

ARTUR KACNER

**ZGINANIE, STATECZNOŚĆ I DRGANIA PRĘTÓW
O ZMIENNYM PRZEKROJU**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCIX**

TOM IX · ZESZYT 3 · ROK 1961

1. Zagadnienie drgań poprzecznych pręta o zmiennym przekroju, spoczywającego na niejednorodnym podłożu sprężystym i ściskanego zmienną siłą osiową, prowadzi do równania różniczkowego

$$(1.1) \quad (By'')'' + (Ny')' + Ky - \mu\omega^2 y = q,$$

gdzie $y(x)$ jest amplitudą drgań, $q(x)$ obciążeniem wymuszającym drgania o częstości kątowej ω , $B = B(x)$ zmienną sztywnością zginania pręta, $N = N(x)$ zmienną siłą osiową, $K = K(x)$ zmiennym współczynnikiem podatności podłoża (typu Winklera) i $\mu = \mu(x)$ zmienną masą pręta.

Po wykonaniu w (1.1) operacji różniczkowania otrzymuje się niejednorodne liniowe równanie różniczkowe czwartego rzędu, w którym przy poszukiwanej funkcji $y(x)$ i czterech jej kolejnych pochodnych występują zmienne współczynniki. Rozwiązanie ściśle tego równania w przypadku ogólnym nie jest znane, rozwiązanie przybliżone zaś można najwygodniej wyznaczyć sprowadzając równanie różniczkowe do liniowego równania całkowego.

W przypadku stałych współczynników B , N , K , μ i przy swobodnym podparciu obu końców pręta duże usługi oddaje przedstawienie funkcji $y(x)$ w postaci szeregu sinusowego

$$(1.2) \quad y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a},$$

gdzie a jest długością pręta.

Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że również przy zmiennych współczynnikach można uzyskać formalnie ściśle rozwiązanie równania (1.1) w postaci (1.2), przy czym w przypadkach zginania, zginania ze ściskaniem i w przypadku drgań wymuszonych współczynniki rozwinięcia (1.2) wyznacza się z nieskończonego układu algebraicznych, liniowych równań niejednorodnych o prostej strukturze; w przypadkach wyboczenia i drgań własnych, do wyznaczania parametru obciążenia krytycznego lub częstości drgań służy odpowiedni nieskończony układ jednorodnych algebraicznych równań liniowych. Okazuje się, że w celu otrzymania zupełnie zadowalającego przybliżenia wystarczy z reguły uwzględnić zaledwie kilka pierwszych współczynników szeregu (1.2), podobnie jak to ma miejsce przy zastosowaniu szeregów Fouriera do rozwiązywania równania (1.1) przy stałych współczynnikach. Rozwiązanie równania (1.1) uzyskuje się nie tylko przy swobodnym podparciu obu końców pręta, lecz także dla szeregu innych kombinacji warunków brzegowych.

2. U podstaw proponowanej metody leżą proste związki dotyczące sumy i różnicy szeregów sinusowych. Niechaj S_m będą współczynnikami rozwinięcia sinusowego funkcji $S(x)$

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m \sin \alpha_m x,$$

$$S_m = \frac{2}{a} \int_0^a S(z) \sin \alpha_m z \, dz, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}.$$

Zbadajmy sumę dwóch szeregów

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r} \sin \alpha_{m+j} x + \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r} \sin \alpha_{m-j} x.$$

Pierwszy z tych szeregów można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r} \sin \alpha_{m+j} x = \sum_{i=j+1}^{\infty} S_{i-j} \alpha_{i-j}^{2r} \sin \alpha_i x,$$

drugi zaś napisać można, jak następuje:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r} \sin \alpha_{m-j} x &= \sum_{i=1-j}^{\infty} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r} \sin \alpha_i x = \sum_{i=1-j}^{i=-1} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r} \sin \alpha_i x + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r} \sin \alpha_i x = - \sum_{i=1}^{i=j-1} S_{j-i} \alpha_{j-i}^{2r} \sin \alpha_i x + \sum_{i=1}^{\infty} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r} \sin \alpha_i x. \end{aligned}$$

Jednakże $\alpha_{j-i}^{2r} = \alpha_{i-j}^{2r}$, a ponadto jest widoczne, że $S_{i-j} = -S_{j-i}$, wobec czego

$$(2.2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r} \sin \alpha_{m-j} x = \sum_{i=1}^{i=j-1} S_{i-j} \alpha_{i-j}^{2r} \sin \alpha_i x + \sum_{i=1}^{\infty} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r} \sin \alpha_i x.$$

Dodając (2.1) i (2.2) stronami otrzymujemy

$$(2.3) \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r} (\sin \alpha_{m+j} x + \sin \alpha_{m-j} x) = \sum_{m=1}^{\infty} (S_{m-j} \alpha_{m-j}^{2r} + S_{m+j} \alpha_{m+j}^{2r}) \sin \alpha_m x.$$

Zajmijmy się teraz różnicą dwóch szeregów

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r-1} \sin \alpha_{m+j} x - \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r-1} \sin \alpha_{m-j} x.$$

Podobnie jak poprzednio zapisujemy

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r-1} \sin \alpha_{m+j} x &= \sum_{i=j+1}^{\infty} S_{i-j} \alpha_{i-j}^{2r-1} \sin \alpha_i x, \\ \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r-1} \sin \alpha_{m-j} x &= - \sum_{i=1}^{i=j-1} S_{j-i} \alpha_{j-i}^{2r-1} \sin \alpha_i x + \sum_{i=1}^{\infty} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r-1} \sin \alpha_i x. \end{aligned} \right.$$

Ponieważ $\alpha_{i-j}^{2r-1} = -\alpha_{i-j}^{2r-1}$ i jak poprzednio $S_{i-j} = -S_{j-i}$, to

$$(2.5) \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r-1} \sin \alpha_{m-j} x = - \sum_{i=1}^{i=j-1} S_{i-j} \alpha_{i-j}^{2r-1} \sin \alpha_i x + \sum_{i=1}^{\infty} S_{i+j} \alpha_{i+j}^{2r-1} \sin \alpha_i x$$

i po odjęciu (2.5) od (2.4) mamy

$$(2.6) \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_m \alpha_m^{2r-1} (\sin \alpha_{m+j} x - \sin \alpha_{m-j} x) = \sum_{m=1}^{\infty} (S_{m-j} \alpha_{m-j}^{2r-1} - S_{m+j} \alpha_{m+j}^{2r-1}) \sin \alpha_m x.$$

Oprócz wzorów (2.3) i (2.6) wyprowadzimy jeszcze jeden, równie prosty wzór pomocniczy, przy pomocy którego nadawać będziemy otrzymywanym układom równań postać kanoniczną, bardziej wygodną w zastosowaniach.

Otóż jeżeli T_j są współczynnikami rozwinięcia kosinusowego funkcji $T(x)$,

$$T(x) = \frac{T_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} T_j \cos \alpha_j x, \quad T_j = \frac{2}{a} \int_0^a T(z) \cos \alpha_j z dz, \quad \alpha_j = \frac{j\pi}{a},$$

a S_m współczynnikami rozwinięcia sinusowego funkcji $S(x)$ i γ_m dowolnymi współczynnikami, to zachodzi równość

$$(2.7) \quad T_0 \gamma_m S_m + \sum_{j=1}^{\infty} T_j (\gamma_{m-j} S_{m-j} + \gamma_{m+j} S_{m+j}) = \sum_{j=1}^{\infty} (T_{m-j} \gamma_j - T_{m+j} \gamma_{-j}) S_j.$$

Istotnie, mamy

$$T_0 \gamma_m S_m + \sum_{j=1}^{\infty} T_j \gamma_{m-j} S_{m-j} = T_0 \gamma_m S_m + \sum_{i=m-1}^{-\infty} T_{m-i} \gamma_i S_i = T_0 \gamma_m S_m + \sum_{i=1}^{i=m-1} T_{m-i} \gamma_i S_i + \sum_{i=-1}^{-\infty} T_{m-i} \gamma_i S_i;$$

$$T_0 \gamma_m S_m + \sum_{j=1}^{\infty} T_j \gamma_{m-j} S_{m-j} = \sum_{i=1}^{i=m} T_{m-i} \gamma_i S_i - \sum_{i=1}^{\infty} T_{m+i} \gamma_{-i} S_i,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_j \gamma_{m+j} S_{m+j} = \sum_{i=m+1}^{\infty} T_{i-m} \gamma_i S_i,$$

a po dodaniu obu ostatnich równości stronami otrzymujemy (2.7), ponieważ $T_{i-m} = T_{m-i}$.

3. Zajmijmy się teraz równaniem różniczkowym (1.1). Przy założeniu swobodnego podparcia obu końców pręta przyjmujemy rozwiązanie (1.1) w postaci (1.2). Funkcje $B(x)$, $N(x)$, $K(x)$ i $\mu(x)$, tj. sztywność zginania pręta, siłę osiową, współczynnik

podatności podłoża i masę pręta na jednostkę długości przedstawiamy w postaci następujących szeregów kosinusowych:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos \alpha_j x, \\ N(x) = \frac{N_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} N_j \cos \alpha_j x, \\ K(x) = \frac{K_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} K_j \cos \alpha_j x, \\ \mu(x) = \frac{\mu_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \cos \alpha_j x. \end{array} \right.$$

Na podstawie (1.2) i (3.1) znajdziemy

$$\begin{aligned} By'' &= \left(\frac{B_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos \alpha_j x \right) \sum_{m=1}^{\infty} (-\alpha_m^2) y_m \sin \alpha_m x = \\ &= -\frac{B_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m \sin \alpha_m x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m (\sin \alpha_{m+j} x + \sin \alpha_{m-j} x), \end{aligned}$$

lub zgodnie z (2.3)

$$By'' = -\frac{B_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m \sin \alpha_m x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{m-j}^2 y_{m-j} + \alpha_{m+j}^2 y_{m+j}) \sin \alpha_m x.$$

Różniczkując ostatnie wyrażenie dwukrotnie otrzymujemy

$$(3.2) \quad (By'')'' = \frac{B_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^4 y_m \sin \alpha_m x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 (\alpha_{m-j}^2 y_{m-j} + \alpha_{m+j}^2 y_{m+j}) \sin \alpha_m x.$$

Następnie według (1.2) i (3.1) mamy

$$\begin{aligned} Ny' &= \left(\frac{N_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} N_j \cos \alpha_j x \right) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m y_m \cos \alpha_m x = \\ &= \frac{N_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m y_m \cos \alpha_m x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m y_m (\cos \alpha_{m+j} x + \cos \alpha_{m-j} x) \end{aligned}$$

i po różniczkowaniu

$$(Ny)' = -\frac{N_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m \sin \alpha_m x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sum_{m=1}^{\infty} y_m (\alpha_m \alpha_{m+j} \sin \alpha_{m+j} x + \\ + \alpha_m \alpha_{m-j} \sin \alpha_{m-j} x) = -\frac{N_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m \sin \alpha_m x - \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sum_{m=1}^{\infty} [y_m \alpha_m^2 (\sin \alpha_{m+j} x + \sin \alpha_{m-j} x) + y_m \alpha_j \alpha_m (\sin \alpha_{m+j} x - \sin \alpha_{m-j} x)],$$

lub na podstawie (2.3) i (2.6)

$$(Ny)' = -\frac{N_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m \sin \alpha_m x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sum_{m=1}^{\infty} [(\alpha_{m-j}^2 y_{m-j} + \alpha_{m+j}^2 y_{m+j}) + \\ + (\alpha_{m-j} \alpha_j y_{m-j} - \alpha_{m+j} \alpha_j y_{m+j})] \sin \alpha_m x,$$

$$(3.3) \quad (Ny)' = -\frac{N_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 y_m \sin \alpha_m x - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (\alpha_{m-j} y_{m-j} + \alpha_{m+j} y_{m+j}) \sin \alpha_m x.$$

Znajdziemy również

$$(K - \omega^2 \mu) y = \left(\frac{K_0}{2} - \omega^2 \frac{\mu_0}{2} \right) \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \alpha_m x + \sum_{j=1}^{\infty} (K_j - \omega^2 \mu_j) \cos \alpha_j x \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \alpha_m x = \\ = \frac{1}{2} (K_0 - \omega^2 \mu_0) \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \alpha_m x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (K_j - \omega^2 \mu_j) \sum_{m=1}^{\infty} y_m (\sin \alpha_{m+j} x + \sin \alpha_{m-j} x)$$

czyli zgodnie z (2.3)

$$(3.4) \quad (K - \omega^2 \mu) y = \frac{1}{2} (K_0 - \omega^2 \mu_0) \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \alpha_m x + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (K_j - \omega^2 \mu_j) \sum_{m=1}^{\infty} (y_{m-j} + y_{m+j}) \sin \alpha_m x.$$

Dodając (3.4), (3.5) i (3.6) stronami i rozwijając równocześnie prawą stronę równania (1.1) w szereg sinusowy,

$$(3.5) \quad q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x,$$

otrzymujemy po przyrównaniu współczynników przy odpowiednich funkcjach x następujący nieskończony układ równań do wyznaczenia współczynników y_m szeregu (1.2):

$$(3.6) \quad (B_0 \alpha_m^4 - N_0 \alpha_m^2 + K_0 - \omega^2 \mu_0) y_m + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} [(B_j \alpha_m^2 \alpha_{m-j}^2 - N_j \alpha_m \alpha_{m-j} + K_j - \omega^2 \mu_j) y_{m-j} + \\ + (B_j \alpha_m^2 \alpha_{m+j}^2 - N_j \alpha_m \alpha_{m+j} + K_j - \omega^2 \mu_j) y_{m+j}] = 2q_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Za pomocą (2.7) łatwo nadajemy układowi (3.6) postać kanoniczną

$$\sum_{j=1}^{\infty} [(B_{m-j} - B_{m+j}) \alpha_m^2 \alpha_j^2 - (N_{m-j} + N_{m+j}) \alpha_m \alpha_j + K_{m-j} - K_{m+j} - \omega^2 (\mu_{m-j} - \mu_{m+j})] y_j = 2q_m \\ (m = 1, 2, 3, \dots)$$

lub

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left[(B_{m-j} - B_{m+j}) m^2 j^2 - (N_{m-j} + N_{m+j}) m j \frac{a^2}{\pi^2} + (K_{m-j} - K_{m+j}) \frac{a^4}{\pi^4} - \right. \\ \left. - \omega^2 (\mu_{m-j} - \mu_{m+j}) \frac{a^4}{\pi^4} \right] y_j = 2q_m \frac{a^4}{\pi^4} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Wprowadzamy jeszcze zamiast niewiadomych y_j nowe niewiadome v_j i ostatecznie otrzymujemy

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_j = y_j j^2, \quad y_j = \frac{v_j}{j^2}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} C_{jm} v_j = \frac{2q_m}{m^2} \frac{a^4}{\pi^4} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \\ C_{jm} = B_{m-j} - B_{m+j} - (N_{m-j} + N_{m+j}) \frac{1}{mj} \frac{a^2}{\pi^2} + \\ + (K_{m-j} - K_{m+j}) \frac{1}{m^2 j^2} \frac{a^2}{\pi^4} - \omega^2 (\mu_{m-j} - \mu_{m+j}) \frac{1}{m^2 j^2} \frac{a^4}{\pi^4}, \\ C_{mm} = B_0 - B_{2m} - (N_0 + N_{2m}) \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{\pi^2} + \\ + (K_0 - K_{2m}) \frac{1}{m^4} \frac{a^4}{\pi^4} - \omega^2 (\mu_0 - \mu_{2m}) \frac{1}{m^4} \frac{a^4}{\pi^4}. \end{array} \right.$$

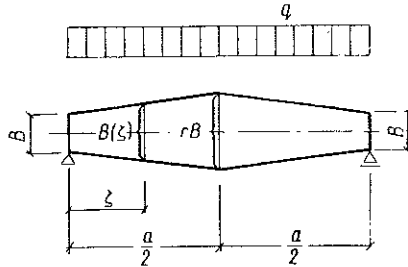
Układ (3.8) pozwala wyznaczyć współczynniki szeregu (1.2) stanowiącego rozwiązanie równania różniczkowego (1.1) przy swobodnym podparciu obu końców pręta. Niżej pokażemy, że można za pomocą (3.8) uzyskać rozwiązanie również przy innych warunkach brzegowych.

Zbadajmy teraz na przykładach liczbowych efektywność proponowanej metody.

Dla swobodnie podpartego pręta o długości a i sztywności zmieniającej się symetrycznie i liniowo od wartości B na podporach do rB w środku rozpiętości, obciążonego równomiernie $q = \text{const}$, można oczywiście łatwo znaleźć ściśle wyrażenie dla linii ugięcia (rys. 1).

Ugięcie w środku rozpiętości wynosi

$$y_{max} = \frac{qa^4}{384(r-1)^3 B} \left[12 \frac{2r-1}{r-1} \ln r + (2r-1)(4r-15) - 1 \right]$$



Rys. 1

dla różnych wartości r otrzymujemy wartości zestawione w tabelicy następującej:

r	2	4	6	8
$\frac{B}{qa^4} y_{max}$	0,00768	0,00432	0,00305	0,00235

Dla porównania wyznaczmy teraz linię ugięcia rozpatrywanego pręta za pomocą układu (3.10). Uwzględniając symetrię mamy

$$\begin{aligned} B_j &= 4B \int_0^{1/2} [2(r-1)\zeta + 1] \cos j\pi\zeta \, d\zeta = \\ &= 4B \left[(2r-1)\zeta \frac{\sin j\pi\zeta}{j\pi} + \frac{2r-1}{j^2\pi^2} \cos j\pi\zeta + \frac{\sin j\pi\zeta}{j\pi} \right]_0^{1/2} = \\ &= -8B(2r-1) \frac{1}{j^2\pi^2} \quad (j = 2, 6, 10, \dots), \end{aligned}$$

$$B_0 = 4B \int_0^{1/2} [2(r-1)\zeta + 1] \, d\zeta = B(r+1),$$

$$q_m = \frac{4q}{\pi m} \quad (m = 1, 3, 5, \dots), \quad \frac{2q_m}{m^2} \frac{a^4}{\pi^4} = \frac{8qa^4}{\pi^5} \frac{1}{m^3},$$

a zatem

$$C_{mm} = B_0 - B_{2m} = B \left[r+1 + 2(2r-1) \frac{1}{m^2 \pi^2} \right] \quad (m = 1, 3, 5, \dots),$$

$$C_{m-j} = B_{m-j} - B_{m+j} = \begin{cases} -\frac{8B}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{(m-j)^2}, & \text{jeśli } m-j = 2, 6, 10, \dots; \\ \frac{8B}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{(m+j)^2}, & \text{jeśli } m+j = 2, 6, 10, \dots, \end{cases}$$

i układ (3, 10) przybiera postać

$$\left[(r+1) + 2(2r-1) \frac{1}{\pi^2} \right] v_1 - \frac{8}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{4} v_3 + \frac{8}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{36} v_5 - \dots = \frac{8qa^4}{\pi^5 B},$$

$$-\frac{8}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{4} v_1 + \left[(r+1) + 2(2r-1) \frac{1}{9\pi^2} \right] v_3 - \frac{8}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{4} v_5 + \dots = \frac{1}{27} \frac{8qa^4}{\pi^5 B},$$

$$\frac{8}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{36} v_1 - \frac{8}{\pi^2} (2r-1) \frac{1}{4} v_3 + \left[(r+1) + 2(2r-1) \frac{1}{25\pi^2} \right] v_5 + \dots = \frac{1}{125} \frac{8qa^4}{\pi^5 B}.$$

Jako pierwsze przybliżenie przyjmujemy

$$v_1^{(1)} = y_1^{(1)} = y_{max}^{(1)} = \frac{8qa^4}{\pi^5 B} \frac{1}{r+1 + 2(2r-1) \frac{1}{\pi^2}},$$

które prowadzi do następujących wyników:

r	2	4	6	8
$\frac{B}{qa^4} y_{max}^{(1)}$	0,00725	0,00407	0,00283	0,00217

czyli błąd w granicach od $-5,5\%$ do $-7,7\%$.

Przyjmijmy teraz $r = 8$ i obliczmy trzy współczynniki v_j z następującego układu równań:

$$12,040 v_1 - 3,040 v_3 + 0,338 v_5 = S,$$

$$-3,040 v_1 + 9,338 v_3 - 3,040 v_5 = \frac{S}{27},$$

$$0,338 v_1 - 3,040 v_3 + 9,122 v_5 = \frac{S}{125}, \quad S = \frac{8qa^4}{\pi^5 B},$$

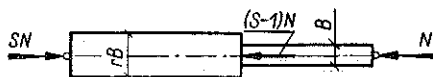
$$v_1 = 0,093S, \quad v_3 = 0,038S, \quad v_5 = 0,010S.$$

Stąd znajdziemy

$$y_{max} \approx \left(0,093 - \frac{1}{9} 0,038 + \frac{1}{25} 0,010 \right) \frac{8qa^4}{\pi^5 B} = 0,0892 \frac{8qa^4}{\pi^5 B} = 0,00233 \frac{qa^4}{B},$$

tj. błąd wynosi około $0,85\%$.

Jako następny przykład wyznaczmy siłę krytyczną dla pręta swobodnie podpartego na obu końcach, o przekroju zmieniającym się skokowo w połowie rozpiętości, obciążonego siłami osiowymi N i $(s-1)N$, (rys. 2).



Rys. 2

Mamy w tym przypadku

$$B_0 = 2 \left(\int_0^{1/2} rB d\zeta + \int_{1/2}^1 B d\zeta \right) = (r+1)B,$$

$$B_j = 2 \left(\int_0^{1/2} rB \cos j\pi\zeta d\zeta + \int_{1/2}^1 B \cos j\pi\zeta d\zeta \right) = \frac{2(r-1)B}{\pi} \frac{\sin \frac{j\pi}{2}}{j},$$

$$B_{2m} = 0, \quad B_{j-m} - B_{j+m} = \frac{4(r-1)B}{\pi} \cdot \frac{m \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} - j \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{j\pi}{2}}{j^2 - m^2},$$

$$N_0 = (S+1)N, \quad N_{2m} = 0, \quad N_{j-m} + N_{j+m} = \frac{4(S-1)N}{\pi} \cdot \frac{j \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} - m \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{j\pi}{2}}{j^2 - m^2},$$

$$C_{mm} = (r+1)B - (S+1)N \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{\pi^2},$$

$$C_{mj} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{j^2 - m^2} \left[(r-1)B \left(m \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} - j \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{j\pi}{2} \right) - (S-1)N \left(j \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} - m \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{j\pi}{2} \right) \frac{1}{mj} \frac{a^2}{\pi^2} \right].$$

Otrzymujemy zatem następujący układ jednorodnych równań:

$$\begin{aligned} & \left[(r+1)B - (S+1)N \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_1 + \frac{4}{\pi} \left[(r-1)B \cdot \frac{2}{3} - (S-1)N \cdot \frac{1}{6} \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_2 + \dots = 0, \\ & \frac{4}{\pi} \left[(r-1)B \cdot \frac{2}{3} - (S-1)N \cdot \frac{1}{6} \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_1 + \left[(r+1)B - (S+1)N \cdot \frac{1}{4} \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_2 + \\ & \quad + \frac{4}{\pi} \left[(r-1)B \cdot \frac{2}{5} - (S-1)N \cdot \frac{1}{10} \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_3 + \dots = 0, \\ & \frac{4}{\pi} \left[(r-1)B \cdot \frac{2}{5} - (S-1)N \cdot \frac{1}{10} \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_2 + \left[(r+1)B - (S+1)N \cdot \frac{1}{9} \frac{a^2}{\pi^2} \right] v_3 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Pierwsze przybliżenie uzyskujemy z warunku $C_{11} = 0$, skąd

$$N_{kr}^{(1)} \approx \frac{B\pi^2}{a^2} \frac{r+1}{s+1}.$$

Drugie przybliżenie prowadzi do równania

$$\left[(r+1)B - (S+1)N \frac{a^2}{\pi^2} \right] \left[(r+1)B - (S+1)N \cdot \frac{1}{4} \frac{a^2}{\pi^2} \right] - \frac{16}{\pi^2} \left[(r-1)B \frac{2}{3} - (S-1)N \cdot \frac{1}{6} \frac{a^2}{\pi^2} \right]^2 = 0.$$

W tabelcy 1 zestawione są wartości pierwszego i drugiego przybliżenia siły krytycznej dla różnych wartości r i s .

Tablica 1

	1	2	$\frac{s}{r}$
$(a^2/\pi^2 B) N_{kr}^{(1)}$	1,00	0,667	1
$(a^2/\pi^2 B) N_{kr}^{(2)}$	1,000	0,662	
$(a^2/\pi^2 B) N_{kr}^{(1)}$	1,50	1,00	2
$(a^2/\pi^2 B) N_{kr}^{(2)}$	1,340	0,938	

Wartości w drugim wierszu tabelcy są dokładne, [1], natomiast wartości z ostatniego wiersza są obarczone błędami 3,1% oraz 3,4%.

Za pomocą układu (3.10) możemy wyznaczyć częstotliwości drgań własnych belki, na której umieszczone są ciężary skupione. Rozważmy prosty przykład belki nieważkiej o stałej sztywności B z masą μ umieszczoną w środku rozpiętości (rys. 3).

Dla tego przypadku mamy

$$B_0 = 2B, \quad B_j = 0,$$

$$\mu_0 = \frac{2}{a} \mu, \quad \mu_j = \frac{2}{a} \mu \cos \frac{j\pi}{2},$$

$$\mu_0 - \mu_{2m} = \frac{2\mu}{a} (1 - \cos m\pi),$$

$$\mu_{m-j} - \mu_{m+j} = \frac{2\mu}{a} \left[\cos(m-j) \frac{\pi}{2} - \cos(m+j) \frac{\pi}{2} \right] = \frac{4\mu}{a} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}.$$

Oznaczając

$$\frac{4\mu}{a} \frac{a^4}{\pi^4} \omega^2 = \varrho,$$

otrzymujemy układ równań jednorodnych

$$\left(2B - \frac{\varrho}{2} \frac{1 - \cos m\pi}{m^4} \right) v_m - \varrho \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2} \sum_{j \neq m}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi}{2}}{j^2} v_j = 0 \quad (m = 1, 3, 5, \dots),$$

czyli

$$(2B - \rho)v_1 + \rho \frac{1}{9} v_3 - \rho \frac{1}{25} v_5 + \dots = 0,$$

$$\rho \frac{1}{9} v_1 + \left(2B - \frac{\rho}{81}\right)v_3 + \rho \frac{1}{225} v_5 - \dots = 0,$$

.

Ograniczając się do jednego wyrazu v_1 obliczamy

$$\rho = \frac{4\mu}{a} \frac{a^4}{\pi^4} \omega^2 = 2B, \quad \omega = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Ba}{2\mu}}.$$

Przy $B = 2 \cdot 10^6 \cdot 80 = 16 \cdot 10^7 \text{ kG cm}^2$, $\mu = \frac{100}{981} \frac{\text{kG cm}^2}{\text{sek}}$, $a = 100 \text{ cm}$, mamy

$$\omega = \frac{\pi^2}{10^4} \sqrt{\frac{16 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 981}{2 \cdot 100}} = \pi^2 \sqrt{784,8} = 277 \text{ 1/sek},$$

zamiast 274 1/sek.

Tok obliczenia pozostałby oczywiście niezmienny, gdyby nieważka belka posiadała zmienną sztywność, a na belce umieszczone były skupione lub ciągłe masy o dowolnej zmienności.

4. Dla prętów spoczywających na sprężystym podłożu można za pomocą układu równań (3.8) uzyskać rozwiązanie nie tylko przy swobodnym podparciu obu końców. Objasnimy to na przykładzie pręta o obu końcach swobodnych, spoczywającego na sprężystym podłożu i obciążonego w środku siłą P (rys. 4a). Pręt ten można uzyskać ze schematu przedstawionego na rys. 4b, zmniejszając do zera sztywności pręta \bar{B} w przedziałach $0 \leq x \leq a/4$, $3a/4 \leq x \leq a$.

Mamy zatem dla naszego zagadnienia funkcje sztywności $B(x)$ i współczynnika podatności podłoża $K(x)$ określone w następujący sposób:

$$B(x) = 0, \quad K(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < a/4, \quad 3a/4 < x < a,$$

$$B(x) = B, \quad K(x) = K \quad \text{dla} \quad a/4 < x < 3a/4.$$

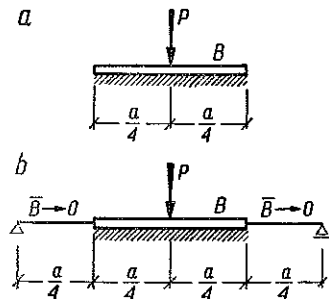
Wobec tego znajdziemy

$$q_m = \frac{2P}{a} \sin \frac{m\pi}{2} = \frac{2P}{a} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad (m = 1, 3, 5, \dots),$$

$$B_0 = 2B \int_{1/4}^{3/4} d\zeta = B, \quad B_j = 2B \int_{1/4}^{3/4} \cos j\pi\zeta d\zeta =$$

$$= \frac{2B}{\pi j} \left(\sin \frac{3j\pi}{4} - \sin \frac{j\pi}{4} \right) = \frac{4B}{\pi j} \sin \frac{j\pi}{4} \cos \frac{j\pi}{2},$$

$$B_{2m} = \frac{2B}{\pi m} \sin \frac{m\pi}{2} \cos m\pi = -\frac{2B}{\pi m} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad (m = 1, 3, 5, \dots),$$



Rys. 4

$$\begin{aligned}
 B_{j-m} - B_{j+m} &= \frac{4B}{\pi} \left[\frac{\sin(j-m)\frac{\pi}{4} \cos(j-m)\frac{\pi}{2}}{j-m} - \frac{\sin(j+m)\frac{\pi}{4} \cos(j+m)\frac{\pi}{2}}{j+m} \right] = \\
 &= \frac{4B}{\pi} (-1)^{\frac{j+m-2}{2}} \left[\frac{\sin(j-m)\frac{\pi}{4}}{j-m} + \frac{\sin(j+m)\frac{\pi}{4}}{j+m} \right] \quad (m, j = 1, 3, 5, \dots)
 \end{aligned}$$

i analogicznie

$$K = K_0, \quad K_{2m} = -\frac{2K}{\pi m} (-1)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
 K_{j-m} - K_{j+m} &= \frac{4K}{\pi} (-1)^{\frac{j+m-2}{2}} \left[\frac{\sin(j-m)\frac{\pi}{4}}{j-m} + \frac{\sin(j+m)\frac{\pi}{4}}{j+m} \right] \\
 &\quad (m, j = 1, 3, 5, \dots).
 \end{aligned}$$

Układ równań (3.8) przybiera postać

$$\begin{aligned}
 \left[1 + \frac{2}{\pi m} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \left(B + K \frac{1}{m^4} \frac{a^4}{\pi^4} \right) v_m + \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j \neq m}^{\infty} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \left[\frac{\sin(j-m)\frac{\pi}{4}}{j-m} + \right. \\
 \left. + \frac{\sin(j+m)\frac{\pi}{4}}{j+m} \right] \left(B + K \frac{1}{m^2 j^2} \frac{a^4}{\pi^4} \right) v_j = \frac{4Pa^3}{\pi^4} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^2} \quad (m, j = 1, 3, 5, \dots).
 \end{aligned}$$

Wprowadzamy znane oznaczenie

$$K = 4\beta^4 B$$

i przyjmujemy dla przykładu $\beta a = \pi/\sqrt{2}$, po czym otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
 \left[1 + \frac{2}{\pi m} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \left(1 + \frac{1}{m^4} \right) v_m + \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j \neq m}^{\infty} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \left[\frac{\sin(j-m)\frac{\pi}{4}}{j-m} + \right. \\
 \left. + \frac{\sin(j+m)\frac{\pi}{4}}{j+m} \right] \left(1 + \frac{1}{m^2 j^2} \right) v_j = \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^4} \quad (m, j = 1, 3, 5, \dots)
 \end{aligned}$$

lub w formie rozwiniętej

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) (1+1) v_1 - \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{9} \right) v_3 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{25} \right) v_5 + \\
 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{49} \right) v_7 + \dots = \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B},
 \end{aligned}$$

$$-\frac{4}{\pi} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{9}\right) v_1 + \left(1 - \frac{2}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right) v_3 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{225}\right) v_5 +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{441}\right) v_7 + \dots = -\frac{1}{9} \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B},$$

$$-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{25}\right) v_1 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{225}\right) v_3 + \left(1 + \frac{2}{5\pi}\right) \left(1 + \frac{1}{625}\right) v_5 -$$

$$-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1225}\right) v_7 + \dots = \frac{1}{25} \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B},$$

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{49}\right) v_1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{441}\right) v_3 - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1225}\right) v_5 +$$

$$+ \left(1 - \frac{2}{7\pi}\right) \left(1 + \frac{1}{2401}\right) v_7 + \dots = -\frac{1}{49} \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B}.$$

Ograniczając się do czterech pierwszych wyrazów rozwinięcia znajdziemy

$$3,275 v_1 - 0,707 v_3 - 0,221 v_5 + 0,216 v_7 = \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B},$$

$$-0,707 v_1 + 0,797 v_3 - 0,641 v_5 + 0,128 v_7 = -0,111 \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B},$$

$$-0,221 v_1 - 0,641 v_3 + 1,130 v_5 - 0,637 v_7 = 0,040 \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B},$$

$$0,216 v_1 + 0,128 v_3 - 0,637 v_5 + 0,909 v_7 = -0,020 \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B}.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$v_1 = 0,601, \quad v_3 = 1,169, \quad v_5 = 1,042, \quad v_7 = 0,402,$$

$$y_1 = 0,601, \quad y_3 = \frac{1}{9} v_3 = 0,130, \quad y_5 = \frac{1}{25} v_5 = 0,042, \quad y_7 = \frac{1}{49} v_7 = 0,008,$$

czyli funkcję ugięcia pręta w postaci

$$y(x) \approx (0,601 \sin \alpha_1 x + 0,130 \sin \alpha_3 x + 0,042 \sin \alpha_5 x + 0,008 \sin \alpha_7 x) \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B}.$$

Ugięcie w środku długości pręta wynosi

$$y_{max} \approx (0,601 - 0,130 + 0,042 - 0,008) \frac{4 \cdot 24^3 P}{\pi B} = 15,45 \cdot 24^2 \frac{P}{B},$$

tj. w porównaniu z dokładną wartością $y_{max} = 15,53 \cdot 24^2 P/B$, [2], nasze przybliżenie obarczone jest błędem wynoszącym zaledwie około $-0,5\%$. Analogicznie otrzymujemy przybliżoną wartość ugięcia na końcu pręta (dla $x = a/4$)

$$y_{min} \approx (0,601 + 0,130 - 0,042 - 0,008) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4 \cdot 24^3}{\pi} \frac{P}{B} = 14,73 \cdot 24^3 P/B,$$

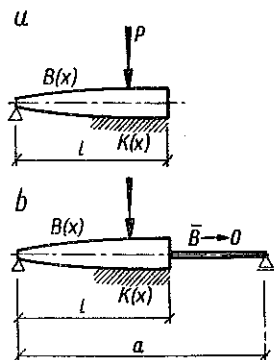
która w porównaniu z dokładną wartością $y_{min} = 14,86 \cdot 24^3 P/B$ wykazuje ok. $-0,9\%$ błędu.

Obliczanie momentów zginających za pomocą otrzymanych wartości v_1, \dots, v_7 tj. przy ograniczeniu się do układu czterech równań prowadzi oczywiście do znacznie większych błędów. I tak na swobodnym końcu otrzymalibyśmy

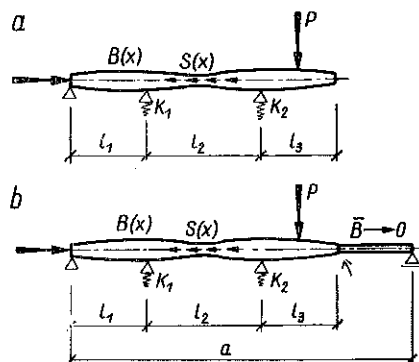
$$M \approx (0,601 + 1,169 - 1,042 - 0,402) \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot 24}{\pi} P = (1,770 - 1,444) \frac{4 \cdot 24}{\pi \sqrt{2}} P$$

zamiast zera.

Z przytoczonego powyżej przykładu wynika, że układ równań (3.8) pozwala na rozwiązanie zagadnień zginania, wybooczenia i drgań prętów o zmiennej sztywności, ściskanych zmienną wzdłuż osi pręta siłą osiową i spoczywających na podłożu sprężystym o zmiennym współczynniku podatności, przy różnych warunkach brzegowych. Istotnie, przy zmiennej sztywności pręta i zmiennym współczynniku



Rys. 5



Rys. 6

podatności podłoża cały tok rozwiązania pozostałby bez zmian, jedynie współczynniki B_j i K_j przybrałyby inną postać, odpowiadającą funkcjom $B(x)$ i $K(x)$. Jasne jest również, że zupełnie analogicznie uzyskać można rozwiązanie np. dla pręta przedstawionego na rys. 5a, swobodnie podpartego na lewym końcu i zupełnie swobodnego na prawym, obierając schemat wyjściowy uwidoczony na rys. 5b i dokonując odpowiedniego przejścia granicznego ze sztywnością \bar{B} na odcinku $l < x < a$.

Równie prosto, za pomocą układu (3.8) rozwiązać możemy pręt o zmiennej sztywności $B(x)$, ściskany siłami $S(x)$ i zginany dowolnym obciążeniem poprzecznym,

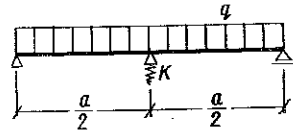
spoczywający na jednej podporze (skrajnej) niepodatnej i kilku podporach sprężystych o różnych współczynnikach podatności K_1 i K_2 (rys. 6a). Ustrój wyjściowy przedstawiony jest na rys. 6b. We wzorach (3.8) będziemy mieli dla tego przypadku

$$K_0 = \frac{2}{a} \int_0^a K(z) dz = \frac{2}{a} (K_1 + K_2),$$

$$K_j = \frac{2}{a} \int_0^a K(z) \cos \alpha_j z dz = \frac{2}{a} [K_1 \cos \alpha_j l_1 + K_2 \cos \alpha_j (l_1 + l_2)].$$

Sprawdzimy słuszność takiego postępowania na prostym przykładzie belki dwuprzęsłowej równomiernie obciążonej z podporą sprężystą w połowie długości belki (rys. 7).

Jeśli $K_0 = \frac{2}{a} K$, $K_j = \frac{2}{a} K \cos \frac{j\pi}{2}$, to otrzymamy zgodnie z (3.8)



Rys. 7

$$C_{mm} = 2B + 2K(1 - \cos m\pi) \frac{1}{m^4} \frac{a^3}{\pi^4},$$

$$C_{mj} = \frac{2}{a} K \left[\cos(m-j) \frac{\pi}{2} - \cos(m+j) \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{m^2 j^2} \frac{a^4}{\pi^4} = 4 \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} \frac{K}{m^2 j^2} \frac{a^3}{\pi^4},$$

$$q_m = \frac{4q}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, \dots),$$

tj. następujący układ równań

$$\left[2B + 2K(1 - \cos m\pi) \frac{1}{m^4} \frac{a^3}{\pi^4} \right] v_m + 4K \frac{a^3}{\pi^4} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2} \sum_{j \neq m}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi}{2}}{j^2} v_j = \frac{8qa^4}{\pi^5} \frac{1}{m^3} \quad (m, j = 1, 3, 5, \dots).$$

Przyjmując $K = 48 B/a^3$ znajdziemy

$$(2 + 1,97/m^4) v_m + 1,97 \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2} \sum_{j \neq m}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi}{2}}{j^2} v_j = \frac{8qa^4}{\pi^5 B} \frac{1}{m^3} \quad (m, j = 1, 3, 5, \dots),$$

czyli

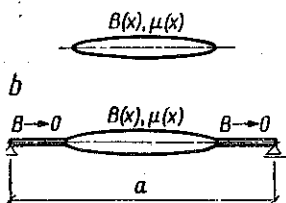
$$\begin{aligned} 3,970 v_1 - 0,219 v_3 + 0,079 v_5 - \dots &= \frac{8qa^4}{\pi^5 B}, \\ -0,219 v_1 + 2,024 v_3 - 0,009 v_5 + \dots &= \frac{1}{27} \frac{8qa^4}{\pi^5 B}, \\ 0,079 v_1 - 0,009 v_3 + 2,003 v_5 - \dots &= \frac{1}{125} \frac{8qa^4}{\pi^5 B}, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Ograniczając się do pierwszego wyrazu rozwinięcia obliczamy

$$v_1^{(1)} = 0,00658 \frac{qa^4}{B}$$

ugięcie w środku $y_1^{(1)} = 0,00658 \cdot qa^4/B$ i moment w środku $M^{(1)} = 0,065 qa^2$, podczas gdy dokładne wartości wynoszą

$$y = \frac{5}{768} \frac{qa^4}{B} = 0,00651 qa^4/B, \quad M = \frac{3}{64} qa^2 = 0,0469 qa^2.$$



Rys. 8

Obliczając trzy pierwsze współczynniki v_j , uzyskujemy wartość momentu obarczoną błędem ok. 10%.

Warto jeszcze zaznaczyć, że układ równań (3.8) daje możliwość wyznaczenia częstości drgań własnych pręta o zmiennym przekroju o obu końcach swobodnych (rys. 8a). Pomocniczy schemat wyjściowy uwidoczniiony jest na rys. 8b.

We wszystkich rozpatrzonych przykładach otrzymaliśmy kanoniczne układy równań o współczynnikach naprzemiennych, z największymi co do wartości bezwzględnej współczynnikami położonymi na głównej przekątnej macierzy. Zbieżność układów, które rozwiązywane były z reguły metodą iteracyjną, jest szybka i istnienie rozwiązania nie budzi wątpliwości. Ogólnego dowodu regularności układu (3.8) nie udało się jednak autorowi dotąd przeprowadzić.

Metoda zastosowana w tej pracy może być wykorzystana również do zagadnień zginania, stateczności i dynamiki płyt o zmiennej sztywności, [3].

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. TIMOSHENKO, *Elastic Stability*, 1936.
- [2] S. TIMOSHENKO, *Strength of Materials*, Part 2, 1941.
- [3] A. KACNER, *Bending of Plates with Variable Thickness*, Arch. Mech. Stos., 3, 13(1961), 393-417.

Р е з ю м е

ИЗГИБ, УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В работе дано формально-строгое решение дифференциального уравнения (1.1) колебаний стержня с переменной жесткостью изгиба $B(x)$ и переменной погонной массой $\mu(x)$, покоящегося на упругом, винклеровом основании с переменным коэффициентом постели $K(x)$, сжатого переменной продольной силой $N(x)$ и подвергнутого действию поперечной возмущающей нагрузки. $q(x) \cos \omega t$.

При условиях шарнирного опирания обоих концов стержня, уравнение упругой линии принимается в виде ряда Фурье по синусам (1.2). Все переменные коэффициенты дифференциального уравнения задачи разлагаются в тригонометрические ряды по косинусам. С помощью двух вспомогательных формул (2.3), (2.6) левая часть уравнения (1.1) приводится к тригонометрическому ряду по синусам, а затем, приравнявая коэффициенты

этого ряда коэффициентам разложения $q(x) = \sum_m q_m \sin \alpha_m x$, получают бесконечную систему уравнений (3.8) для определения коэффициентов Фурье ряда (1.2). Для приведения системы (3.8) к каноническому виду используется вспомогательная формула (2.7). Структура системы уравнений (3.8) весьма проста, даже в самом общем случае, когда все коэффициенты в дифференциальном уравнении (1.1) являются функциями переменной x .

Решение, полученное для шарнирно опертого стержня, обобщается на задачи изгиба, устойчивости и колебаний стержней, покоящихся на упругом, неоднородном, винклеровом основании, с двумя свободными концами, или одним свободным и другим шарнирно опертым концом. Разрывное распределение продольных сил, сосредоточенные массы и точечные, упругие опоры учитываются без каких-либо затруднений.

Работа пояснена рядом числовых примеров, а результаты сравнены с решениями, полученными другими методами.

Summary

BENDING STABILITY AND VIBRATION OF BARS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

This is a formally accurate solution of the differential equation (1.1) of vibration of a bar with variable flexural rigidity $B(x)$, variable mass $\mu(x)$, resting on a Winklerian foundation with variable foundation modulus $K(x)$, compressed by a variable axial force $N(x)$ and subjected to a load $q(x) \cos \omega t$.

The ends being simply supported, the deflection curve is assumed in the form of a Fourier sine series (1.2). All variable coefficients of the differential equation are expanded in Fourier cosine series. By means of two auxiliary equations (2.3) and (2.6), the left-hand side of Eq. (1.1) is reduced to a Fourier sine series. Equating the coefficients of this series to those of the expansion $q(x) = \sum_m q_m \sin \alpha_m x$, we obtain an infinite system of equations (3.8), for the coefficients of the series (1.2). The system (3.8) is reduced to the canonical form by means of the auxiliary equation (2.7). The form of the system of equations (3.8) is very simple even in the most general case of variability of all the coefficients of the differential equation (1.1).

The solution obtained for a simply supported bar is generalized to the problem of bending, buckling and vibration of bars resting on an elastic foundation and having both ends free or one end free, the other being simply supported. It is not difficult to introduce concentrated masses or elastic point supports.

The paper is illustrated by a number of numerical examples, each result being confronted with another solution.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1961 r.