frac{\partial^3 F}{\partial x^6} + \left[ -\bar{I}_x (t_x t_y - \nu t^2) - \frac{1-\nu}{2} t t_x \nu I + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{S}_x^2 t_y \right] \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} + \left[ -\frac{1-\nu}{2} t t_y \bar{I}_x - \nu I (t_x t_y - \nu t^2) - \frac{1+\nu}{2} \bar{S}_x \bar{S}_y t \right] \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} - \right. \\ &\quad \left. - \nu \frac{1-\nu}{2} I t t_y \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} \right\}. \end{aligned} \right.$$



Rys. 1

Postać rozwiązania równania różniczkowego (1.1) zależy od pierwiastków równania charakterystycznego:

$$(1.3) \quad r^8 - ar^6 + br^4 - cr^2 + d = 0.$$

Ilość możliwych postaci rozwiązania (ze względu na pierwiastki równania charakterystycznego) ograniczyć można do następujących czterech przypadków, [4]:

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| I. $r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2$ ,                    | liczby rzeczywiste nieujemne,     |
| II. $r_1^2, r_2^2, r_3^2 = r_4^2$                    | liczby rzeczywiste nieujemne,     |
| III. $r_1^2, r_2^2 = r_3^2 = r_4^2$                  | liczby rzeczywiste nieujemne,     |
| IV. $r_1^2, r_2^2$                                   | liczby rzeczywiste nieujemne oraz |
| $r_3^2 = \alpha + \beta i, r_4^2 = \alpha - \beta i$ | liczby zespolone sprzężone.       |

W dalszym ciągu rozważania przeprowadzone zostaną dla przypadku pierwszego (cztery różne nieujemne pierwiastki rzeczywiste  $r_k^2$ ), a dla przypadków pozostałych podane będą rozwiązania przykładowe, które otrzymuje się w sposób analogiczny do przypadku pierwszego.

2. Dla pasma wolnopodpartego, obciążonego siłą skupioną, funkcję przemieszczeń przedstawia wyrażenie (2.13) w pracy [4]. Wykorzystując znane związki try-

gonometryczne oraz dodając i odejmując równocześnie wielomian stopnia szóstego można przekształcić tę funkcję do postaci:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad F(x, y) = & \\
 = & -\frac{P}{2ElK_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^7} (m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + m_3 e^{-r_3 \alpha_n y} + e^{-r_4 \alpha_n y}) \cos \alpha_n (x - \xi) + \\
 & + \frac{P}{2ElK_1} [m_1 W_1(x - \xi, y) + m_2 W_2(x - \xi, y) + m_3 W_3(x - \xi, y) + \\
 & + W_4(x - \xi, y)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n r_0}}{\alpha_n} + \frac{P}{2ElK_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^7} (m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + \\
 & + m_3 e^{-r_3 \alpha_n y} + e^{-r_4 \alpha_n y}) \cos \alpha_n (x + \xi) - \frac{P}{2ElK_1} [m_1 W_1(x - \xi, y) + \\
 & + m_2 W_2(x - \xi, y) + m_3 W_3(x - \xi, y) + W_4(x - \xi, y)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n r_0}}{\alpha_n},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$W_k(x - \xi, y) = -\frac{(x - \xi)^6}{6!} + r_k^2 \frac{(x - \xi)^4}{4!} \frac{y^2}{2!} - r_k^4 \frac{(x - \xi)^2}{2!} \frac{y^4}{4!} + r_k^6 \frac{y^6}{6!} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Występujący w powyższym wyrażeniu szereg jest zbieżny i jego suma jest równa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n r_0}}{\alpha_n} = -\frac{l}{\pi} \ln(1 - e^{-\frac{\pi}{l} r_0}),$$

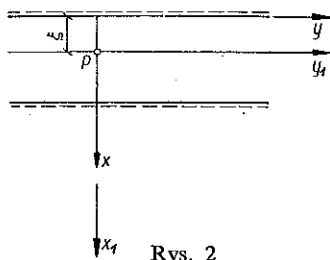
gdzie  $r_0$  oznacza stałą. W dalszym ciągu zajmujemy się pierwszymi dwoma sumami wyrażenia (2.1) wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad F_1(x, y) = & \\
 = & -\frac{P}{2EK_1 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n^7} (m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + m_3 e^{-r_3 \alpha_n y} + e^{-r_4 \alpha_n y}) \cos \alpha_n (x - \xi) - \right. \\
 & \left. - [m_1 W_1(x - \xi, y) + m_2 W_2(x - \xi, y) + m_3 W_3(x - \xi, y) + W_4(x - \xi, y)] \frac{e^{-\alpha_n r_0}}{\alpha_n} \right\} \frac{\pi}{l}.
 \end{aligned}$$

Łatwo stwierdzić, że określona powyżej funkcja przemieszczeń spełnia jednorodne równanie różniczkowe zagadnienia, a razem z odrzuconą częścią funkcji przemieszczeń, która też spełnia równanie (1.1), czyni zadość warunkom brzegowym dla pasma wolnopodpartego. Jeżeli szerokość pasma zmierza do nieskończoności, to w wyrażeniu (2.2) otrzymamy przejście graniczne, któremu odpowiada okres nieskończenie duży. Zamiast sumowania po  $n = 1, 2, 3, \dots$  otrzymujemy całkę przy ciągłości parametru  $\alpha_n$  w zakresie od zera do nieskończoności.

Wtedy  $\alpha_n \rightarrow a$  oraz  $\pi/l = \Delta\alpha_n \rightarrow da$  i wyrażenie na funkcję przemieszczeń  $F_1(x, y)$  przechodzi w następujące:

$$(2.3) \quad F_0(x_1, y_1) = -\frac{P}{2EK_1\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\alpha^7} (m_1 e^{-r_1\alpha y_1} + m_2 e^{-r_2\alpha y_1} + m_3 e^{-r_3\alpha y_1} + e^{-r_4\alpha y_1}) \cos \alpha x - [m_1 W_1(x_1, y_1) + m_2 W_2(x_1, y_1) + m_3 W_3(x_1, y_1) + W_4(x_1, y_1)] \frac{e^{-\alpha r_0}}{\alpha} \right\} da,$$



gdzie  $x_1, y_1$  oznaczają współrzędne w nowym układzie, którego początek pokrywa się z punktem działania siły skupionej (rys. 2).

W dalszych rozwiązaniach dla płyty nieograniczonej współrzędne punktu w nowym układzie będziemy oznaczać wprost literami  $x, y$  i funkcja przemieszczeń (2.3) ma postać:

$$(2.4) \quad F_0(x, y) = -\frac{P}{2EK_1\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\alpha^7} (m_1 e^{-r_1\alpha y} + m_2 e^{-r_2\alpha y} + m_3 e^{-r_3\alpha y} + e^{-r_4\alpha y}) \cos \alpha x - [m_1 W_1(x, y) + m_2 W_2(x, y) + m_3 W_3(x, y) + W_4(x, y)] \frac{e^{-\alpha r_0}}{\alpha} \right\} da,$$

gdzie

$$W_k(x, y) = -\frac{x^6}{6!} + r_k^2 \frac{x^4}{4!} \frac{y^2}{2!} - r_k^4 \frac{x^2}{2!} \frac{y^4}{4!} + r_k^6 \frac{y^6}{6!} \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

Sześciokrotne różniczkowanie funkcji  $F_0(x, y)$  (2.4) względem  $x$  i  $y$  zgodnie z zasadami różniczkowania całki względem parametru pozwala na określenie pochodnych szóstego rzędu funkcji przemieszczeń za pomocą wyrażeń zamkniętych.

Przykładowo pokazane poniżej obliczenie pochodnej szóstego rzędu funkcji  $F_0$  względem  $x$ :

$$(2.5) \quad \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^6} = \frac{P}{2EK_1\pi} \int_0^\infty \left[ m_1 \frac{e^{-r_1\alpha y} \cos \alpha x + \frac{\partial^6 W_1(x, y)}{\partial x^6} e^{-\alpha r_0}}{\alpha} + m_2 \frac{e^{-r_2\alpha y} \cos \alpha x + \frac{\partial^6 W_2(x, y)}{\partial x^6} e^{-\alpha r_0}}{\alpha} + m_3 \frac{e^{-r_3\alpha y} \cos \alpha x + \frac{\partial^6 W_3(x, y)}{\partial x^6} e^{-\alpha r_0}}{\alpha} + \frac{e^{-r_4\alpha y} \cos \alpha x + \frac{\partial^6 W_4(x, y)}{\partial x^6} e^{-\alpha r_0}}{\alpha} \right] da.$$

Po wzięciu pod uwagę, że  $\partial^6 W_k / \partial x^6 = -1$  i po obliczeniu całki, [6],

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-r_k \alpha y} \cos \alpha x - e^{-r_0 \alpha}}{\alpha} d\alpha = -\frac{1}{2} \ln \frac{r_k^2 y^2 + x^2}{r_0^2}$$

otrzymano ostatecznie

$$(2.6) \quad \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^6} = -\frac{P}{4EK_1 \pi} \left( m_1 \ln \frac{r_1^2 y^2 + x^2}{r_0^2} + m_2 \ln \frac{r_2^2 y^2 + x^2}{r_0^2} + m_3 \ln \frac{r_3^2 y^2 + x^2}{r_0^2} + \ln \frac{r_4^2 y^2 + x^2}{r_0^2} \right).$$

Analogiczne postępowanie pozwoliło na wyznaczenie dalszych pochodnych szóstej rzędu funkcji przemieszczeń, które zestawiono poniżej:

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k \varphi_{k0}, & \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^3 \partial y^3} = -\frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k^3 \psi_{k0}, \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^5 \partial y} = \frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k \varphi_{k0}, & \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k^4 \varphi_{k0}, \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^4 \partial y^2} = -\frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k^2 \varphi_{k0}, & \frac{\partial^6 F_0}{\partial x \partial y^5} = \frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k^5 \psi_{k0}, \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial y^6} = -\frac{P}{EK_1 \pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k^6 \varphi_{k0}. \end{array} \right.$$

We wzorach powyższych przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.7.1) \quad m_4 = 1, \quad \varphi_{k0} = -\frac{1}{4} \ln \frac{r_k^2 y^2 + x^2}{r_0^2}, \quad \psi_{k0} = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y}.$$

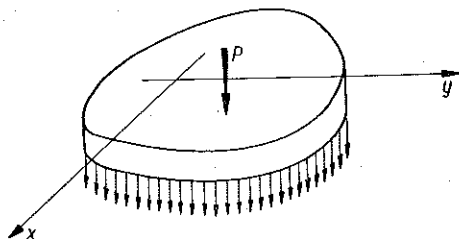
Wracając do sposobu otrzymania funkcji (2.4) należy zauważyć, że tworząc ją odrzuciliśmy w wyrażeniu na funkcję przemieszczeń dla pasma część wyrazów. Można wykazać, że część odrzucona jest częścią regularną, bowiem pochodne jej nie zawierają wartości osobliwych w punkcie przyłożenia siły skupionej. Na przykład dla  $\partial^6 F / \partial x^6$ :

$$(2.8) \quad \frac{\partial^6 F_2}{\partial x^6} = -\frac{P}{2EK_1 l} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} m_1 \frac{e^{-r_1 \alpha_n y} \cos \alpha_n (x + \xi) - e^{-r_0 \alpha_n}}{\alpha_n} + \sum_{n=1}^{\infty} m_2 \frac{e^{-r_2 \alpha_n y} \cos \alpha_n (x + \xi) - e^{-r_0 \alpha_n}}{\alpha_n} + \sum_{n=1}^{\infty} m_3 \frac{e^{-r_3 \alpha_n y} \cos \alpha_n (x + \xi) - e^{-r_0 \alpha_n}}{\alpha_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-r_4 \alpha_n y} \cos \alpha_n (x + \xi) - e^{-r_0 \alpha_n}}{\alpha_n} \right],$$

gdzie przez  $F_2(x,y)$  oznaczono dwie ostatnie sumy wyrażenia (2.1). Po wykorzystaniu tablic [6] otrzymano:

$$(2.9) \quad \frac{\partial^6 F_2}{\partial x^6} = \frac{P}{2EK_1\pi} \sum_{k=1}^4 m_k \ln \frac{\sqrt{1 - 2e^{-\frac{r_k \pi}{l} y} \cos \frac{\pi}{l} (x + \xi) + e^{-2\frac{r_k \pi}{l} y}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} r_0}}$$

Dla punktu przyłożenia siły skupionej w pasmie wyrażenie to nie daje wartości osobliwych ( $0 < \xi < l$ ). W analogiczny sposób można wykazać, że wszystkie pochodne szóstego rzędu części odrzuconej funkcji przemieszczeń są częściami regularnymi. Wnioskujemy więc, że odrzucona część funkcji przemieszczeń jest także częścią regularną.



Rys. 3

Ponadto można się przekonać, że funkcja przemieszczeń  $F_0(x, y)$  otrzymana wyżej z funkcji przemieszczeń dla pasma po odrzuceniu części regularnej spełnia warunek zrównoważenia siły pionowej  $P$  z siłami poprzecznymi (rys. 3). Warunek ten można symbolicznie napisać jak niżej, [2],

$$(2.10) \quad \oint_k Q_n ds = -P.$$

Całka po dowolnej krzywej zamkniętej  $k$ , wewnątrz której znajduje się punkt przyłożenia siły skupionej, w warunku powyższym może być zastąpiona całką po prostokącie o wierzchołkach, [2],  $(-\infty, b)$ ,  $(+\infty, b)$ ,  $(-\infty, -b)$ ,  $(+\infty, -b)$ .

Przy całkowaniu po tym prostokącie warunek (2.10) zastąpiony zostanie warunkiem

$$(2.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} Q_y(x, b) dx - \int_{-\infty}^{\infty} Q_y(x, -b) dx = -P.$$

Po określeniu siły poprzecznej  $Q_y$  za pomocą funkcji przemieszczeń  $F_0(xy)$  i wykonaniu całkowania łatwo się przekonać, że spełniony jest warunek (2.11).

Określona więc zgodnie z wzorem (2.4) funkcja przemieszczeń jest rozwiązaniem osobliwym, a jej pochodne (2.7) są rozwiązaniami osobliwymi pochodnych szóstego rzędu.

Zgodnie z tym co zostało wykazane w pracy [4] wszystkie wielkości statyczne można wyrazić za pomocą pochodnych szóstego rzędu funkcji przemieszczeń. Wobec tego łatwo podać rozwiązanie osobliwe wielkości statycznych.

Poniżej podano przykładowo wyrażenie na osobliwe rozwiązanie momentu zginającego  $M_{x_0}$ , które otrzymano po wykorzystaniu zależności (1.2) i (2.7):

$$(2.12) \quad M_{x_0} = \frac{P}{(1-\nu^2)K_1\pi} \sum_{k=1}^4 m_k \varphi_{k0} \left\{ -\frac{1-\nu}{2} t [\bar{I}_x t_x - \bar{S}_x^2] - \left[ -\bar{I}_x (t_x t_y - \nu t^2) - \frac{1-\nu}{2} t t_x \nu I + \bar{S}_x^2 t_y \right] r_k^2 + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1-\nu}{2} t t_y \bar{I}_x - \nu I (t_x t_y - \nu t^2) - \frac{1+\nu}{2} \bar{S}_x \bar{S}_y t \right] r_k^4 + \nu \frac{1-\nu}{2} I t t_y r_k^6 \right\}.$$

Dla punktu przyłożenia siły skupionej (0, 0) moment  $M_{x_0}$  rośnie nieograniczenie, występuje tu punkt osobliwy tak jak dla płyt izotropowych i anizotropowych. Podobnie i dla innych wielkości statycznych w punkcie przyłożenia siły skupionej mamy punkt osobliwy.

Dla momentów  $M_{x_0}, M_{y_0}$  i sił normalnych, które wyrażone będą przez funkcje  $\varphi_{k0}$ , wystąpią w tym punkcie rzędne nieskończenie duże, a dla sił tnących poziomych  $T_x = T_y$  i dla momentów skręcających  $M_{xy} = -M_{yx}$ , które określamy za pomocą funkcji  $\psi_{k0}$ , wystąpią tu nieciągłości w postaci skoku.

Zajmiemy się jeszcze wyznaczeniem osobliwych rozwiązań przemieszczeń  $u, v, w$ . Wykorzystując zależności (3.1) z pracy [4] oraz wzory (2.7) pracy niniejszej określić można pochodne drugiego rzędu przemieszczenia  $w_0$  i pochodne pierwszego rzędu przemieszczeń  $u_0$  i  $v_0$  za pomocą funkcji  $\varphi_{k0}$  i  $\psi_{k0}$ . Po wykonaniu całkowania otrzymano:

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{aligned} w_0 &= \frac{P}{8EK_1\pi} \sum_{k=1}^4 m_k \left[ \frac{1-\nu}{2} t t_x - r_k^2 (t_x t_y - \nu t^2) + \frac{1-\nu}{2} t t_y r_k^4 \right] \left[ (r_k^2 y^2 - \right. \\ &\quad \left. - x^2) \ln \frac{r_k^2 y^2 + x^2}{r_0^2} - 4xy r_k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y} + 3(x^2 - r_k^2 y^2) \right], \\ u_0 &= -\frac{P}{8EK_1\pi} \sum_{k=1}^4 m_k \left[ \bar{S}_x \frac{1-\nu}{2} t - \bar{S}_x t_y r_k^2 - \frac{1+\nu}{2} \bar{S}_y t r_k^4 \right] \left[ 2x \ln \frac{r_k^2 y^2 + x^2}{r_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + 4r_k y \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y} - 4x \right], \\ v_0 &= -\frac{P}{8EK_1\pi} \sum_{k=1}^4 m_k r_k \left[ \frac{1+\nu}{2} \bar{S}_x t + \bar{S}_y t_x r_k^2 - \bar{S}_y \frac{1-\nu}{2} t r_k^4 \right] \left[ 2r_k y \ln \frac{r_k^2 y^2 + x^2}{r_0^2} - \right. \\ &\quad \left. - 4x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y} - 4r_k y \right]. \end{aligned} \right.$$

W ten sposób znaleziono rozwiązania osobliwe wszystkich wielkości interesujących przy płycie z żebrami jednostronnymi dla przypadku różnych pierwiastków rzeczywistych równania charakterystycznego (przypadek 1).



3. Podobna droga postępowania pozwoliła na znalezienie rozwiązań osobliwych dla przypadków następujących. Dla przypadków tych podane zostaną przykładowo rozwiązania osobliwe pochodnych szóstego rzędu funkcji przemieszczeń, co zupełnie wystarcza do obliczenia wielkości statycznych dla płyty z żebrami jednostronnymi, które to wielkości interesują nas w pierwszym rzędzie.

Znajdziemy więc dla poszczególnych przypadków:

przypadek II

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_2 \pi} \left( m_1 \varphi_{10} + m_2 \varphi_{20} + m_3 \varphi_{30} - y \frac{\partial \psi_{30}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^4 \partial y^2} = -\frac{P}{EK_2 \pi} \left[ m_1 r_1^2 \varphi_{10} + m_2 r_2^2 \varphi_{20} + (m_3 r_3^2 - 2r_3) \varphi_{30} - y r_3^2 \frac{\partial \psi_{30}}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_2 \pi} \left[ m_1 r_1^4 \varphi_{10} + m_2 r_2^4 \varphi_{20} + (m_3 r_3^4 - 4r_3^3) \varphi_{30} - y r_3^4 \frac{\partial \psi_{30}}{\partial x} \right]; \end{array} \right.$$

przypadek III

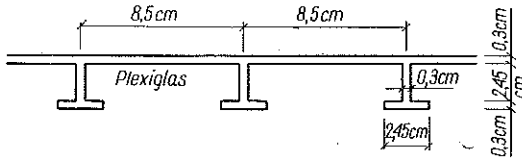
$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_3 \pi} \left[ m_1 \varphi_{10} + m_2 \varphi_{20} - m_3 y \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^4 \partial y^2} = -\frac{P}{EK_3 \pi} \left[ m_1 r_1^2 \varphi_{10} + (m_2 r_2^2 - 2m_3 r_2 + 2) \varphi_{20} - \right. \\ \left. - (m_3 r_2^2 - 4r_2) y \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} - y^2 r_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_3 \pi} \left[ m_1 r_1^4 \varphi_{10} + (m_2 r_2^4 - 4m_3 r_2^3 + 12r_2^2) \varphi_{20} - \right. \\ \left. - (m_3 r_2^4 - 8r_2^3) y \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} - y^2 r_2^4 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial x^2} \right]; \end{array} \right.$$

przypadek IV

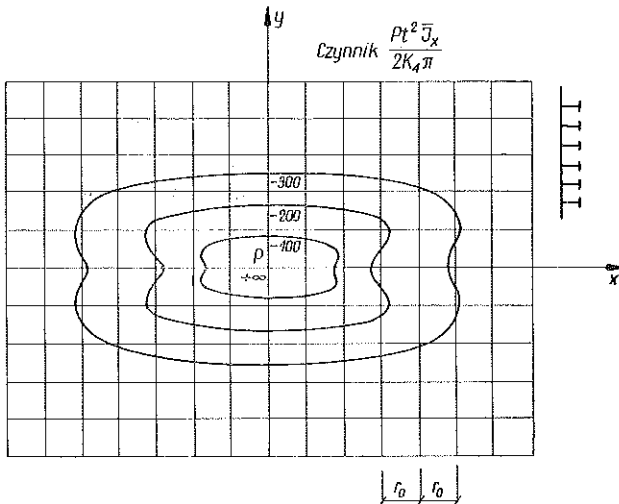
$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_4 \pi} (m_1 \varphi_{10} + m_2 \varphi_{20} + m_3 R_{10} + R_{20}), \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^4 \partial y^2} = -\frac{P}{EK_4 \pi} [m_1 r_1^2 \varphi_{10} + m_2 r_2^2 \varphi_{20} + (m_3 v_1^2 - m_3 v_2^2 + 2v_1 v_2) R_{10} + \\ + (-2m_3 v_1 v_2 + v_1^2 - v_2^2) R_{20}], \\ \frac{\partial^6 F_0}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_4 \pi} [m_1 r_1^4 \varphi_{10} + m_2 r_2^4 \varphi_{20} + (m_3 v_1^4 - 6m_3 v_1^2 v_2^2 + m_3 v_2^4 + 4v_1^3 v_2 - \\ - 4v_1 v_2^3) R_{10} + (4m_3 v_1 v_2^3 - 4m_3 v_1^3 v_2 + v_1^4 - 6v_1^2 v_2^2 + v_2^4) R_{20}]. \end{array} \right.$$

We wzorach powyższych stałe  $K_2, K_3, K_4, m_1, m_2, m_3$  oraz  $\nu_1, \nu_2$  mają znaczenie podane w pracy [4], a funkcje  $\varphi_{k0}$  i  $\psi_{k0}$  należy obliczyć ze wzorów (2.7.1). Przez funkcje  $R_{k0}$  oznaczono tu:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{10} &= \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu_2 y + x}{\nu_1 y} + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu_2 y - x}{\nu_1 y}, \\ R_{20} &= -\frac{1}{8} \ln \frac{\nu_1^2 y^2 + (\nu_2 y + x)^2}{r_0^2}, \quad \frac{1}{8} \ln \frac{\nu_1^2 y^2 + (\nu_2 y - x)^2}{r_0^2}, \\ R_{30} &= \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu_2 y - x}{\nu_1 y} + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{-\nu_2 y - x}{\nu_1 y}, \\ R_{40} &= \frac{1}{8} \ln \frac{\nu_1^2 y^2 + (-\nu_2 y + x)^2}{\nu_1^2 y^2 + (\nu_2 y + x)^2}. \end{aligned} \right.$$



Rys. 4



Rys. 5

4. Na zakończenie podamy rozwiązanie osobliwe momentu zginającego dla płyty o przekroju jak na rysunku 4.

Charakterystyki przekroju i stałe rozwiązania wzięto z pracy [4], gdzie obliczono pasmo płytowe o tym samym przekroju (przypadek IV).

Wykorzystując zależności (1.2) i (3.3) otrzymano rozwiązanie osobliwe momentu

$$M_{x_0} = \frac{t^2 \bar{I}_x}{2K_4 \pi} (-0,1725\varphi_{10} + 0,3624\varphi_{20} + 425,0232R_{10} + 392,0233R_{20}).$$

Oczywiście wielkość  $M_{x_0}$  zależy od przyjętej jednostki długości  $r_0$ . Dla zorientowania się w charakterze tego rozwiązania sporządzono plan warstwiczny powierzchni  $M_{x_0}$  (rys. 5).

Charakter otrzymanego wykresu odpowiada planowi warstwicowemu rozwiązania osobliwego  $M_{x_0}$  dla płyty ortotropowej o dużej sztywności w kierunku  $x$ , czego należało oczekiwać.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] A. PUCHER, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing. Archiv., **12** (1941).
- [2] J. MOSSAKOWSKI, *Osobliwe rozwiązanie w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. Stos., **3**, 6 (1954).
- [3] J. MOSSAKOWSKI, *Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., **1**, 7 (1955).
- [4] R. GANOWICZ, *Pasmo płytowe z żebrami jednostronnymi*, Rozpr. Inżyn., **2**, **8**, (1960).
- [5] A. PELÜGER, *Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte*, Ing. Archiv., 1947, s. 111.
- [6] И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1951.

#### Резюме

#### СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛАСТИНОК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОДНОСТОРОННИМИ РЕБРАМИ.

Дается решение бесконечной пластинки, подкрепленной односторонними ребрами при нагрузке сосредоточенной силой. Это решение эквивалентно, известным в литературе сингулярным решениям для изотропных, [1], и анизотропных, [2] и [3], пластинок, дающих возможность определить поверхности пластинок с произвольным контуром и опорой.

Обсуждаемые в работе сингулярные решения касаются пластинок, удовлетворяющих предположениям принятым ПФЛЮГЕРОМ, [5]. Они получаются после использования результатов, полученных автором для свободно опертой полосы, [4].

Все статистические величины получаются в виде замкнутых выражений.

Приводится числовой пример, в котором определяется сингулярное решение для изгибающего момента.

#### Summary

#### SINGULAR SOLUTIONS FOR PLATES STIFFENED WITH RIBS ON ONE SIDE

The problem solved is that of the infinite plate stiffened with ribs on one side and loaded with a concentrated force. This solution corresponds to the singular solutions for isotropic, [1], and anisotropic plates, [2], [3], known from the literature and enabling us to determine the influence surfaces of plates with any contour and any support conditions.

The singular solutions discussed in the present paper concern plates satisfying PFLÜGER's conditions, [5], and have been obtained by making use of the author's results for the simply supported strip, [4].

All the mechanical quantities are obtained in the form of closed expressions.

As an illustration a numerical example is given, where a singular solution is found for the bending moment.

**POLITECHNIKA GDAŃSKA**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 maja 1961 r.*

---