

ALEKSANDER LISOWSKI

ZASTOSOWANIE ELEKTRYCZNYCH UKŁADÓW ANALOGOWYCH  
DO OBLICZANIA RAM PRZESTRZENNYCH PROSTOKĄTNYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCIII

TOM IX • ZESZYT 3 • ROK 1961

## SPIS TREŚCI

Wstęp	515
1. Metoda odkształceń w zastosowaniu do obliczania ram	515
2. Elektryczne schematy pręta zginanego i skręcanego	517
3. Elektryczne układy analogowe ramownicy przestrzennej	519
4. Przykład ramy jednokomorowej	522
4.1. Równania równowagi węzłów	523
4.2. Etap pierwszy	526
4.3. Etap drugi	527

## Wstęp

W swoich pracach poprzednich [2] i [3] przedstawił autor zastosowanie elektrycznych układów analogowych do rozwiązywania belek i ram płaskich. W pracy niniejszej będą rozważane ramy przestrzenne prostokątne tj. takie, w których osie prętów oraz główne osie bezwładności przekrojów poprzecznych prętów są zgodne z prostokątnym układem współrzędnych  $x, y, z$ . Przy przyjęciu schematów sieci elektrycznej dla układu prętowego statyki autor oparł się na pracach autorów radzieckich z Instytutu Inżynierjno-Budowlanego w Rostowiu nad Donem oraz Taganrońskiego Instytutu Radiotechnicznego, [1], [5].

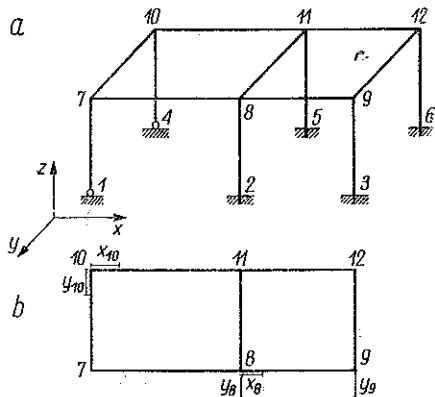
### 1. Metoda odkształceń w zastosowaniu do obliczania ram

W rozważaniach naszych oprzemy się na metodzie odkształceń w zastosowaniu do ram przestrzennych prostokątnych. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego rama odkształca się do położenia, w którym nastąpi stan równowagi. Muszą zatem być spełnione następujące warunki w ramie odkształconej:

- cała rama znajduje się w stanie równowagi,
- każdy pręt wycięty z ramy znajduje się w stanie równowagi,
- każdy węzeł wycięty z ramy znajduje się w stanie równowagi.

Rozważmy ramę podaną na rys. 1a.

Jako niewiadome przyjmujemy kąty obrotu węzłów względem osi  $x, y$  i  $z$  oraz składowe przesunięcia węzłów względem tych osi. W omawianym przypadku niewiadomymi są kąty obrotu względem osi  $x$  —  $\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}$  i  $\alpha_{12}$ , względem osi  $y$  —  $\beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}$  i  $\beta_{12}$  oraz względem osi  $z$  —  $\gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}$  i  $\gamma_{12}$ . Ze względu na przesunięcia węzłów rama posiada pięć stopni swobody (por. rys. 1b). Jako nieznanne przesunięcia można przyjąć w kierunku osi  $x$  —  $x_8$  i  $x_{10}$  oraz w kierunku osi  $y$  —  $y_8, y_9$  i  $y_{10}$ .



Rys. 1

Powyżej przyjęto oznaczenia:  $\alpha_i$  jest kątem obrotu węzła  $i$  względem osi  $x$ ,  $\beta_i$  kątem obrotu względem osi  $y$  oraz  $\gamma_i$  kątem obrotu względem osi  $z$ . Jako dodatni obrót przyjmujemy taki, który nastąpi zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy

będziemy patrzeć przeciwnie do dodatniego zwrotu odpowiedniej osi. Za dodatnie przesunięcie przyjmiemy takie, które nastąpiło zgodnie z rosnącym zwrotem odpowiedniej osi.

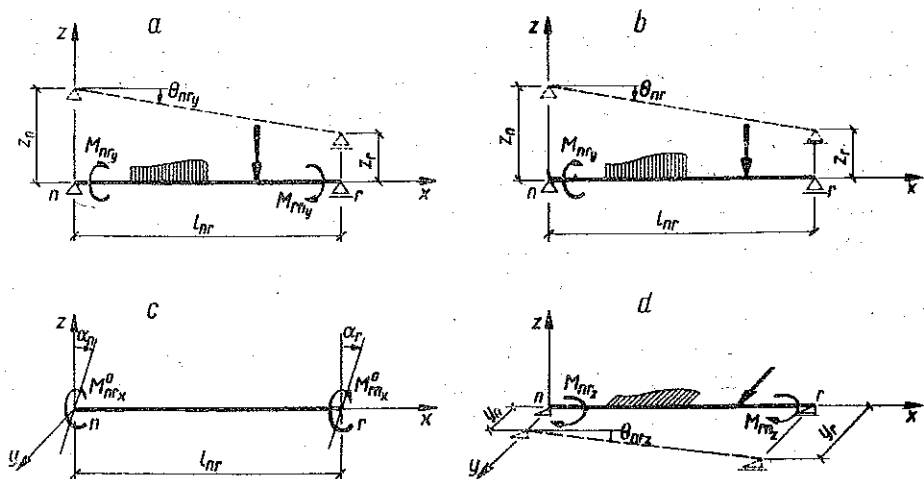
W rozważanej ramie mamy do wyznaczenia 18 kątów obrotu węzłów (z pominięciem kątów obrotu węzłów podporowych) oraz 5 składowych przesunięć. Z każdym kątem obrotu węzła można związać warunek równowagi tego węzła względem odpowiedniej osi, a przesunięcie z warunkiem równowagi odpowiedniego pręta po linii danego przesunięcia. Na przykład kąt obrotu węzła 8 względem osi  $y$  jest ujęty zależnością typu (a)

$$\sum M_{8y} = M_{82y} + M_{87y} + M_{811y}^0 + M_{89y} = 0,$$

a możliwość przesuwu węzła 10 wzdłuż osi  $x$  warunkiem równowagi pręta 10—11—12 typu (b),

$$\sum_i X_{10,11,12} = 0.$$

Zależność pomiędzy wartością momentów w węzłach ograniczających pręt a odkształceniami końców pręta oraz bezpośrednim obciążeniem działającym na pręt przyzmatyczny ujęta jest zależnościami przedstawionymi niżej. Rozpatrzmy pręt o osi równoległej do osi  $x$  (rys. 2).



Rys. 2

Biorąc pod uwagę zginanie względem osi  $y$  znajdziemy

$$(1.1) \quad \begin{cases} M_{nry} = \frac{2EJ_{nry}}{l_{nr}} (2\beta_n + \beta_r - 3\theta_{nry}) - \frac{2EJ_{nry}}{l_{nr}} (2\beta_{nry}^0 + \beta_{rny}^0), \\ M_{rny} = \frac{2EJ_{nry}}{l_{nr}} (2\beta_r + \beta_n - 3\theta_{nry}) - \frac{2EJ_{nry}}{l_{nr}} (2\beta_{rny}^0 + \beta_{nry}^0), \end{cases}$$

gdzie  $EJ_{nry}$  oznacza sztywność pręta  $n-r$  przy zginaniu względem osi  $y$ ,  $\beta_{nry}^0$  kąt obrotu końca pręta  $n$  względem osi  $y$  od obciążenia bezpośrednio zaczepionego.

do pręta przy pominięciu utwierdzenia pręta w węzłach (podobnie jak dla pręta statycznie wyznaczalnego opartego przegubowo na końcach). Kąt obrotu<sup>1</sup> spowodowany nierównomiernym przesunięciem podpór wynosi

$$(1.2) \quad \theta_{nr} = \frac{z_n - z_r}{l_{nr}}.$$

Przy jednostronnym utwierdzeniu sprężystym (rys. 2b) pierwszy wzór równania (1.1) przyjmie postać

$$(1.3) \quad M_{nry} = \frac{2EJ_{nry}}{l_{nr}}(1,5\beta_n - 1,5\theta_{nry}) - \frac{2EJ_{nry}}{l_{nr}}1,5\beta_{nry}^0.$$

Uwzględniając zginanie względem osi  $z$  (rys. 2d) znajdziemy

$$(1.4) \quad \begin{cases} M_{nrz} = \frac{2EJ_{nrz}}{l_{nr}}(2\gamma_n + \gamma_r - 3\theta_{nrz}) - \frac{2EJ_{nrz}}{l_{nr}}(2\gamma_{nrz}^0 + \gamma_{rnz}^0), \\ M_{rnz} = \frac{2EJ_{rnz}}{l_{nr}}(2\gamma_r + \gamma_n - 3\theta_{nrz}) - \frac{2EJ_{rnz}}{l_{nr}}(2\gamma_{rnz}^0 + \gamma_{nrz}^0). \end{cases}$$

Skrećanie względem osi  $x$  spowodowane utwierdzeniem w węzłach  $n$  i  $r$  (rys. 2c) daje wzór

$$(1.5) \quad M_{nrx}^0 = \frac{\varkappa GJ_{nrx}^0}{l_{nr}}(\alpha_n - \alpha_r) = -M_{rnz}^0,$$

gdzie  $\varkappa GJ_{nrx}^0$  oznacza sztywność pręta  $n-r$  przy skrećaniu.

Wstawiając funkcje (1.1)-(1.5) do równań równowagi węzłów typu (a), oraz równań równowagi prętów typu (b), otrzymamy układ równań liniowych, którego rozwiązanie da nam szukane składowe kąty obrotu oraz przesunięć węzłów.

## 2. Elektryczne schematy pręta zginanego i skrećanego

Schemat pręta zginanego przyjmiemy według PUCHOWA, ILEŃKO i CZEGOLINA, [1], (rys. 3a). Łatwo sprawdzić, że natężenie prądu w węźle  $n$  spełnia pierwsze równanie (1.1), natężenie prądu w węźle  $r$  drugie równanie (1.1), jeżeli

$$(2.1) \quad r_{nr} = \frac{l_{nr}}{6EJ_{nr}},$$

gdzie  $r_{nr}$  oznacza wartość oporu wstawionego do schematu sieci. Jako czynne siły elektromotoryczne przyjmować będziemy wartości kątów  $\varphi_{nr}^0$  i  $\varphi_{rn}^0$  oraz  $\theta_{nr}$ . Pierwsze dwie wielkości oznaczają kąty obrotu końców pręta obliczone podobnie jak dla belki statycznie wyznaczalnej i znajdziemy je według znanych wzorów; trzecia natomiast wielkość określona jest, gdy znane są wartości przesunięć końców pręta. Ponieważ w ogólnym przypadku w ramach o węzłach przesuwanych nie są znane

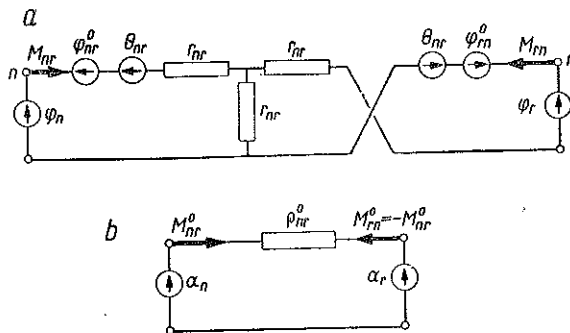
<sup>1</sup> W ramach przestrzennych przyjmiemy dla prostszego oznaczenia znaków wyrazów wolnych kąty obrotu  $\beta_{nry}^0$  i  $\beta_{rny}^0$  za dodatnie, jeśli obrót nastąpi zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy będziemy patrzeć w kierunku przeciwnym do zwrotu odpowiedniej osi.

uprzednio kąty  $\theta$ , dlatego też zastosujemy niżej sposób dwuetapowy rozwiązania ramownicy, stosowany powszechnie w metodzie Crossa.

Etap pierwszy to rozważenie ramy o węzłach pozbawionych możliwości przesuwu; etap drugi obejmuje obliczenia momentów węzłowych oraz reakcji dodatkowo założonych podpór uniemożliwiających przesuw węzłów od kolejno zakładanego przesuwu:

$$(2.2) \quad \Delta = k,$$

gdzie za  $k$  przyjmujemy dowolną wartość np. 1, 10, 100 lub 1000.



Rys. 3

Ponieważ reakcje nie istniejących w rzeczywistości podpór powinny być równe zero, otrzymujemy równanie

$$(2.3) \quad \bar{R}_k + \sum_1^n R_k^{Ai} X_i = 0,$$

gdzie  $\bar{R}_k$  oznacza reakcję podpory  $k$  obliczonej z pierwszego etapu,  $R_k^{Ai}$  reakcję podpory  $k$  obliczonej z fazy  $i$  drugiego etapu od obranego przesunięcia  $\Delta_i$  oraz  $X_i$  niewiadomy stosunek rzeczywistego przesunięcia  $\Delta_i$  do przyjętego

$$(2.4) \quad \Delta_i = kX_i.$$

Możemy ułożyć tyle równań (2.3), ile jest stopni swobody ramownicy (nieznanych składowych przesunięć węzłów).

Rozwiązując układ równań (2.3) np. na drodze rachunkowej obliczamy nieznane wartości  $X_i$ , na podstawie których bez trudu znajdujemy rzeczywiste przesunięcia (2.4).

W ramach przestrzennych wystąpi w ogólnym przypadku oprócz zginania również skręcanie prętów. Elektryczny schemat pręta skręcanego względem osi  $x$  podany został na rys. 3b. Wartość oporu wstawionego w obwód znajdziemy z warunku sztywności pręta na skręcanie  $\kappa GJ_{nr}^0$  oraz jego długości

$$(2.5) \quad \alpha_{nr}^0 = \frac{l_{nr}}{\kappa GJ_{nr}^0}.$$

Różne sposoby oparcia końców pręta omówione zostały w pracy [3], obecnie nadmienimy tylko, że warunek całkowitego utwierdzenia pręta w węźle odpowiada zwarciu odpowiednich końców sieci ( $\varphi = 0$ ) oraz warunek oparcia przegubowego ich rozwarciu ( $M = 0$ ).

### 3. Elektryczne układy analogowe ramownicy przestrzennej

Układając równania równowagi dla poszczególnych węzłów ramy prostokątnej względem kolejnych osi  $x, y, z$  łatwo przekonać się, że otrzymamy trzy grupy równań.

W pierwszej wystąpią tylko kąty  $\alpha$ , w drugiej  $\beta$  oraz w trzeciej  $\gamma$ . Nieznane przesunięcia  $x$  i  $y$  lub  $z$  wystąpią natomiast we wszystkich tych grupach. Są one tymi łącznikami, które zespalają układ równań i uzależniają obrót względem jednej osi od obrotu względem dwóch pozostałych. Wystarczy jednak pozbawić węzły możliwości przesuwu,

$$x_i = y_i = z_i = 0,$$

aby otrzymać trzy oddzielne układy równań. Przy tych warunkach jest oczywiste, że prostokątną ramownicę przestrzenną o węzłach nieprzesuwnych przedstawić można przez trzy oddzielne układy analogowe, w których pierwszy będzie dotyczył momentów węzłowych i kątów obrotu tylko względem osi  $x$ , drugi względem osi  $y$ , a trzeci względem osi  $z$ .

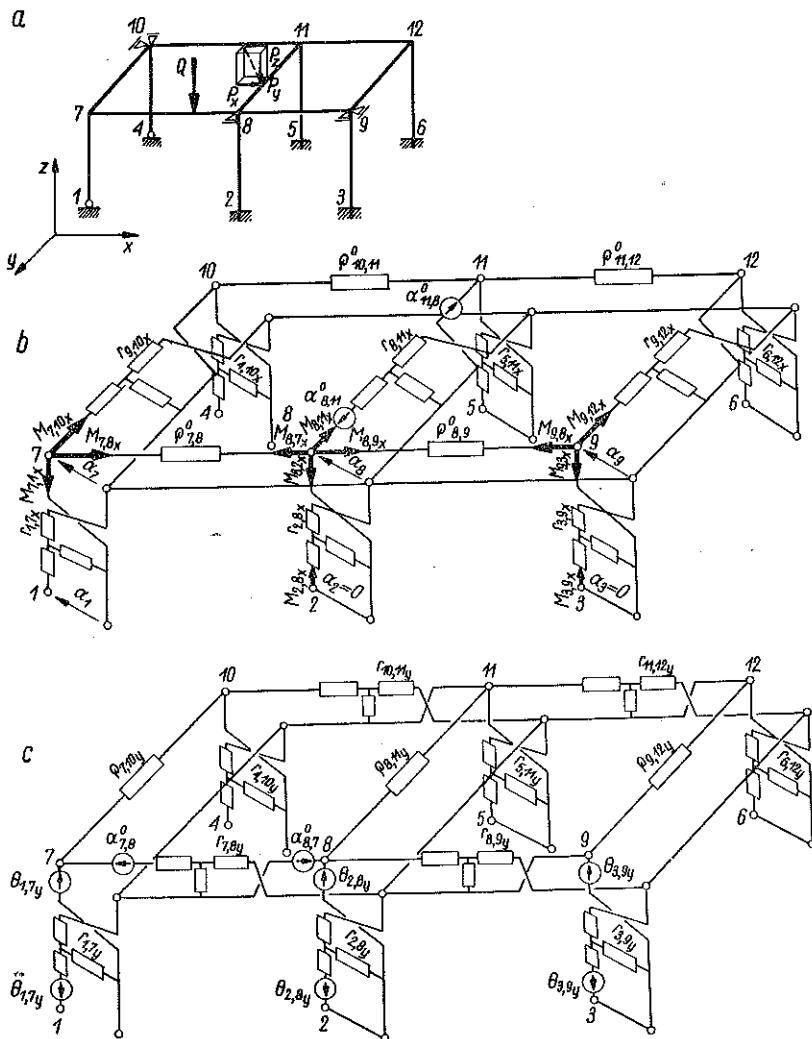
Przykładowo podajemy rozważaną już ramownicę przy pozbawieniu możliwości przesuwu węzłów na rys. 4a. Elektryczny układ analogowy względem osi  $x$  podano na rys. 4b oraz względem osi  $y$  na rys. 4c. W pierwszym przypadku jako wyrazy wolne występują kąty obrotu  $\alpha_{8,11}^0$  oraz  $\alpha_{11,8}^0$ , które zależą od zginania pręta 8—11 względem osi  $x$ , oraz od składowej siły  $P_z$  obciążającej pręt.

W przypadku rozważania obrotu względem osi  $y$  wyrazy wolne wystąpią tylko w równaniu napisanym dla pręta 7—8, w którym działa siła  $Q$ . Pomiar odpowiednich napięć i prądów da nam wartości momentów węzłowych oraz kątów obrotu węzłów. W analogiczny sposób można rozważyć obrót węzłów względem osi  $z$ .

Korzystając z elektrycznego schematu pręta  $n-r$  podanego na rys. 3 należy pamiętać, że zwroty elektromotorycznych sił włączanych do obwodu zostały ustalone przy założeniu, że węzeł  $n$  znajduje się z lewej, a węzeł  $r$  z prawej strony pręta. W prętach poziomych (ryglach) przyjmiemy zasadę, że węzeł  $n$  pręta  $n-r$  będzie po lewej stronie tego pręta, gdy patrzeć będziemy przeciwnie do zwrotu odpowiedniej osi. W słupach przyjmiemy, że węzeł  $n$  pręta  $n-r$  będzie dotyczył niższego końca pręta. Będzie to odpowiadać umowie stosowanej w ramach płaskich, według której spód słupa (oznaczony np. za pomocą kreskowania) znajduje się z prawej strony pręta.

Schematy układów analogowych podano na rys. 4b i 4c w rzucie aksonometrycznym. Można oczywiście układy te przedstawić na płaszczyźnie z uwzględnieniem znakowania omówionego wyżej.

Omówimy obecnie zagadnienie przesunięcia węzłów. Schemat omówiony wyżej (ramownicy o węzłach nieprzesuwnych) przyjmiemy za etap pierwszy. Etap drugi rozłożymy na tyle faz, ile będziemy mieli nieznanymi składowymi przesunięciami. Rozważmy przykładowo przesuw węzła 8 w kierunku osi x. Na rys. 5a podano widok ramy przy danym przesuwie  $\Delta_{8,x} = 100$ , gdy pozostałe składowe przesunięcia są równe



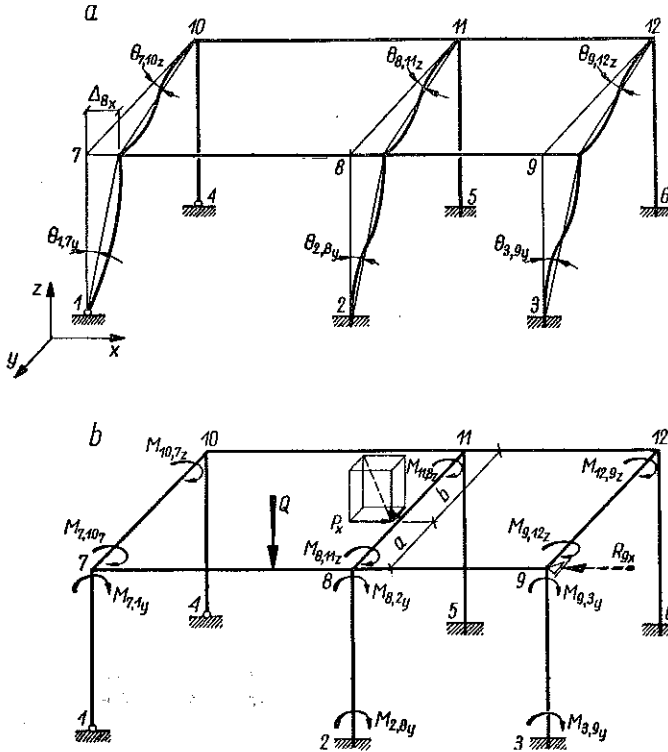
Rys. 4

zeru. Wynikiem tego przesunięcia jest powstanie kątów  $\theta$  w słupach przednich względem osi  $y$  oraz w ryglach prostopadłych do płaszczyzny rysunku względem osi  $z$ . Wpływ danego przesunięcia na wartości momentów węzłowych oraz na kąty obrotu węzłów rozważyć możemy oddzielnie względem osi  $y$  oraz oddzielnie wzglę-



dem osi z. Przykładowo podano włączenie sił elektromotorycznych w układzie analogowym dotyczącym obrotu względem osi y na rys. 4c. Wartości te są odpowiednio równe (przy  $\Delta_{8x} = 100$ )

$$\theta_{1,7y} = \frac{100}{l_{1,7}}, \quad \theta_{2,8y} = \frac{100}{l_{2,8}}, \quad \theta_{3,9y} = \frac{100}{l_{3,9}}.$$



Rys. 5

W analogiczny sposób rozważać można wpływ obranych składowych przesunięć  $\Delta_i$  na momenty węzłowe ramownicy.

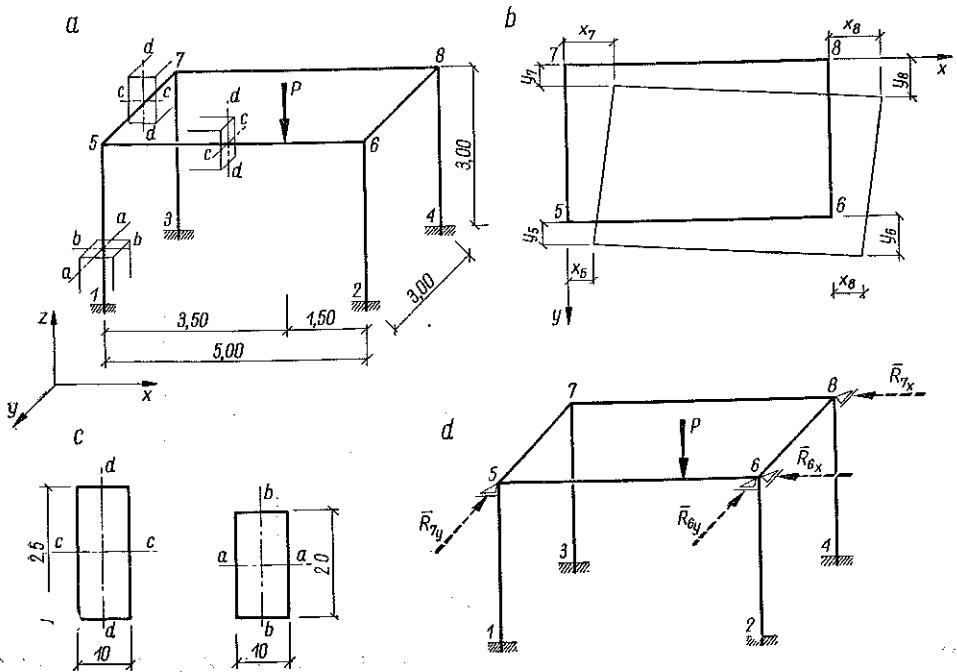
Wartości rzeczywistych przesunięć węzłów znajdziemy z rozwiązania układu równań (2.3). Przykładowo obliczymy rzut reakcji fikcyjnej podpory w węźle 9 na kierunek osi x (oznaczenia momentów i sił podano na rys. 5b)

$$R_{9x} = \frac{M_{7,1y}}{l_{1,7}} + \frac{M_{2,8y} + M_{8,2y}}{l_{2,8}} + \frac{M_{3,9y} + M_{9,3y}}{l_{3,9}} - \frac{M_{7,10z} + M_{10,7z} + M_{8,11z} + M_{11,8z} + M_{9,12z} + M_{12,9z}}{l_{7,10}} + \frac{P_x b}{l_{8,11}} = 0.$$

Pierwsze trzy wyrazy zależą od momentów węzłowych w słupach, następny od momentów węzłowych rygli, a ostatni jest wyrazem niezależnym od obciążenia bezpośrednio działającego na pręt 8—11. W ogólnym przypadku każdy moment węzłowy może być związany z etapem pierwszym i wszystkimi fazami etapu drugiego. Jako przykład podamy obliczenie ramownicy jednokomorowej.

#### 4. Przykład rami jednokomorowej

Obliczymy ramownicę symetryczną przestrzenną przedstawioną na rys. 6, obciążoną siłą pionową na ryglu<sup>2</sup>. Przedstawiona ramownica posiada cztery stopnie swobody. Aby uniemożliwić przesuw węzłów, wystarczy dać dwie podpory prze-



Rys. 6

gubowe w płaszczyźnie  $xy$  w dwóch przeciwnych węzłach np. 6 i 7. Składowe przesunięć podano na rys. 6b, przy czym jako niewiadome przyjęto  $x_6, y_6, x_7, i y_7$ . Pozostałe przesunięcia obliczymy z zależności (przy założeniu małych odkształceń w stosunku do wymiarów ramownicy)

$$(4.1) \quad x_8 = x_7, \quad x_5 = x_6, \quad y_8 = y_6, \quad y_5 = y_6.$$

<sup>2</sup> Rozważono przykład z książki autora [4], s. 12 i dalsze.

Wymiary podano na rys. 6a w metrach, a przekroje poprzeczne prętów na rys. 6c w centymetrach. Zgodnie z rys. 6c sztywności prętów (przy  $\nu = 0,3$ ) wynoszą odpowiednio:

$$(4.2) \text{ dla słupów } EJ_a = \frac{10 \cdot 20^3}{12} E = 6666,7E, \quad EJ_b = 1666,7E, \quad \kappa GJ_0 = 17,61,6E,$$

$$\text{dla rygli } EJ_c = 13021E, \quad EJ_d = 20833E, \quad \kappa GJ_0 = 2394,3E.$$

4.1. Równania równowagi węzłów. Napiszmy równania równowagi węzłów kolejno względem osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  zgodnie ze schematami podanymi na rysunkach 7a, 7b i 7c.

Wielkości wstępne zgodnie ze wzorami (2.1) i (2.5) uwzględniając (4.2) są następujące:

$$r_{2,6x} = \frac{300}{6 \cdot 1666,7E} = 0,030 \frac{1}{E}, \quad r_{6,8x} = 0,00384 \frac{1}{E},$$

$$\varrho_{5,6x} = \frac{500}{2394,3E} = 0,209 \frac{1}{E}, \quad \theta_{2,6x} = \frac{-y_6}{300} = -0,00333y_6,$$

$$\theta_{1,5x} = \frac{-y_7}{300} = -0,00333y_7.$$

Z warunku symetrii ramy znajdujemy

$$r_{2,6x} = r_{1,5x} = r_{3,7x} = r_{4,8x}, \quad r_{5,7x} = r_{6,8x}, \quad \varrho_{5,6x} = \varrho_{7,8x},$$

$$\theta_{2,6x} = \theta_{4,8x}, \quad \theta_{1,5x} = \theta_{3,7x}.$$

Warunek równowagi węzła 6 (por. schemat podany na rys. 7a) daje

$$(4.3) \quad \sum M_{6x} = M_{6,2x} + M_{6,8x} + M_{6,5x} = 0.$$

Uwzględniając rozplyw prądów w sieci od sił elektromotorycznych  $\alpha$  i  $\theta$  otrzymamy dla węzła 6:

$$M_{6,2x} = \frac{\alpha_6}{r_{2,6x} + \frac{1}{2}r_{2,6x}} - \frac{\theta_{2,6x}}{r_{2,6x} + \frac{1}{2}r_{2,6x}} - \frac{\theta_{2,6x}}{2\left(r_{2,6x} + \frac{1}{2}r_{2,6x}\right)},$$

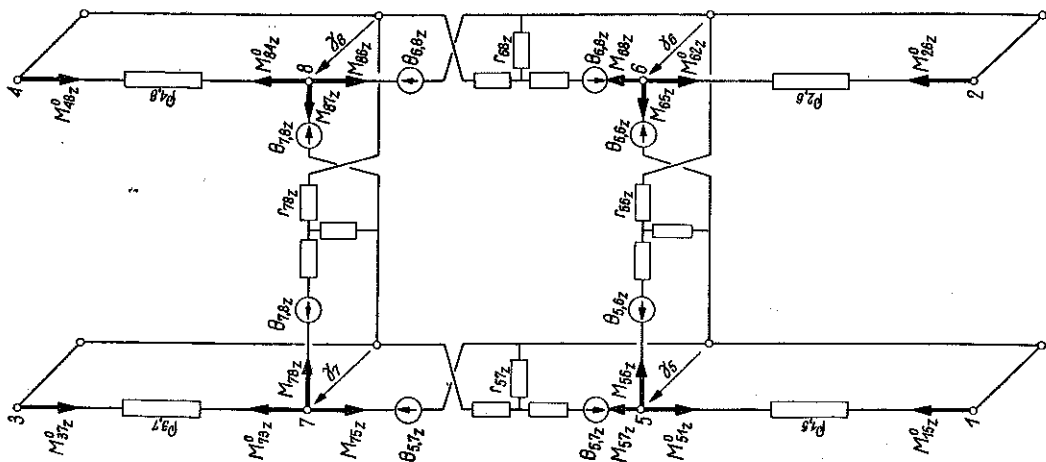
$$M_{6,5x} = \frac{\alpha_6}{\varrho_{5,6x}} - \frac{\alpha_5}{\varrho_{5,6x}}, \quad M_{6,8x} = \frac{\alpha_6}{1,5r_{6,8x}} + \frac{\alpha_8}{2 \cdot 1,5r_{6,8x}}.$$

Wstawiając te wartości do (4.3) mamy

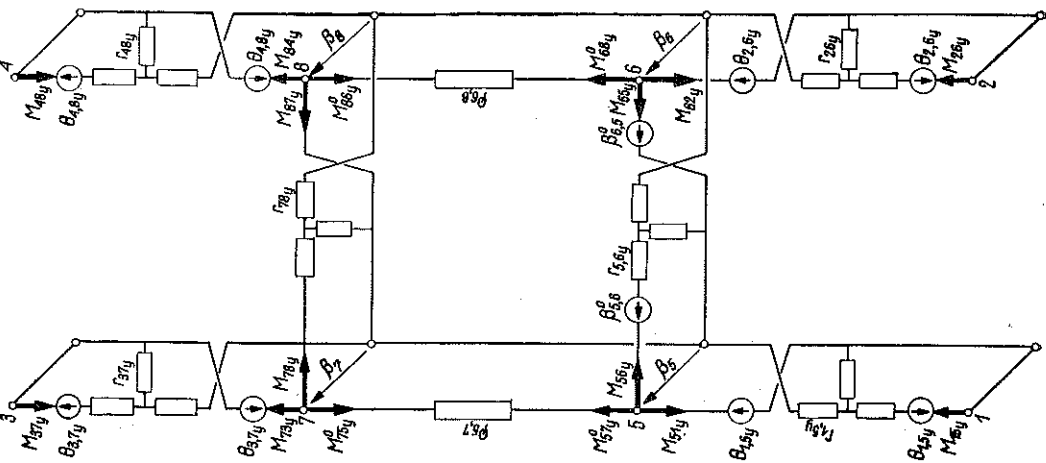
$$\sum M_{6x} = \left( \frac{\alpha_6}{1,5 \cdot 0,030 \frac{1}{E}} - \frac{-0,00333y_6}{0,030 \frac{1}{E}} \right) +$$

$$+ \left( \frac{\alpha_6}{1,5 \cdot 0,00384 \frac{1}{E}} + \frac{\alpha_8}{3 \cdot 0,00384 \frac{1}{E}} \right) + \frac{\alpha_6 - \alpha_5}{0,209 \frac{1}{E}} = 0.$$

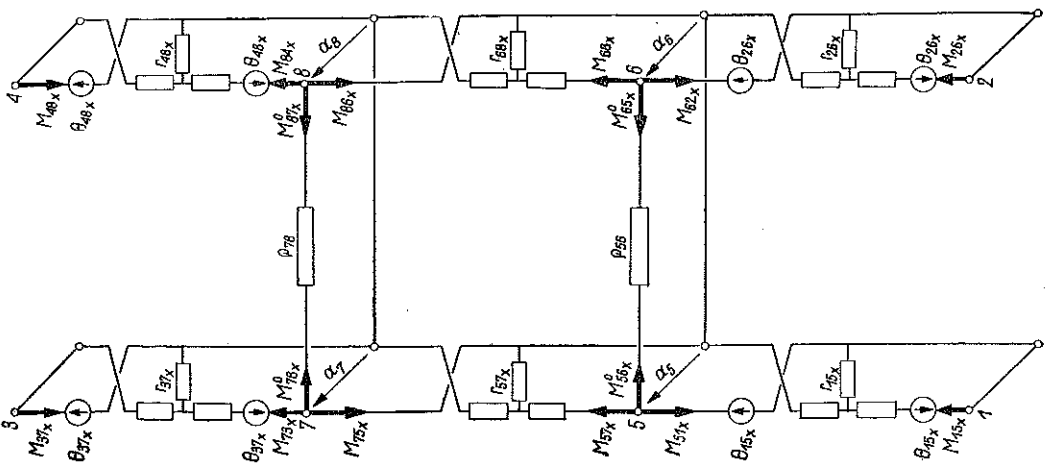
a



b



c



Po uproszczeniu otrzymamy pierwsze równanie

$$200,7\alpha_6 + 86,8\alpha_8 - 4,8\alpha_5 + 0,111y_6 = 0.$$

Na podstawie symetrii układu dalsze równania dla węzłów 8, 5 i 7 możemy napisać przez analogię:

$$(4.4) \quad \begin{cases} 200,7\alpha_8 + 86,8\alpha_6 - 4,8\alpha_7 + 0,111y_6 = 0, \\ 200,7\alpha_5 + 86,8\alpha_7 - 4,8\alpha_6 + 0,111y_7 = 0, \\ 200,7\alpha_7 + 86,8\alpha_5 - 4,8\alpha_8 + 0,111y_7 = 0. \end{cases}$$

Napišemy równanie momentów względem osi  $y$ . Wielkości wstępne są następujące:

$$r_{1,5y} = \frac{300}{6 \cdot 6666,7 \cdot E} = 0,0075 \frac{1}{E}, \quad r_{5,6y} = \frac{500}{6 \cdot 13021 \cdot E} = 0,0064 \frac{1}{E},$$

$$e_{5,7y} = \frac{300}{2394,3} = 0,1253 \frac{1}{E}, \quad \theta_{1,5y} = \frac{x_5}{300} = 0,00333 x_5.$$

Wyrazy wolne (według tablic podanych w [4], s. 154)  $a/1 = 350/500 = 0,70$ :

$$\beta_{5,6}^0 = \frac{P \cdot 500^2}{6E \cdot 13021} \cdot 0,273 = 0,873 \frac{P}{E}, \quad \beta_{6,5}^0 = \frac{-P \cdot 500^2}{6E \cdot 13021} \cdot 0,357 = -1,142 \frac{P}{E}.$$

Warunek równowagi węzła 5 (por. schemat podany na rys. 7b):

$$\begin{aligned} \sum M_{5y} = M_{5,1y} + M_{5,6y} + M_{5,7y}^0 = & \left( \frac{\beta_5}{1,5 \cdot 0,0075 \frac{1}{E}} - \frac{0,00333 x_5}{0,0075 \frac{1}{E}} \right) + \\ & + \left[ \frac{\beta_5}{1,5 \cdot 0,0064 \frac{1}{E}} + \frac{\beta_6}{3 \cdot 0,0064 \frac{1}{E}} - \frac{1}{3 \cdot 0,0064 \frac{1}{E}} \left( 2 \cdot 0,873 \frac{P}{E} - 1,142 \frac{P}{E} \right) \right] + \\ & + \frac{\beta_5 - \beta_7}{0,1253 \frac{1}{E}} = 0. \end{aligned}$$

Po uproszczeniach otrzymamy

$$201,1\beta_5 + 52,1\beta_6 - 8,0\beta_7 - 0,444x_6 - 31,5 \frac{P}{E} = 0.$$

Dla pozostałych węzłów 6, 7 i 8 odpowiednio otrzymamy równania

$$(4.5) \quad \begin{cases} 201,1\beta_6 + 52,1\beta_5 - 8,0\beta_8 - 0,444x_6 + 73,5 \frac{P}{E} = 0, \\ 201,1\beta_7 + 52,1\beta_8 - 8,0\beta_5 - 0,444x_7 = 0, \\ 201,1\beta_8 + 52,1\beta_7 - 8,0\beta_6 - 0,444x_7 = 0. \end{cases}$$

Równania momentów względem osi  $z$ :

Wielkości wstępne

$$r_{5,6z} = \frac{500}{6 \cdot 2083,3E} = 0,040 \frac{1}{E}, \quad r_{6,7z} = \frac{300}{6 \cdot 2083,3E} = 0,024 \frac{1}{E},$$

$$q_{1,5x} = \frac{300}{1761,6E} = 0,1702 \frac{1}{E},$$

$$\theta_{5,6z} = \frac{y_6 - y_7}{500} = 0,002(y_6 - y_7), \quad \theta_{5,7z} = \frac{x_7 - x_6}{300} = 0,00333(x_7 - x_6).$$

Warunek równowagi węzła 5 (por. schemat podany na rys. 7c):

$$\begin{aligned} \sum M_{5z} &= M_{5,1z} + M_{5,6z} + M_{5,7z} = \\ &= \frac{\gamma_5}{0,1702 \frac{1}{E}} + \left[ \frac{\gamma_5}{1,5 \cdot 0,040 \frac{1}{E}} + \frac{\gamma_6}{3 \cdot 0,040 \frac{1}{E}} - \frac{0,002(y_6 - y_7)}{0,040 \frac{1}{E}} \right] + \\ &+ \left[ \frac{\gamma_5}{1,5 \cdot 0,024 \frac{1}{E}} + \frac{\gamma_7}{3 \cdot 0,024 \frac{1}{E}} - \frac{0,00333(x_7 - x_6)}{0,024 \frac{1}{E}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Po uproszczeniach otrzymamy

$$50,33\gamma_5 + 13,80\gamma_7 + 8,33\gamma_6 + 0,050(y_7 - y_6) + 0,139(x_6 - x_7) = 0.$$

Dla pozostałych węzłów otrzymamy równania następujące:

$$(4.6) \quad \begin{cases} 50,33\gamma_6 + 13,80\gamma_8 + 8,33\gamma_5 + 0,050(y_7 - y_6) + 0,139(x_6 - x_7) = 0, \\ 50,33\gamma_7 + 13,80\gamma_5 + 8,33\gamma_8 + 0,050(y_7 - y_6) + 0,139(x_6 - x_7) = 0, \\ 50,33\gamma_8 + 13,80\gamma_6 + 8,33\gamma_7 + 0,050(y_7 - y_6) + 0,139(x_6 - x_7) = 0. \end{cases}$$

**4.2. Etap pierwszy.** Biorąc pod uwagę ramę o węzłach nieprzesuwnych zauważymy, że wszystkie kąty związane z przesuwnem węzłów są równe zeru,  $\theta_i = 0$ . Czynne siły elektromotoryczne (przy obciążeniu rygła 5—6 siłą pionową  $P$ ) wystąpią tylko w schemacie podanym na rys. 7b (obrót węzłów względem osi  $y$ ). Odpowiadają im kąty  $\beta_{5,6}^0$  oraz  $\beta_{6,5}^0$ .

Pozostałe dwa schematy (rys. 7a i 7c) będą bez obciążenia, czyli  $M_{ikx} = 0$ ,  $M_{ikz} = 0$ .

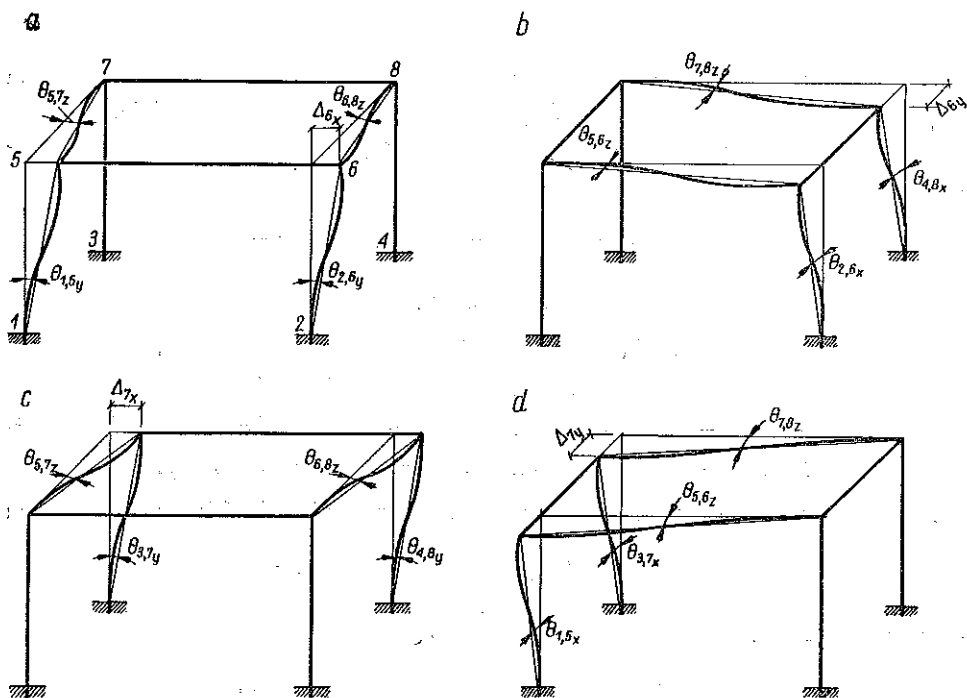
Z rozdziału prądów w schemacie podanym na rys. 7b otrzymamy wartości momentów węzłowych względem osi  $y$  pierwszego etapu [z rozwiązania równań (4.5) przy  $x_6 = x_7 = 0$ ]:

$$(4.7) \quad \begin{cases} M_{5,1y} = 24,038P, & M_{6,2y} = -38,801P, & M_{78y} = 0,577P, & M_{87y} = -1,395P, \\ M_{5,6y} = -26,066P, & M_{65y} = 42,113P, & M_{73y} = 1,451P, & M_{84y} = -1,916P, \\ M_{5,7y}^0 = 2,028P, & M_{68y}^0 = -3,312P, & M_{75y}^0 = -2,028P, & M_{86y}^0 = 3,312P, \\ M_{15y} = 12,019P, & M_{26y} = -19,400P, & M_{37y} = 0,725P, & M_{48y} = -0,958P. \end{cases}$$

Reakcje podpór 7 i 6 (rys. 6d) wynoszą odpowiednio

$$(4.8) \left\{ \begin{aligned} \bar{R}_{7x} &= \frac{M_{37y} + M_{73y}}{l_{37}} + \frac{M_{48y} + M_{84y}}{l_{48}} = \frac{0,725 + 1,451}{300} + \frac{-0,958 - 1,916}{300} = \\ &= -0,0023P, \\ \bar{R}_{6x} &= \frac{M_{15y} + M_{51y}}{l_{15}} + \frac{M_{26y} + M_{62y}}{l_{26}} = -0,0738P, \\ R_{6y} &= 0, \quad R_{7y} = 0. \end{aligned} \right.$$

4.3. Etap drugi. Etap drugi ze względu na cztery składowe przesunięć  $x_6$ ,  $y_6$ ,  $x_7$  i  $y_7$  podzielimy na cztery fazy. Faza pierwsza, przesuń  $\Delta_{6x} = 100$ . Rodzaj odkształcenia podano na rys. 8a. Z przesunięciem  $\Delta_{6x}$  związane są odpowiednie kąty  $\theta$ . Zależności te rozpatrzmy oddzielnie.



Rys. 8

Momenty węzłowe względem osi  $y$  pojawiające się wskutek zaczeplenia sił elektromotorycznych

$$\theta_{1,5y} = \frac{\Delta_{6x}}{l_{15}} = \frac{100}{300} = 0,3333, \quad \theta_{26y} = 0,3333$$

znajdziemy ze schematu podanego na rys. 7b

$$\begin{aligned} M_{51y} &= -28,821E = M_{62y}, & M_{73y} &= 0,492E = M_{84y}, \\ M_{56y} &= 27,463E = M_{65y}, & M_{78y} &= 0,866E = M_{87y}, \\ M_{57y}^0 &= 1,358E = M_{68y}^0, & M_{75y}^0 &= -1,358E = M_{86y}^0, \\ M_{15y} &= -36,633E = M_{26y}, & M_{37y} &= 0,246E = M_{48y}. \end{aligned}$$

Momenty węzłowe względem osi z pojawiające się wskutek działania sił elektromotorycznych

$$\theta_{5,7z} = \frac{\Delta_{6x}}{l_{57}} = 0,3333, \quad \theta_{68z} = 0,3333$$

znajdziemy ze schematu podanego na rys. 7c:

$$\begin{aligned} M_{51z} &= -1,124E = M_{62z} = M_{72z} = M_{84z}, \\ M_{56z} &= -4,787E = M_{65z} = M_{76z} = M_{87z}, \\ M_{15z} &= 1,124E = M_{26z} = M_{37z} = M_{48z}, \\ M_{57z} &= 5,911E = M_{75z} = M_{68z} = M_{86z}. \end{aligned}$$

Faza druga, przesuw  $\Delta_{6y} = 100$ . Z przesunięciem  $\Delta_{6y}$  (por. rys. 8b) związane są odpowiednie kąty  $\theta$ . Wpływ ten jak poprzednio rozpatrzmy oddzielnie.

Momenty węzłowe względem osi x pojawiające się wskutek włączenia sił elektromotorycznych

$$\theta_{26x} = -\frac{\Delta_{6y}}{l_{26}} = -\frac{100}{300} = -0,3333, \quad \theta_{48x} = -0,3333$$

znajdziemy ze schematu podanego na rys. 7a:

$$\begin{aligned} M_{51x} &= -0,014E = M_{73x}, & M_{62x} &= 10,252E = M_{84x}, \\ M_{56x}^0 &= 0,182E = M_{78x}^0, & M_{65x}^0 &= -0,182E = M_{87x}^0, \\ M_{57x} &= -0,168E = M_{75x}, & M_{68x} &= -10,070E = M_{86x}, \\ M_{15x} &= -0,007E = M_{37x}, & M_{26x} &= 10,681E = M_{48x}. \end{aligned}$$

Momenty węzłowe względem osi z wskutek działania sił elektromotorycznych

$$\theta_{56z} = \frac{\Delta_{6y}}{l_{56}} = \frac{100}{500} = 0,2000, \quad \theta_{78z} = 0,2000$$

znajdziemy ze schematu podanego na rys. 7c:

$$\begin{aligned} M_{51z} &= 0,405E = M_{62z} = M_{72z} = M_{84z}, \\ M_{56z} &= -3,277E = M_{65z} = M_{76z} = M_{87z}, \\ M_{15z} &= -0,405E = M_{26z} = M_{37z} = M_{48z}, \\ M_{57z} &= 2,872E = M_{75z} = M_{68z} = M_{86z}. \end{aligned}$$

Fazę trzecią (przesuw  $\Delta_{7x} = 100$ ) oraz fazę czwartą (przesuw  $\Delta_{7y} = 100$ ) możemy otrzymać ze względu na symetrię ramy na podstawie znalezionej już postępowania dla momentów w fazie pierwszej i drugiej.



Po znalezieniu wartości momentów węzłowych pierwszego etapu oraz kolejnych faz drugiego etapu, należy ułożyć układ równań (2.3), które w rozpatrywanym przypadku ramy (o czterech stopniach swobody) przyjmą postać

$$(4.9) \quad \begin{cases} R_{6x} = R_{6x}^{d_{6x}} X_1 + R_{6x}^{d_{6y}} X_2 + R_{6x}^{d_{7x}} X_3 + R_{6x}^{d_{7y}} X_4 + \bar{R}_{6x} = 0, \\ R_{6y} = R_{6y}^{d_{6x}} X_1 + R_{6y}^{d_{6y}} X_2 + R_{6y}^{d_{7x}} X_3 + R_{6y}^{d_{7y}} X_4 + \bar{R}_{6y} = 0, \\ R_{7x} = R_{7x}^{d_{6x}} X_1 + R_{7x}^{d_{6y}} X_2 + R_{7x}^{d_{7x}} X_3 + R_{7x}^{d_{7y}} X_4 + \bar{R}_{7x} = 0, \\ R_{7y} = R_{7y}^{d_{6x}} X_1 + R_{7y}^{d_{6y}} X_2 + R_{7y}^{d_{7x}} X_3 + R_{7y}^{d_{7y}} X_4 + \bar{R}_{7y} = 0. \end{cases}$$

Wyrazy ostatnie w równaniach oznaczone kreską poziomą oznaczają reakcje wprowadzonych dodatkowo podpór w etapie pierwszym, wyrazy wcześniejsze — składowe reakcji tych podpór kolejnych faz etapu drugiego.

Przykładowo obliczymy reakcje podpór 6 i 7 fazy pierwszej ( $\Delta_{6x} = 100$ ):

$$R_{6x}^{d_{6x}} = \frac{-36,633 - 28,821}{300} \cdot 2 - \frac{5,911 \cdot 4}{300} = -0,5152E,$$

$$R_{6y}^{d_{6x}} = \frac{-4,787}{500} \cdot 4 = 0,0383E,$$

$$R_{7x}^{d_{6x}} = \frac{0,492 + 0,246}{300} \cdot 2 + \frac{5,911 \cdot 4}{300} = 0,0837E,$$

$$R_{7y}^{d_{6x}} = \frac{4,787}{500} \cdot 4 = -0,0383E.$$

Podstawiając wartości szczegółowe do układu (4.8) z uwzględnieniem (4.7) otrzymamy

$$R_{6x} = -0,5152X_1 - 0,0383X_2 + 0,0837X_3 + 0,0383X_4 - 0,0738 \frac{P}{E} = 0,$$

$$R_{6y} = -0,0383X_1 - 0,1658X_2 + 0,0383X_3 + 0,0263X_4 = 0,$$

$$R_{7x} = 0,0837X_1 + 0,0383X_2 - 0,5152X_3 - 0,0383X_4 - 0,0023 \frac{P}{E} = 0,$$

$$R_{7y} = 0,0383X_1 + 0,0263X_2 - 0,0383X_3 - 0,1658X_4 = 0.$$

Rozwiązując układ równań znajdziemy

$$X_1 = -0,1511 \frac{P}{E}, \quad X_2 = 0,0251 \frac{P}{E}, \quad X_3 = -0,0253 \frac{P}{E}, \quad X_4 = -0,0251 \frac{P}{E}.$$

Stąd uwzględniając (2.4) obliczymy rzeczywiste przesuwę węzłów:

$$(4.10) \quad \begin{cases} \Delta_{6x} = 100 X_1 = -15,11 \frac{P}{E}, & \Delta_{7x} = -2,53 \frac{P}{E}, \\ \Delta_{6y} = 100 X_2 = 2,51 \frac{P}{E}, & \Delta_{7y} = -2,51 \frac{P}{E}. \end{cases}$$

Рzeczywiste моменты węzłowe dla рамы podanej na rys. 6a możemy obliczyć na drodze rachunkowej dodając do momentów etapu pierwszego (4.7) odpowiednie wartości składowych momentów kolejnych faz etapu drugiego z uwzględnieniem rzeczywistych przesuńeć (4.10). Możemy też znaleźć całkowite składowe momentów węzłowych względem osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  na podstawie pomiarów prądu włączając do schematów analogowych ramownicy (rys. 7) dodatkowo siły elektromotoryczne, obliczone na podstawie znanych już przesuńeć  $\Delta_1$ .

#### Literatura cytowana w tekście

[1] *Электрическое моделирование стержневых систем*, под ред. К.К. КЕРОПЯНА, Госстроиздат, 1958.

[2] A. LISOWSKI, *Zastosowanie elektrycznych układów analogowych do formowania schematu statycznego konstrukcji*, Inżyn. Budown. (w druku).

[3] A. LISOWSKI, *Analogia równań Coltriego i Guldana*, Rozpr. Inżyn., 2, 9 (1961).

[4] A. LISOWSKI, *Obliczanie ram przestrzennych*, Budown. Archit., 1954.

[5] *Труды первой межвузовской научно-технической конференции по электрическому моделированию задач строительной механики, сопротивления материалов и теории упругости*, Издат. Новочеркасского Политехнического Института, 1960.

#### Резюме

### ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДУЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ К РАССЧЕТУ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАМ

Основываясь на электрической схеме изгибаемого стержня (рис. 3а) и скручиваемого (3б) стержня дается способ расчета прямоугольных пространственных рам. Прямоугольной рамой считаем раму состоящую из прямых призматических стержней, при чем оси стержней и главные оси инерции их поперечных сечений согласны с ортогональной системой осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Расчет рамы состоит в построении, в общем случае, трех моделей, в которых выступают обороты только по отношению оси  $x$ , а затем  $y$  и  $z$ .

В рамах с неподвижными узлами можно рассматривать обороты узлов относительно ортогональной системы осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , совершенно отдельно, так как обороты по отношению только к одной оси не вызывают появления составляющих оборота узлов по отношению к двум остальным. Это вытекает также из формы системы уравнений метода деформаций в применении к прямоугольным пространственным рамам, [4], где система сводится к трем отдельным системам, в которых выступают очередно обороты только по отношению к одной оси.

В случае пространственных рам с подвижными узлами появляются углы  $\theta$ , вытекающие из неодинакового передвижения узлов. В случае, когда эти углы заранее неизвестны (а так бывает обычно) — неизвестны значения электродвижущих сил, которые следует включить в сеть (ср. схему стержня рис. 3а). В таком случае можно применить способ двухэтапного решения рамы. Первый этап состоит в решении рам лишенных возможности передвижения. На втором этапе рассматривается влияние принятых составляющих передвижений. Из условия, что реакция, несуществующей в действительности опоры должна равняться нулю (2.3) получаем систему уравнений (4.9), решение которой дает нам величины действительных передвижений.

Для выяснения электрических моделей рам и способа их применения дается пример однокамерной рамы (рис. 6а). Электрические схемы относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  даются последовательно на рис. 7.

## Summary

### APPLICATION OF ELECTRIC ANALOG LAY-OUTS TO THE COMPUTATION OF RECTANGULAR THREE-DIMENSIONAL FRAMES

On the basis of the electric layout for a bar subject to bending and torsion (Fig. 3a, and 3b) a computation method is given for three-dimensional rectangular frames. A rectangular frame is a frame composed of prismatic bars, of which the axes and the principal axes of their cross-sections are parallel to the axes  $x, y, z$  of a Cartesian reference frame.

The computation of the frame consists in general in the construction of three analogs where rotation proceeds about one of the three axes  $x, y$  and  $z$ .

In frames with fixed nodes the rotation of a node may be considered in relation to the  $x, y, z$  Cartesian system, for each axis separately, the rotation about one axis producing no rotation components about the other two. This can also be seen from the form of the system of equations of the strain method as applied to rectangular three-dimensional frames, [4], where the system of equations is reduced to three separate systems, the rotation occurring about each of the three axes separately.

In the case of movable nodes there appear angles due to uneven displacement of the nodes. If these angles are not known beforehand (and this is usually the case) the electromotive forces to be applied to the network are not known (see the lay-out of Fig. 3a). In such a case we can apply a two-stage method for computing the frame. The first stage consists in solving the problem of the frame with fixed nodes. In the second, the influence of each displacement is accounted for in a successive manner. From the condition that the reaction of a support, non-existent in reality, must be zero (2.3) a system of equations  $i$  is obtained of which the solution gives the real displacements.

To explain the electric analogs of a frame and its application method, a simple frame is considered as an example (Fig. 6a). Fig. 7 shows the electric layouts in relation to the  $x, y, z$  axes.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1961 r.*