

JERZY PIETRZYKOWSKI

**O BELCE SPRĘŻONEJ
W FAZIE ODKSZTAŁCEN SPREŻYSTO-PLASTYCZNYCH
PRZED ZARYSOWANIEM**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCVI**

TOM IX · ZESZYT 3 · ROK 1961

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	309
1.1. Prace zagraniczne	309
1.2. Prace polskie	309
1.3. Cel pracy	310
1.4. Zakres pracy	311
2. Ogólne założenia teorii stanów sprężysto-plastycznych belki sprężonej	311
2.1. Założenia materiałowe	311
2.2. Założenia ogólne	313
2.3. Klasyfikacja przypadków uplastycznienia przekrojów sprężonych	314
3. Podstawowe zależności dla przekroju prostokątnego	315
3.1. Uplastycznienie w strefie ściskanej (przypadek F)	315
3.2. Uplastycznienie obustronne w strefie ściskanej i rozciąganej (przypadek G)	316
3.3. Uplastycznienie w strefie rozciąganej (przypadek H)	318
4. Podstawy teorii stanów sprężysto-plastycznych	319
4.1. Zakres występowania przypadków uplastycznienia	319
4.2. Nośność graniczna przekroju. Zakres stosowalności teorii	334
4.3. Bezpieczeństwo przekroju	342
5. Rozkład naprężeń i stany uplastycznienia wzdłuż belki	350
5.1. Równanie osi obojętnej w fazie sprężysto-plastycznej	350
5.2. Równanie linii uplastycznienia	351
5.3. Kąty obrotu przekrojów końcowych belki sprężonej w stanie sprężysto-plastycznym	352

1. Wstęp

Wiele obiektów inżynierskich o dużej rozpiętości, takich jak mosty, zbiorniki, zapory, dachy wiszące, wykonano w ostatnim czasie według koncepcji konstrukcji sprężonych. Decydowały o tym zarówno względy techniczne, jak i ekonomiczne, [23].

Możliwość lepszego wykorzystania wytrzymałości materiału, duża swoboda przy kształtowaniu form konstrukcyjnych jak również szybki rozwój metod sprężania i niezwykła pomysłowość wykonawców doprowadziły do szeregu poważnych osiągnięć praktycznych. W zakresie teoretycznym wyniki prac są skromniejsze. Dotyczy to szczególnie analizy stanów pozasprężystych, co jest tematem niniejszej pracy.

1.1. Prace zagraniczne. Stosowana w praktyce projektowej metoda odkształceń plastycznych i plastycznego wyrównywania momentów nie znajduje ścisłego uzasadnienia i nie jest zgodna z wynikami doświadczeń. Prace nad tymi metodami skierowały uwagę badaczy na rozkład momentów poza obszarem sprężystym. Wzrost zainteresowania tymi zagadnieniami widzimy w szeregu prac radzieckich głównie u A. A. GWOZDIEWA, [15], [16], i S. M. KRYŁOWA, [14], [35], oraz w pracach angielskich A. L. L. BAKERA [1], [2], [3] i D. H. LEE, [4], [37]. W pracach tych zakłada się, że początek płynięcia stali nie wyczerpuje nośności ustroju i że możliwe jest tworzenie dalszych przegubów plastycznych i częściowe wyrównywanie momentów.

Zagadnieniem rozkładu momentów zajął się przed paru laty K. JÄGER, [27], [28]. Wyprowadził on w oparciu o klasyczne metody E. MÖRSCHA, [47], podobnie jak LEE analityczne zależności pomiędzy działającym w przekroju momentem a przyrostem kąta. Podstawowe dla teorii konstrukcji sprężonych prace Y. GUYONA, [17], [18], [19], a szczególnie praca [20], mimo szczegółowej analizy wielu nowych dziedzin w oparciu o obszerny materiał doświadczalny, nie wyczerpują zagadnienia w zakresie pozasprężystym. Istnieje ponadto kilka prac teoretycznych i doświadczalnych poświęconych temu zagadnieniu. Jedną z ostatnich jest praca CZEN-WEŃ-SZAN, [8], wykonana pod kierunkiem SACHNOWSKIEGO. Podano w niej wzory i tablice na rozkład momentów w sprężonej belce dwuprzegubowej, które pozwalają prześledzić zmiany w rozkładzie naprężeń przy rosnących obciążeniach od momentu pojawienia się rys do początku zniszczenia. Osiągnięte wyniki porównano z podobnymi wzorami S. M. KRYŁOWA, [35], oraz pracami T. Y. LINA, [40], K. W. SACHNOWSKIEGO, [64], i A. KUDZISA, [36].

1.2. Prace polskie. Z prac polskich w zakresie teoretycznym należy wymienić prace W. OLSZAKA, [49], [50], [51] oraz [52], w których autor podał syntezę podstawowych

pojęć i zależności oraz klasyfikację możliwych stanów elasto-plastycznych. Sformułowano tam również zależności łączące składowe stanu naprężenia i stanu odkształcenia stosujące się do zjawisk plastycznego płynięcia materiału niejednorodnego, powstrzymywanego przez ograniczające obszary sprężyste. Zależności te, które można zastosować do konstrukcji sprężonej w stanie sprężysto-plastycznym, stanowią uogólnienie związków, stanowiących podstawę teorii plastycznego płynięcia z udziałem odkształceń sprężystych według koncepcji L. PRANDTLA, [58], i E. REUSSA, [59].

Z innych prac polskich należy wymienić prace S. KAUFMANA, [30], [31], [32], i szeregu jego współpracowników: J. MAMESA, [43], [44], T. HOPA, [33], W. STAROSOLSKIEGO, [67], które wyjaśniły szereg zagadnień praktycznych i teoretycznych w zakresie liniowo i nieliniowo-sprężystym. Rozważania J. ŁEMPICKIEGO, [41], doprowadziły do jednolitego ujęcia teoretycznego zjawisk towarzyszących zginaniu aż do zniszczenia belki żelbetowej.

Ukazało się ponadto kilka prac teoretycznych z zakresu konstrukcji sprężonych, luźno związanych z tematem niniejszej pracy. Rzeczywista praca belki sprężonej poza obszarem sprężystym jest nadal sprawą otwartą i wymaga pełniejszej analizy teoretycznej. Przeprowadzenie takiej analizy pozwoli na wyciągnięcie szeregu wniosków praktycznych. W pierwszym rzędzie dotyczyć to będzie współczynnika bezpieczeństwa, który pokrywa obecnie rozbieżności między rzeczywistym a przyjmowanym do obliczeń rozkładem naprężeń. Pozwoli to również na szersze ujęcie nośności ustroju oraz podanie wytycznych projektowania przekroju belki sprężonej z uwzględnieniem rezerw stanów pozasprężystych.

1.3. Cel pracy. Celem pracy jest analiza zjawisk, zachodzących w przekroju belki sprężonej, częściowo uplastycznionej przed pojawieniem się rys. Podamy wzory na podstawowe wielkości, charakteryzujące rozkład naprężeń w przekroju sprężonym po przekroczeniu granicy plastyczności betonu. Rozpatrzmy zakres występowania różnych stanów sprężysto-plastycznych według przeprowadzonej klasyfikacji, która obejmuje również — jako przypadki szczególne — stany liniowo-sprężyste, co pozwoli stwierdzić ich ograniczony zasięg.

Wyznamy stany graniczne przy założeniu ciągłości ośrodka, jako stanu podstawowego w naszej teorii i zasadniczego w ustroju sprężonym. Przez naruszenie ciągłości ośrodka rozumiemy bądź zarysowanie, bądź zniszczenie (zmiążdżenie strefy ściskanej) przed zarysowaniem.

Omówimy podstawowe wnioski dotyczące bezpieczeństwa konstrukcji oraz zagadnień doboru trasy kabła w oparciu o uogólniony rdzeń przekroju rozszerzony na stany pozasprężyste. Na podstawie tych rozważań sformułujemy wzory pozwalające określać strefy uplastycznienia wzdłuż belki w zależności od cech materiałowych, trasy kabła i wielkości siły sprężającej. W zakończeniu podamy zależności wiążące kąty obrotów przekrojów końcowych belki z wielkością i przyłożeniem siły sprężającej.

Łatwo zauważyć, że po przekroczeniu granicy plastyczności zasięg uplastycznienia w przekroju zależy od naprężeń wywołanych zabiegiem sprężenia. Obszary

uplastycznienia wzdłuż belki oraz kąty obrotów wzajemnych przekrojów będą zatem funkcją tych wielkości.

Tak przeprowadzona analiza pozwala na uwzględnienie jakościowe nowych zjawisk (czego nie daje teoria liniowo-sprężysta), jakkolwiek wyniki liczbowe mogą być — z uwagi na przyjęte założenia upraszczające — mniej lub więcej ściśle.

1.4. Zakres pracy. Jak już wspomnieliśmy, zakres pracy ograniczymy do analizy zjawisk występujących przed zarysowaniem ustroju sprężonego.

Zarysowanie konstrukcji jest równoznaczne z naruszeniem ciągłości przekroju. Zarówno w strefie rozciąganej jak i ściskanej zarysowanie względnie miażdżenie poprzedzane jest uplastycznieniem i w obu przypadkach prowadzi ono do zerwania ciągłości ośrodka.

Odształcenia plastyczne są pierwszym objawem nadmiernego obciążenia materiału. Pojawienie się rys w konstrukcji jest poważnym zaburzeniem, naruszającym w sposób nieodwracalny współpracę pomiędzy betonem i stalą. Zarysowaniu towarzyszy skok naprężeń, zmieniający dość zasadniczo obraz strefy uplastycznienia. W. OLSZAK, [53], podał analizę pola naprężeń w ośrodkach jednorodnych w sąsiedztwie rys w oparciu o metody stosowane w teorii sprężystości i plastyczności. W oparciu o obszerny materiał doświadczalny B. BUKOWSKI, [6], omówił z inżynierskiego punktu widzenia przyczyny i skutki powstawania rys w konstrukcjach żelbetowych.

Jednym z głównych celów zabiegu sprężania jest podwyższenie wytrzymałości na zarysowanie. Mimo ścierających się opinii co do dopuszczenia, w ramach bezpiecznego użytkowania, konstrukcji zarysowanych, moment pojawienia się rys jest bardzo istotny w pracy ustroju sprężonego.

Stosowane powszechnie w konstrukcjach sprężonych materiały kruche reagują rysami na nadmierne obciążenia znacznie szybciej niż materiały ciągliwe. Zjawisko uplastycznienia zarówno strefy ściskanej jak i rozciąganej jest znacznie trudniejsze do uchwycenia przy badaniach laboratoryjnych. Możemy jednak przyjąć, że pojawienie się rys jest widocznym objawem zaawansowanego uplastycznienia.

2. Ogólne założenia teorii stanów sprężysto-plastycznych belki sprężonej

2.1. Założenia materiałowe. Analizę stanów elastoplastycznych przeprowadzimy przy założeniu, że materiał jest idealnie sprężysto-plastyczny i posiada stały moduł sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu $E_r = E_c$ oraz odnośne granice plastyczności Q_r i Q_c .

Ustalenie praw rządzących pracą materiału, którego dotyczą rozważania teoretyczne, ma dość istotne znaczenie. Nasza znajomość praw rządzących pracą betonu szczególnie w zakresie pozasprężystym jest niewystarczająca. W zakresie sprężystym istnieją również sprzeczne poglądy na istnienie i wielkość obszaru proporcjonalności (por. M. R. Roš, [60]), jak również zależności całkowitych odształceń od modułu sprężystości i wytrzymałości betonu. Sprzeczności te tłumaczy częściowo fakt braku ścisłych badań doświadczalnych, szczególnie dla betonu

wysokowartościowego, stosowanego w konstrukcjach sprężonych. Znaczna ilość zmiennych parametrów, występujących w technologii, utrudnia właściwą interpretację zjawisk.

W literaturze istnieje cały szereg równań dla funkcji odkształceń materiału. Stosowana dla betonu przez EMPA funkcja

$$(2.1) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_s \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{a\varepsilon_s}\right), \quad \sigma = E_s \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2a\varepsilon_s}\right)$$

ma kształt paraboli drugiego stopnia, przechodzącej przez środek układu, nie ma jednak stwierdzonego doświadczalnie obszaru sprężystego. Szczegółowe omówienie tego założenia przeprowadził B. BUKOWSKI.

Cytowane przez F. LEONHARDTA, [38], równanie funkcji odkształceń betonu, podane przez M. R. ROŠA, [61], w postaci hiperboli

$$(2.2) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{E} + 0,1 \frac{\sigma}{1000(\nu\beta_p - \sigma)},$$

uwzględnia markę betonu i lepiej odzwierciedla zakres sprężysty.

Badacz fiński Arvo YLINEN, [70], sformułował prawo wiążące naprężenia z odkształceniami dla materiałów o granicy plastyczności σ_{pl} , które wyraził wzorem:

$$(2.3) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{pl}}\right)^n\right].$$

Czynnik $[1 - (\sigma/\sigma_p)^n]$ stanowi tzw. poprawkę YLINENA, uwzględniającą zakres plastyczny w podstawowym wzorze Hooke'a.

Wykładnik n traktowany jest jako stała materiałowa i waha się w granicach 3 do 18. Wartości n dla różnych materiałów podali ROŠ, YLINEN, GEHLER, KÁRMÁN. W oparciu o monogramy Ylinena wyliczona wartość wykładnika n dla betonu marki 400 wyniosła 4. W jednej z następujących prac, [69], YLINEN doszedł do funkcji odkształcenia dla betonu w postaci

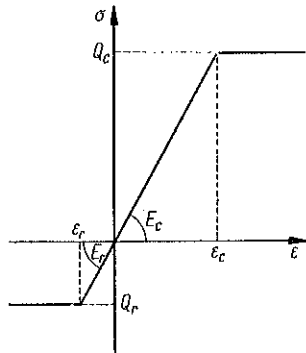
$$(2.4) \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \left[-\sigma_Q \ln \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_Q}\right) \right].$$

Wzory te wyprowadzone zostały w oparciu o różne badania doświadczalne i rozważania teoretyczne. Przyjęcie równania funkcji odkształceń w tej czy innej postaci ma stosunkowo niewielki wpływ na wyniki końcowe. Chodzi o to, aby z jednej strony przyjąć funkcję zbliżoną do wykresu rzeczywistego, z drugiej zaś strony aby można było w miarę możliwości łatwo przeprowadzić konieczne operacje matematyczne.

Zakładając, że materiał jest idealnie sprężysto-plastyczny, świadomie opieramy całą analizę na wykresie uproszczonym. W materiałach kruchych trudno jest dokładnie określić wartość naprężeń, powodujących początek odkształceń plastycznych. Jedynie przy krótkotrwałych obciążeniach odkształcenia cofają się w pełni sprężystość. Już przy obciążeniach długotrwałych lub obciążeniach powtarzających

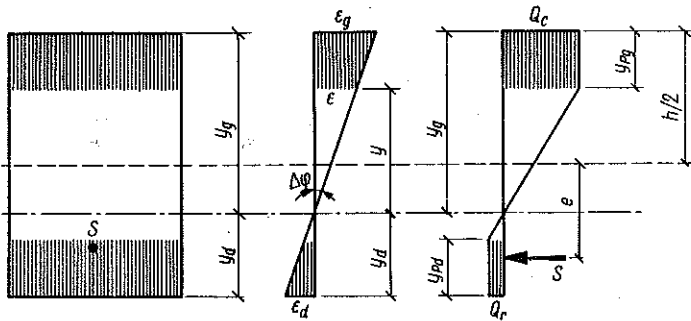
się, nie przekraczających obciążeń krytycznych, występują trwałe odkształcenia plastyczne. W naszych rozważaniach teoretycznych pominiemy te zjawiska uplastycznienia. Traktujemy wysokowartościowy beton jako materiał sprężysto-plastyczny o wyraźnej granicy plastyczności. Doświadczenia wykazują, że w przypadku elementów żelbetowych przy odkształceniach charakteryzujących wyczerpanie nośności przyjęcie zależności przedstawionej na rys. 1 znajduje swe fizyczne uzasadnienie. Takim założeniem posługujemy się też w praktyce przy obliczaniu momentu rysującego.

W pracach A. PHILLIPSA, [55], oraz B. G. NEALA, [48], analizujących stany plastyczne konstrukcji oparto się na wykresach materiału idealnie sprężysto-plastycznego. L. STABILINI, [68], w pracy na temat plastyczności w konstrukcjach inżynierskich stosuje również wykresy materiałowe złożone z dwu prostych.



Rys. 1

2.2. Założenia ogólne. Przedmiotem analizy będzie belka o stałym przekroju poprzecznym i prostoliniowej osi, której wymiary poprzeczne są niewielkie w stosunku do długości. Zakładamy punktowe podparcie oraz powolny wzrost obciążenia przy czym pomijamy istnienie ewentualnych naprężeń powstałych wskutek wcześniejszego obciążenia poza obszar sprężysty, tj. samonaprężeń. Przyjmujemy, że belka sprężona jest kablem ciągłym o nieziennej wartości siły sprężającej $S = \text{const}$, niezależnej od odkształceń doraźnych i reologicznych betonu. Pomijamy



Rys. 2

działanie sił tnących oraz zakładamy, że w przekroju nie występuje skręcanie. Pomijamy również zmiany wielkości siły S wskutek tarcia na długości belki i przyjmujemy, że składowa pozioma równa jest wprost sile sprężającej. Stosujemy techniczną teorię zginania pozostawiając w mocy założenie płaskich przekrojów.

Założenie płaskich przekrojów przy uwzględnieniu materiału sprężysto-plastycznego zapiszemy ogólnie (rys. 2):

$$(2.5) \quad \varepsilon = \Delta\varphi y,$$

skąd

$$(2.6) \quad \varepsilon_g = \Delta\varphi y_g, \quad \varepsilon_d = \Delta\varphi y_d.$$

Z rysunku 1 i 2 znajdziemy

$$(2.7) \quad \begin{cases} \text{dla } \sigma_g = Q_c & \varepsilon = \varepsilon_c = \frac{Q_c}{E_c} = \Delta\varphi (y_g - y_{pg}), \\ \text{dla } \sigma_d = Q_r & \varepsilon = \varepsilon_r = \frac{Q_r}{E_r} = \Delta\varphi (y_d - y_{pd}), \end{cases}$$

gdzie $\Delta\varphi$ oznacza wzajemny obrót 2 przekrojów oddalonych o jednostkę długości.

Z równania (2.7) przy założeniu $E_c = E_r$ otrzymamy

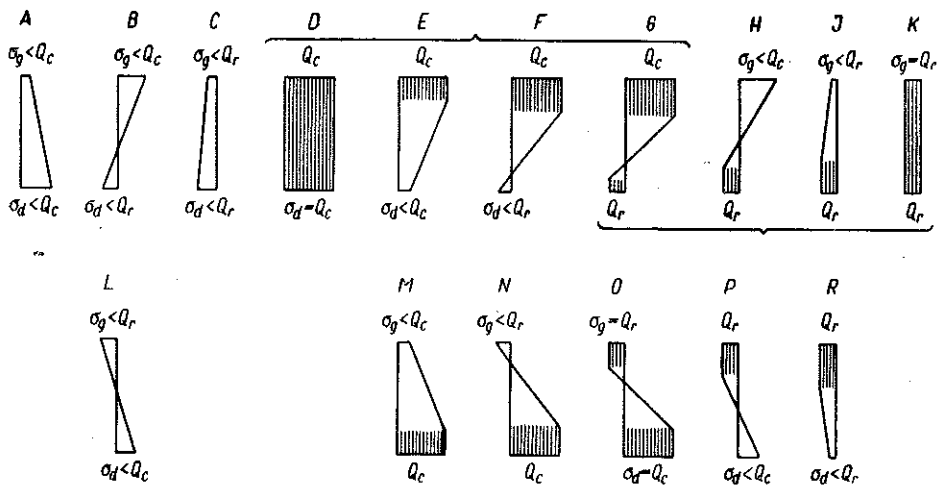
$$(2.8) \quad \frac{y_g - y_{pg}}{Q_c} = \frac{y_d - y_{pd}}{Q_r}.$$

Zgodnie z założeniami Y. GUYONA, [20], rozróżniamy dwa stany pracy ustroju sprężonego:

- stan bezużytkowy, w którym działa efektywna siła sprężająca i ciężar własny, obciążający ustrój w chwili sprężenia,
- stan użytkowy, w którym poza stanem poprzednim działają obciążenia użytkowe.

Rozpatrywać będziemy zjawiska zachodzące w stanie drugim w różnych fazach wywołanych zmianą obciążeń użytkowych przed zarysowaniem ustroju z pominięciem czynnika czasu.

2.3. Klasyfikacja przypadków uplastycznienia przekrojów sprężonych. Analizując rozkłady naprężeń w poszczególnych przekrojach belki sprężonej w stanie sprężystym i sprężysto-plastycznym wyodrębnić można 16 teoretycznie możliwych przypadków. Zestawiono je na rys. 3.



Rys. 3

Cztery pierwsze (*A, B, C, L*) obejmują stany sprężyste, dziesięć (*E, F, G, H, I, M, N, O, P, R*) stany sprężysto-plastyczne i dwa (*D, K*) stany plastyczne. Szczegółowym wyprowadzeniem wzorów, charakteryzujących rozkład naprężeń dla przypadków typowych (*F, G, H*), zajmiemy się w p. 3. Pominiemy przypadki pełnego uplastycznienia (*D, K*) pochodzące od naprężeń jednoosiennych, które nie występują w praktyce. Przypadki *I* i *R* stanu sprężysto-plastycznego, wywołanego naprężeniami rozciągającymi, w elemencie sprężystym występują bardzo rzadko. Przypadek ten może wystąpić np. w konstrukcji ściągu sprężonego.

Dla pozostałych przypadków interesujące nas wzory, określające położenie osi obojętnej, wielkość stref uplastycznienia i naprężeń skrajnych zestawimy w tabelicy 2. Zostaną one wyliczone z równań równowagi i zależności geometrycznych, analogicznie do przypadków *F, G* i *H*. W końcowej kolumnie zestawimy wartości kątów obrotów wzajemnych przekrojów dla poszczególnych przypadków rozkładu naprężeń, o których mowa będzie w p. 5.3.

3. Podstawowe zależności dla przekroju prostokątnego

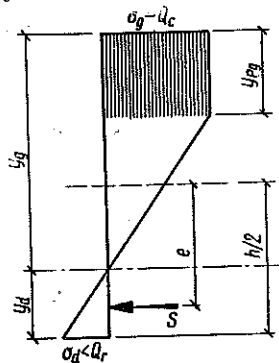
Zajmiemy się obecnie wyprowadzeniem podstawowych zależności, które pozwolą nam podać wzory na rozkład naprężeń w przekroju sprężonym w fazie odkształceń pozasprężystych w zależności od wielkości i przyłożenia siły sprężającej oraz momentów pochodzących od obciążeń zewnętrznych i ciężaru własnego. W tym celu zapiszemy równania równowagi w stanie elastoplastycznym osobno dla 3 możliwych stanów uplastycznienia przekroju, oznaczonych w klasyfikacji symbolami *F, G* i *H*.

Będziemy przy tym oznaczali: $S = \bar{S}/b$ wielkości siły sprężającej na jednostkę szerokości belki (b), oraz $M = \bar{M}/b$ wartość momentu zginającego od obciążeń stałych i użytkowych na jednostkę szerokości przekroju belki (b), e mimośród przyłożenia wypadkowej sił sprężających.

3.1. Uplastycznienie w strefie ściskanej (przypadek *F*). W stanie tym naprężenia ściskające osiągają wartość Q_c , położenie osi obojętnej określa wielkość y_g , zaś wielkość uplastycznienia strefy ściskanej charakteryzuje wartość y_{pg} . Naprężenia w strefie rozciąganej są mniejsze od granicy plastyczności na rozciąganie ($\sigma_d < Q_r$). Warunki równowagi sił i momentów (z rys. 4) zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad Q_c y_{pg} + \frac{Q_c}{2} (y_g - y_{pg}) - \sigma_d \frac{y_d}{2} = S,$$

$$(3.2) \quad Q_c y_{pg} \left(\frac{h - y_{pg}}{2} \right) + \frac{Q_c}{2} (y_g - y_{pg}) \left(\frac{h}{2} - y_{pg} - \frac{y_g - y_{pg}}{3} \right) + \frac{\sigma_d y_d}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{y_d}{3} \right) = M - Se.$$



Rys. 4

Warunek płaskich przekrojów (2.8) dla przypadku F zapiszemy w postaci

$$(3.3) \quad \frac{y_d}{\sigma_d} = \frac{y_g - y_{pg}}{Q_c}$$

Ponadto z rys. 4 zauważymy, że

$$(3.4) \quad h = y_g + y_d$$

Z powyższego układu równań, w których jako wielkości znane przyjmujemy S , e , M , Q_c i h , wyznaczmy interesujące nas wielkości y_g , y_d , y_{pg} i σ_d .

Przyrównując wartość σ_d z równań (3.1) i (3.3),

$$(3.5) \quad \sigma_d = \frac{Q_c(y_g + y_{pg}) - 2S}{y_d} = \frac{Q_c y_d}{y_g - y_{pg}},$$

otrzymamy

$$y_{pg}^2 - \frac{2S}{Q_c} y_{pg} + h^2 - 2h y_g + \frac{2S}{Q_c} y_g = 0,$$

skąd

$$(3.6) \quad y_{pg} = \frac{S}{Q_c} \pm \left[\frac{S^2}{Q_c^2} - h^2 + 2y_g \left(h - \frac{S}{Q_c} \right) \right]^{1/2}$$

We wzorze tym nieznaną wielkością określającą położenie osi obojętnej jest y_g . Przekształcając równanie (3.2) do postaci

$$\left(\frac{Q_c h - S}{3Q_c} \right) y_g - \frac{Sh}{6Q} + \frac{h y_{pg}}{3} - \frac{y_{pg}^2}{6} + \frac{Se - M}{Q_c} = 0$$

i podstawiając wartości σ_d i y_{pg} według równań (3.5) i (3.6) otrzymamy ostatecznie:

$$(3.7) \quad y_{gF} = \frac{5Q_c h^2 + 4Sh}{8(Q_c h - S)} + \frac{9Q_c (Se - M)^2}{2(Q_c h - S)^3} + \frac{(3Q_c h + 6S)(Se - M)}{2(Q_c h - S)^2}$$

Jeżeli wstawimy wartość y_g zgodnie z (3.7) do wzoru (3.6), to dostaniemy:

$$(3.8) \quad y_{pgF} = \frac{S}{Q_c} \pm \left[\left(\frac{S}{Q_c} + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{+9(Se - M)^2}{(Q_c h - S)^2} + \frac{3(Se - M) \left(h + \frac{2S}{Q_c} \right)}{(Q_c h - S)} \right]^{1/2}$$

Znając wartości y_{gF} i y_{pgF} możemy znaleźć pozostałe wartości i tym samym wyznaczyć rozkład naprężeń w przekroju.

3.2. Uplastycznienie (obustronne) w strefie ściskanej i rozciąganej (przypadek G). Przy oznaczeniach poprzednich warunki równowagi zgodnie z rys. 5 zapiszemy w postaci następującej:

$$(3.9) \quad Q_c y_{pg} + \frac{Q_c (y_g - y_{pg})}{2} - Q_r y_{pd} - \frac{Q_r (y_d - y_{pd})}{2} = S,$$

$$(3.10) \quad Q_c y_{pg} \frac{(h-y_{pg})}{2} + \frac{Q_c}{2} (y_g - y_{pg}) \left(\frac{h}{2} - y_{pg} - \frac{y_g - y_{pg}}{3} \right) + \\ + Q_r y_{pd} \frac{h-y_{pd}}{2} + \frac{Q_r}{2} (y_d - y_{pd}) \left(\frac{h}{2} - y_{pd} - \frac{y_d - y_{pd}}{3} \right) = M - Se.$$

Warunek płaskich przekrojów przyjmie postać:

$$(3.11) \quad \frac{Q_c}{y_g - y_{pg}} = \frac{Q_r}{y_d - y_{pd}}.$$

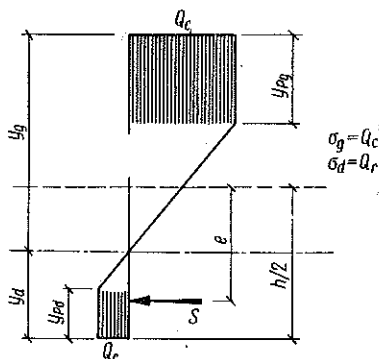
Z rysunku 5 wynika ponadto

$$(3.12) \quad y_g + y_d = h.$$

Rozwiązując układ tych równań wprowadzimy oznaczenie:

$$Q_r / Q_c = \kappa$$

Przyrównując wartości y_{pd} i y_{pg} z równań (3.9) i (3.11) otrzymamy kolejno



Rys. 5

$$y_{pg} = y_g \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \frac{2\kappa}{\kappa^2 - 1} \left(h + \frac{S}{\kappa Q_c} \right),$$

skąd

$$(3.13) \quad y_{pgG} = \frac{2Q_c(S + Q_r h)}{Q_c^2 - Q_r^2} - \frac{Q_c + Q_r}{Q_c - Q_r} y_{gG}, \\ y_{pd} = \frac{2\kappa(hQ_c - S)}{Q_c(\kappa^2 - 1)} - (h - y_g) \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}.$$

Na tej podstawie mamy

$$(3.14) \quad y_{pdG} = \frac{2Q_r(S - Q_c h)}{Q_c^2 - Q_r^2} + (h - y_{gG}) \frac{Q_c + Q_r}{Q_c - Q_r}.$$

W celu wyznaczenia poszukiwanej wartości y_g przekształcimy równanie (3.10). Po rozwinięciu i uporządkowaniu wyrażeń otrzymamy

$$(3.15) \quad y_{pg} \left(\frac{h}{2} - \frac{y_g}{3} \right) + \kappa y_{pd} \left(\frac{h}{6} + \frac{y_g}{3} \right) - \frac{y_{pg}^2}{3} - \frac{\kappa y_{pd}^2}{3} + \frac{h y_g}{6} (\kappa + 3) + \\ + \frac{h^2 \kappa}{6} - \frac{y_g^2}{3} (\kappa + 1) = \frac{2(M - Se)}{Q_c}.$$

Jeżeli podstawimy wartości y_{pg} i y_{pd} określone wzorami (3.13) i (3.14), to otrzymamy równanie drugiego stopnia z uwagi na poszukiwaną wartość y_g w postaci:

$$(3.16) \quad \left[\frac{-(\kappa + 1)}{3(\kappa - 1)} - \frac{1}{3} - \frac{(\kappa + 1)^2}{3(\kappa - 1)^2} + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{3(\kappa - 1)} - \frac{\kappa}{3} - \frac{\kappa(\kappa + 1)^2}{3(\kappa - 1)^2} \right] y_g^2 + \\ + \left[\frac{(\kappa + 1)h}{2(\kappa - 1)} + \frac{2(\kappa h + s)}{3(\kappa^2 - 1)} + \frac{h}{2} + \frac{4(\kappa h + s)}{3(\kappa - 1)^2} + \frac{h\kappa(\kappa + 1)}{6(\kappa - 1)} + \frac{2\kappa^2(h - s)}{3(\kappa^2 - 1)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\kappa h(\kappa+1)}{3(\kappa-1)} + \frac{h\kappa}{6} - \frac{4\kappa^2(h-s)}{3(\kappa-1)^2} + \frac{2h\kappa(\kappa+1)^2}{3(\kappa-1)^2} \Big] y_g - \frac{h(\kappa h+s)}{(\kappa^2-1)} - \frac{4(\kappa h+s)^2}{3(\kappa^2-1)^2} + \\
& + \frac{2\kappa^2(h^2-hs)}{6(\kappa^2-1)} - \frac{h^2\kappa(\kappa+1)}{6(\kappa-1)} + \frac{h^2\kappa}{6} - \frac{4\kappa^3(h-s)^2}{3(\kappa^2-1)^2} - \frac{\kappa h^2(\kappa+1)^2}{3(\kappa-1)^2} + \\
& + \frac{4\kappa^2 h(h-s)}{3(\kappa-1)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie tego równania zapiszemy w postaci ogólnej

$$(3.17) \quad y_{gG_{1,2}} = ah + \beta \frac{S}{Q_c} \pm \left[\gamma h^2 + \delta h \frac{S}{Q_c} + \varepsilon \frac{S^2}{Q_c^2} + \omega \frac{(Se-M)}{Q_c} \right]^{1/2},$$

w którym oznaczyliśmy

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{3\kappa^2 + \kappa}{(\kappa+1)^3}, & \beta &= \frac{1}{\kappa+1}, & \frac{S}{Q_c} &= s, \\
\gamma &= \frac{9\kappa^4 + 6\kappa^3 + \kappa^2}{(\kappa+1)^6}, & \delta &= \frac{-5\kappa^3 + 11\kappa^2 - 9\kappa + 3}{(\kappa+1)^4}, \\
\varepsilon &= \frac{-3(\kappa-1)^2}{(\kappa+1)^4}, & \omega &= \frac{6(\kappa^3 - \kappa^2 + 1)}{(\kappa+1)^4}.
\end{aligned}$$

Wartości współczynników α , β , γ , δ , ε i ω zależą od wielkości κ , która jest stosunkiem dwu wielkości fizycznych: granicy plastyczności na rozciąganie Q_r do granicy plastyczności na ściskanie Q_c danego materiału.

W oparciu o przeprowadzone badania własne, [56], [54], oraz zebrane materiały z badań zagranicznych można ustalić wartości κ dla różnych marek betonu. Wartości współczynników α , β , γ , ... dla typowych wartości podaje tablica 1.

Tablica 1

κ	α	β	γ	δ	ε	ω
0,1250	0,1207	0,8880	0,1889	1,2717	-1,4339	3,2263
0,1000	0,0976	0,9090	0,1728	1,5060	-1,6597	3,6541
0,0833	0,0819	0,9231	0,1575	1,6869	-1,8302	3,9654
0,0667	0,0659	0,9375	0,1382	1,8906	-2,0187	4,3066

Uwzględniając wartość (3.17) we wzorach (3.13) i (3.14) otrzymamy poszukiwane wartości dla stref uplastycznienia, co pozwala wyznaczyć rozkład naprężeń w przekroju.

3.3. Uplastycznienie w strefie rozciąganej (przypadek H). Przy oznaczeniach podanych na rysunku 6 warunki równowagi przybiorą postać:

$$(3.18) \quad \frac{\sigma_g y_g}{2} - \frac{Q_r (y_d - y_{pd})}{2} - Q_r y_{pd} = S,$$

$$(3.19) \quad \frac{\sigma_g y_g}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{y_g}{3} \right) + \frac{Q_r (y_d - y_{pd})}{2} \left(\frac{h}{2} - y_{pd} - \frac{y_d - y_{pd}}{3} \right) + Q_r y_{pd} \left(\frac{h}{2} - \frac{y_{pd}}{2} \right) = M - Se.$$

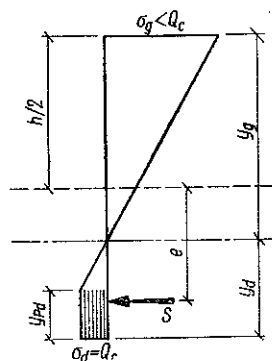
Warunek płaskich przekrojów ma postać:

$$(3.20) \quad \frac{\sigma_g}{y_g} = \frac{Q_r}{y_d - y_{pd}}.$$

Rozwiązując powyższy układ równań analogicznie jak w punkcie 3.1 otrzymamy

$$(3.21) \quad y_{pd} = -\frac{S}{Q_r} \pm \left[\frac{S^2}{Q_r^2} + 2y_d \left(h + \frac{S}{Q_r} \right) - h^2 \right]^{1/2},$$

$$(3.22) \quad y_{dH} = \frac{5Q_r h^2 - 4Sh}{8(Q_r h + S)} + \frac{9(Se - M)^2 Q_r}{2(Q_r h + S)^3} - \frac{(Se - M)(6S - 3Q_r h)}{2(Q_r h + S)^2}.$$



Rys. 6

Jeżeli podstawimy (3.22) do wzoru na wielkość strefy uplastycznionej przy rozciąganiu, to otrzymamy ostatecznie

$$(3.23) \quad y_{pdH} = -\frac{S}{Q_r} \pm \left[\left(\frac{S}{Q_r} - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{9(Se - M)^2}{(Q_r h + S)^2} + \frac{3(Se - M) \left(h - \frac{2S}{Q_r} \right)}{Q_r h + S} \right]^{1/2}.$$

Zestawienie wzorów dla przypadków A-J naszej klasyfikacji, wyprowadzonych w sposób analogiczny do przedstawionego dla przypadków F, G i H podaje tablica 2 (s.324-325). Omówienie wzorów kolumny ostatniej podamy w punkcie 5.3.

4. Podstawy teorii stanów sprężysto-plastycznych

Dotychczasowe rozważania doprowadziły nas przy poczynionych założeniach do kompletu wzorów, które pozwalają na zobrazowanie stanu naprężeń w prostokątnym przekroju sprężonym dla konkretnych przypadków sprężysto-plastycznych. Nie potrafimy jednak na razie określić, który przypadek naszej klasyfikacji wystąpi w rozważanym przekroju. Innymi słowy — nie sprecyzowaliśmy zakresu występowania poszczególnych form rozkładu naprężeń w przekroju.

4.1. Zakres występowania przypadków uplastycznienia. Czynnikiem istotnym dla określenia zakresu występowania różnych przypadków rozkładu naprężeń w przekroju jest ustalenie wielkości siły osiowej i momentu, które powodują w danym przekroju początek uplastycznienia lub przejście z jednego przypadku uplastycznienia w drugi.

Abstrahując od dotychczasowych rozważań nad przekrojem sprężonym weźmy pod uwagę przypadek ogólny obciążenia przekroju siłą osiową N działającą na

mimośrodku ζ lub, co na jedno wychodzi, siłą osiową N i momentem zginającym M . Zależności te możemy zapisać w postaci:

$$(4.1) \quad M = N\zeta,$$

$$(4.2) \quad N = S + P,$$

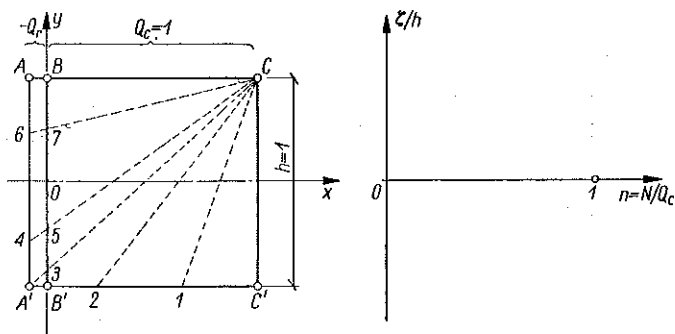
$$(4.3) \quad M = M_z - Se + Pc.$$

We wzorach tych P oznacza siłę podłużną zewnętrzną działającą na mimośrodek e , S i e odpowiednio siłę sprężającą i jej mimośrodek, M_z moment zginający, pochodzący od obciążeń zewnętrznych poprzecznych.

Obszary występowania poszczególnych przypadków rozkładu naprężeń przedstawimy na wykresach w układzie współrzędnych N, ζ oraz N, M . Krzywe graniczne, oddzielające poszczególne obszary wyznaczmy na drodze graficznej i analitycznej, co umożliwi łatwą kontrolę wyników.

Poszukujemy krzywej granicznej na wykresie N, ζ , której współrzędne reprezentują wielkość i mimośrodek siły osiowej, powodującej w danym przekroju początek odkształceń plastycznych, np. przy ściskaniu we włóknach górnych.

Odlóży w tym celu na osi odciętych w przyjętej skali wartość Q_c po stronie dodatniej i Q_r po ujemnej oraz oznaczmy na osi rzędnych w górę i w dół po połowie wysokości rozpatrywanego przekroju. Dla uproszczenia sprowadźmy wysokość h oraz wielkość Q_c do jedności. Na osiach tych budujemy figurę $ABCC'B'A'$ (rys. 7).



Rys. 7

Niech powierzchnia $BCC'B'$ reprezentuje wykres naprężeń ściskających przy pełnym uplastycznieniu przekroju (przypadek D klasyfikacji), zaś $ABB'A'$ pełne uplastycznienie pochodzące od naprężeń rozciągających (przypadek K).

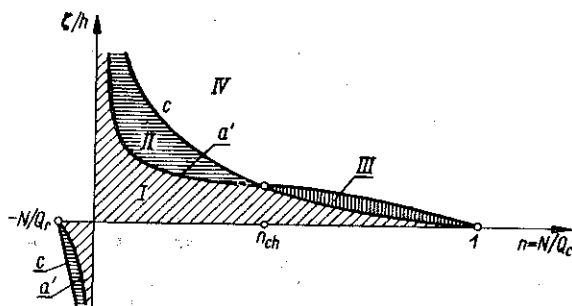
Pragnąc analizować graniczne rozkłady naprężeń, powodujące początek uplastycznienia, na górnej krawędzi przekroju wyznaczmy siły podłużne i mimośrodky dla kolejnych wykresów naprężeń, przechodzących stale przez punkt C , pamiętając że $BC = Q_c$. Jeżeli prostą CC' przesuwać będziemy po prostej $C'A'$ zachowując stale punkt C , to wykreślać ona będzie kolejne powierzchnie $BC1B'B$, $BC2B'B$

aż do $BCB'B$, reprezentujące jednoimienne naprężenia ściskające w całej wysokości przekroju.

Przechodząc dalej po prostej $C'A'$ aż do A' otrzymamy obrazy rozkładu naprężeń dwuimiennych, przy czym w przypadku wykresu $BC3A'B'B$ na obu krawędziach wystąpi początek uplastycznienia (Q_c na górnej i Q_r na dolnej). Przyjmując dalsze położenie prostej CC' wzdłuż krawędzi $A'-A$ otrzymamy kolejne stany $BC54A'B'B$ i $BC76A'B'B$, w których w strefie rozciąganej powiększa się strefa uplastycznienia, zaś górna krawędź strefy ściskanej znajduje się stale na granicy plastyczności Q_c . Powierzchnie zakreślane przez obracającą się wokół punktu C prostą CC' reprezentują wartość osiowej siły N , działającej na powierzchni jednostkowej. Wartość tę dzielimy przez Q_c i jako wielkość niemianowaną N/Q_c odkładamy ona osi odciętych n .

Gdy prosta CC' zajmie takie położenie na prostej AA' , przy którym pola reprezentujące naprężenie ściskające i rozciągające będą sobie równe, to wartość odciętej $n = 0$. Przy dalszej wędrówce prostej CC' naprężenia rozciągające będą większe od ściskających; wielkość N przybierać będzie wartości ujemne. Niemianowaną wielkość N/Q_c odkładamy na osi odciętych n po stronie ujemnej.

Na osi rzędnych odkładamy będziemy odległości środka ciężkości figur zakreślanych obracającą się prostą CC' .



Rys. 8

Reprezentuje on wartość mimośrodę ζ , który, dzielony przez h , nanosimy jako rzędną wykresu dla odpowiedniej wartości n . Tak sporządzona krzywa graniczna (oznaczymy ją literą c) pozwala od razu wyznaczyć zakres występowania przypadku, w którym na górnej krawędzi naprężenia ściskające będą na granicy plastyczności Q_c .

W analogiczny sposób sporządzony wykres dla punktu A' i prostej $A'A$, poruszającej się po bokach ABC i CC' pozwala wyznaczyć zakres występowania przypadku o granicznym stanie naprężeń Q_r na dolnej krawędzi (oznaczymy go literą a'). Jeśli obie te krzywe c i a' naniesiemy na wspólnym wykresie (rys. 8), to możemy wyodrębnić obszary występowania poszczególnych przypadków uplastycznienia w zależności od działającej siły osiowej i mimośrodę.

Obszar I (na rys. 8 zakreskowany ukośnie) reprezentuje stany sprężyste w całym przekroju (przypadek *A*, *B* i *C*). Punkty położone wewnątrz tego obszaru i na obu osiach o współrzędnych ξ/h i $N/Q_r = n$ reprezentują wzięte we właściwej skali wartości siły osiowej i mimośrod, które nie powodują w żadnym punkcie przekroju uplastycznienia. Krzywe ograniczające ten obszar są miejscem geometrycznym punktów, które reprezentują (w skali) wartości *N* i ξ , wywołujące stan graniczny początku uplastycznienia przekroju na jednej lub obu krawędziach. Jeżeli punkt taki leży na krzywej *c*, to naprężenia na górnej krawędzi osiągają granicę plastyczności ($\sigma_g = Q_c$), jeżeli na krzywej *a'*, to dolna krawędź ulega uplastycznieniu ($\sigma_d = Q_r$).

Obie krzywe ograniczające nie należą do obszaru I. Zauważmy jeszcze, że omówione graniczne stany uplastycznienia spowodowane zostaną osiową siłą ściskającą, jeżeli wybrany punkt leży na krzywych *c* lub *a'* w ćwiartce I wykresu lub też osiową siłą rozciągającą, gdy punkt leży na krzywej ograniczającej obszar I w ćwiartce III.

Punktem charakterystycznym n_{ch} danego wykresu nazwiemy przecięcie obu krzywych ograniczających *c* i *a'*. Współrzędne tego punktu reprezentują siłę podłużną i mimośród, które powodują początek uplastycznienia na obu krawędziach jednocześnie.

Punkt charakterystyczny rozgranicza kolejność przypadków uplastycznienia przekroju. Dla wartości $n < n_{ch}$ stan sprężysty przejść może tylko w stan sprężysto-plastyczny typu *H* ($\sigma_d = Q_r$). Dla $n = n_{ch}$, jak już mówiliśmy, nastąpi uplastycznienie obustronne typu *G*, o ile tylko $\xi = \xi/h_{ch}$. Dla $n > n_{ch}$ możliwe jest tylko uplastycznienie typu *F* ($\sigma_g = Q_c$). Jest to zrozumiałe, jeśli uzmysłowimy sobie, że $n > n_{ch}$ (przy braku innych sił osiowych $N = S$) oznacza belki silnie zbrojone, w których uplastycznienie wystąpi w strefie ściskanej prowadząc do zmiżdżenia betonu. Nie oznacza to, jak za chwilę zobaczymy, że przy dalszym wzroście mimośrodu ξ przy tej samej wartości *n* stan uplastycznienia *F* czy *H* nie może przejść do stanu *G*, tj. obustronnego uplastycznienia.

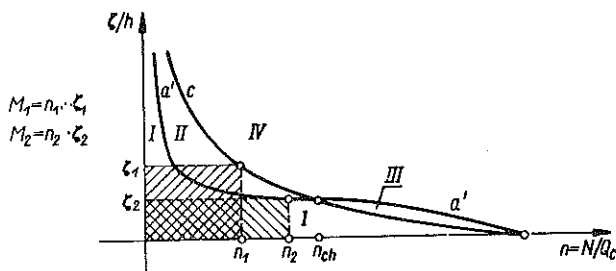
Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla III ćwiartki wykresu. Jest rzeczą oczywistą, że w [konstrukcji sprężonej siła rozciągająca jest rzadkością i może wystąpić tylko w przypadkach specjalnych konstrukcji (np. ściągów sprężonych), w których wystąpią znaczne osiowe siły rozciągające. Zauważmy z rys. 8, że stan sprężysty przy rozciąganiu może przejść tylko w stan sprężysto-plastyczny typu *H*, a wykres w tej części nie posiada punktów charakterystycznych analogicznych do n_{ch} w ćwiartce I.

Punkty charakterystyczne mają tę własność, że stykają się w nich wszystkie cztery obszary rozkładu naprężeń w przekrojach.

Moment graniczny powodujący początek uplastycznienia przy przejściu z obszaru I do obszarów II, III lub IV stanów sprężysto-plastycznych reprezentowany będzie przez powierzchnie prostokątów, których dwa boki leżą na osiach, a przeciwległy do początku układu wierzchołek znajdzie się na krzywej granicznej

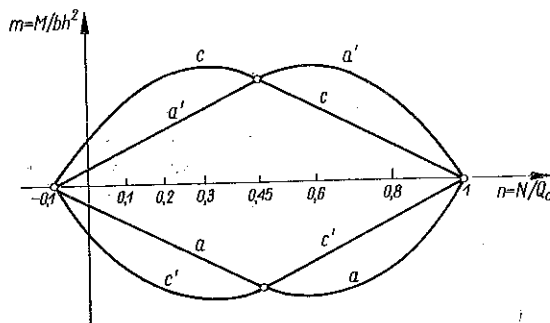
c lub a' (rys. 9). W istocie $M = N\xi$, zatem pole powierzchni prostokątów (w szczególnym wypadku kwadratu, gdy $N/Q_c = \xi/h$) tak zbudowanych będzie przedstawiać we właściwej skali wartość momentu granicznego.

Wynika stąd, że wartość granicznego momentu nie określa jednoznacznie przejścia do następnych obszarów uplastycznienia. Zdarzyć się może istnienie takich dwu punktów (jednego na krzywej granicznej c , drugiego na krzywej granicznej a'), których współrzędne dadzą jednakowe pola powierzchni (równe iloczyny), tzn. reprezentujących te same wartości momentów granicznych.



Rys. 9

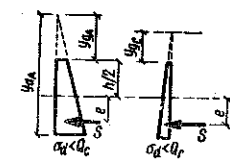
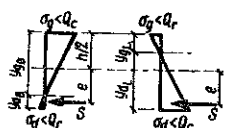
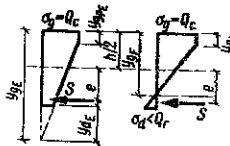
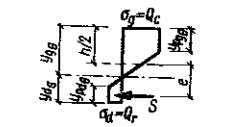
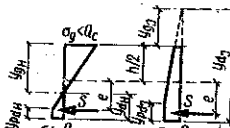
Wykres momentów granicznych powodujących początek uplastycznienia w przekroju [przejście od przypadku A, B i C (stanów sprężystych) do przypadków sprężysto-plastycznych] podaje rys. 10.



Rys. 10

Został on sporządzony w układzie n, m dla przekroju o stosunku naprężeń granicznych $\kappa = Q_r/Q_c = 0,10$ w oparciu o rozumowanie, jakie przeprowadziliśmy przy sporządzaniu krzywych granicznych w układzie $n, \xi/h$. Wykres zawiera analogiczne cztery obszary wartości momentów w ćwiartce I i IV układu, wywołujących w przekroju naprężenie w zakresie sprężystym (I) lub jeden z 3 stanów sprężysto-plastycznych. Punkt charakterystyczny przecięcia krzywych momentów granicznych wypada przy tej samej wartości odciętej co do krzywych granicznych na rys. 9 ($n = 0,445$).

Zestawienie wzorów dla określenia rozkładu naprężeń

Symbol	Przypadek	Położenie osi obojętnej
<p>A</p> <p>C</p>		$y_{gA} = \frac{Sh^2}{12(Se-M)} \frac{h}{2}$ $y_{dA} = \frac{Sh^2}{12(Se-M)} + \frac{h}{2}$
<p>B</p> <p>L</p>		$y_{gB} = y_{dL} = \frac{h}{2} \frac{Sh^2}{12(Se-M)}$ $y_{dB} = y_{gL} = \frac{h}{2} + \frac{Sh^2}{12(Se-M)}$
<p>E</p> <p>F</p>		$y_{gE} = y_{dF} = \frac{4Sh + 5Q_c h^2}{8(Q_c h - S)} + \frac{(6S + 3Q_r h)(Se - M)}{2(Q_c h - S)^2} + \frac{9Q_c (Se - M)^2}{2(Q_c h - S)^3}$
<p>G</p>		$y_{gG} = ah + \beta \frac{S}{Q_c} \pm \left[\gamma h^2 + \delta \frac{Sh}{Q_c} + \epsilon \frac{S^2}{Q_c^2} + \omega \frac{(Se - M)}{Q_c} \right]^{\frac{1}{2}}$ <p>wartości $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \omega$ wg tablicy 1</p>
<p>H</p> <p>J</p>		$y_{dH} = y_{dJ} = \frac{5Q_r h^2 - 4Sh}{8(Q_r h + S)} + \frac{(3Q_r h - 6S)(Se - M)}{2(Q_r h + S)^2} + \frac{9Q_r (Se - M)^2}{2(Q_r h + S)^3}$

Tablica 2

w przekroju sprężonym w stanie sprężysto-plastycznym

Wielkość strefy uplastycznienia	Wielkość naprężeń skrajnych	Kąt wzajemnego obrotu przekrojów końcowych
	$\sigma_{gA} = \frac{S}{h} - \frac{6}{h^2}(Se-M)$ $\sigma_{dA} = \frac{S}{h} + \frac{6}{h^2}(Se-M)$	
	$\sigma_{gB} = \sigma_{dL} = \frac{-6}{h^2}(Se-M) + \frac{S}{h}$ $\sigma_{dB} = \sigma_{dL} = \frac{-6}{h^2}(Se-M) - \frac{S}{h}$	$\int_0^{l/2} \Delta\varphi dx = \frac{1}{E} \int_0^{l/2} \frac{\sigma_d dx}{y_d}$
$y_{pgE} = y_{pgF} = \frac{S}{Q_c} \pm \left[\left(\frac{S}{Q_c} + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{9(Se-M)^2}{(Q_c h - S)^2} + \frac{3(Se-M) \left(h + \frac{2S}{Q_c} \right)}{(Q_c h - S)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\sigma_{dE} = \sigma_{dF} = \frac{Q_c(y_g + y_{pg}) - 2S}{y_g - h}$ $\sigma_{gE} = \sigma_{gF} = Q_c$	$\int_0^{l/2} \Delta\varphi dx = \frac{Q_c}{E_c} \int_0^{l/2} \frac{dx}{y_g - y_{pg}} = \frac{Q_c}{E_c} \int_0^{l/2} \frac{dx}{Ax^4 + Bx^2 + C + D + [E + F(Ax^4 + Bx^2 + C)]^{\frac{1}{2}}}$
$y_{pgG} = \frac{2Q_c(S + Q_r h)}{Q_c^2 - Q_r^2} - \frac{Q_c + Q_r}{Q_c - Q_r} y_{gG}$ $y_{pdG} = \frac{2Q_r(S - Q_c h)}{Q_c^2 - Q_r^2} + \frac{Q_c + Q_r}{Q_c - Q_r} (h - y_{gG})$	$\sigma_g = Q_c$ $\sigma_d = Q_r$	$\int_0^{l/2} \Delta\varphi dx = \frac{Q_c}{E_c} \int_0^{l/2} \frac{dx}{a + b[cx^2 + g]^{\frac{1}{2}}}$
$y_{pdH} = y_{pdJ} = -\frac{S}{Q_r} \pm \left[\left(\frac{S}{Q_r} - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{9(Se-M)^2}{(Q_r h + S)^2} + \frac{3(Se-M) \left(h - \frac{2S}{Q_r} \right)}{(Q_r h + S)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\sigma_{gH} = \sigma_{gJ} = \frac{Q_r(y_d + y_{pd}) + 2S}{y_d}$ $\sigma_{dH} = \sigma_{dJ} = Q_r$	$\int_0^{l/2} \Delta\varphi dx = \frac{Q_r}{E_r} \int_0^{l/2} \frac{dx}{y_d - y_{pd}} = \frac{Q_r}{E_r} \int_0^{l/2} \frac{dx}{Ax^4 + Bx^2 + C + D + [E + F(Ax^4 + Bx^2 + C)]^{\frac{1}{2}}}$

Oznacza to, że przy wartościach $N/Q_c = n > 0,445$ najpierw wystąpi uplastycznienie typu F , co już stwierdziliśmy przy rozpatrywaniu krzywych granicznych (rys. 8).

Dla osiowych sił rozciągających otrzymujemy obraz obszarów w ćwiartce IV. Momenty te są dodatnie. Podobny przebieg będą miały krzywe graniczne momentów ujemnych sporządzonych dla punktów A i C' w ćwiartce II i III. W ten sposób wykres obejmie wszystkie 16 możliwych przypadków rozkładu naprężeń ujętych naszą klasyfikacją. Zbiorczy wykres wszystkich obszarów podaje na końcu rozdziału rys. 16.

Obszar II (na rys. 8 zakreskowany poziomo) reprezentuje stany sprężysto-plastyczne odpowiadające przypadkowi H klasyfikacji, tzn. uplastycznienia w dolnej rozciąganej strefie przekroju. Obszar ten ograniczają krzywe graniczne c i a' o wartościach odciętych $n < n_{ch}$ z tym zastrzeżeniem, że krzywa a' należy do obszaru II, natomiast krzywa graniczna c należy do sąsiadującego obszaru IV (przypadek G obustronnego uplastycznienia). Punkty leżące wewnątrz tego obszaru i na krzywej ograniczającej a' wyznaczają również wierzchołki prostokątów, których powierzchnie reprezentują momenty powodujące stan sprężysto-plastyczny typu H .

Obszar III (na rys. 8 zakreskowany pionowo) reprezentuje stany sprężysto-plastyczne dla przypadku F . Ograniczają go krzywe graniczne a' i c o wartościach odciętych $1 > n > n_{ch}$, z których c należy do obszaru III.

Obszar IV (na rys. 8 niezakreskowany) reprezentuje stany obustronnego uplastycznienia (przypadek G).

Ograniczony jest on od dołu krzywymi granicznymi a' i c , które należą do tego obszaru. Obszar ten jest miejscem geometrycznym punktów, których współrzędne reprezentuje w skali wartości N i ξ , wywołujące w przekroju sprężonym obustronne, różnoimienne uplastycznienia.

Punkty te wyznaczają również powierzchnie reprezentujące moment powodujący w przekroju stan uplastycznienia dla przypadku G .

W każdym z omówionych wyżej obszarów ważne są właściwe dla danego przypadku wzory zestawione w tablicy 2.

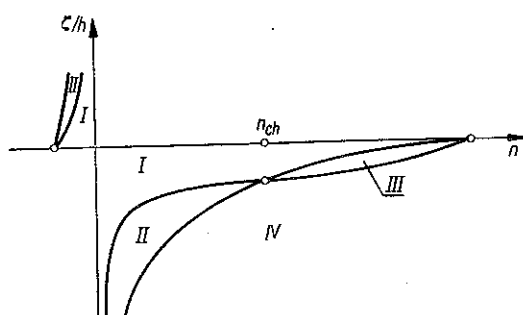
Sporządzając według tych samych zasad krzywe graniczne dla punktów A i C' (figury na rys. 7), otrzymamy symetryczne do rys. 8 obszary od I do IV usytuowane w II i IV ćwiartkach (rys. 11). Wykresy te reprezentują rozkłady naprężeń występujące np. w przekroju belki wspornikowej. Krzywe odnośnych momentów granicznych przebiegać będą w układzie m, n w II i III ćwiartce (por. rys. 10). Dyskusja zakresów poszczególnych obszarów będzie analogiczna jak dla krzywych punktów C i A' , nie będziemy jej więc powtarzali.

Pozostają jeszcze przypadki uplastycznienia przekroju przy jednoimiennych naprężeniach (przypadek E, I klasyfikacji). Wykresy krzywych granicznych tych przypadków przedstawia rys. 12. Są to wykresy sporządzone dla punktów B i B' figury na rys. 7. Stan sprężysty reprezentują proste poziome równoległe do osi odciętych.

Punkty charakterystyczne występują przy naprężeniu granicznym wywołującym początek uplastycznienia ($\sigma_g = Q_c$, $\sigma_g = Q_r$ dla punktu B' lub $\sigma_d = Q_c$, $\sigma_d = Q_r$ dla punktu B) na przecięciu z odpowiednimi wykresami dla punktów A , C , C' i A' .

Wykresy dla punktu B przebiegają w ćwiartce II i III dla punktu B' w I i IV. Nie są to jednak krzywe graniczne uplastycznienia, a jedynie punkty charakterystyczne są [granicznymi dla początku uplastycznienia przy naprężeniach jednoimiennych.

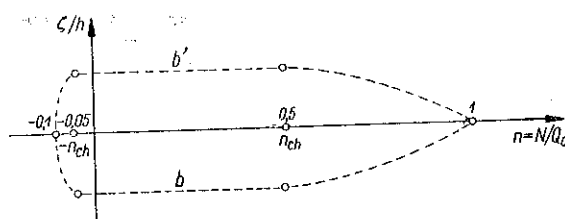
Stany plastyczne wystąpią dla $n > n_{ch}$.



Rys. 11

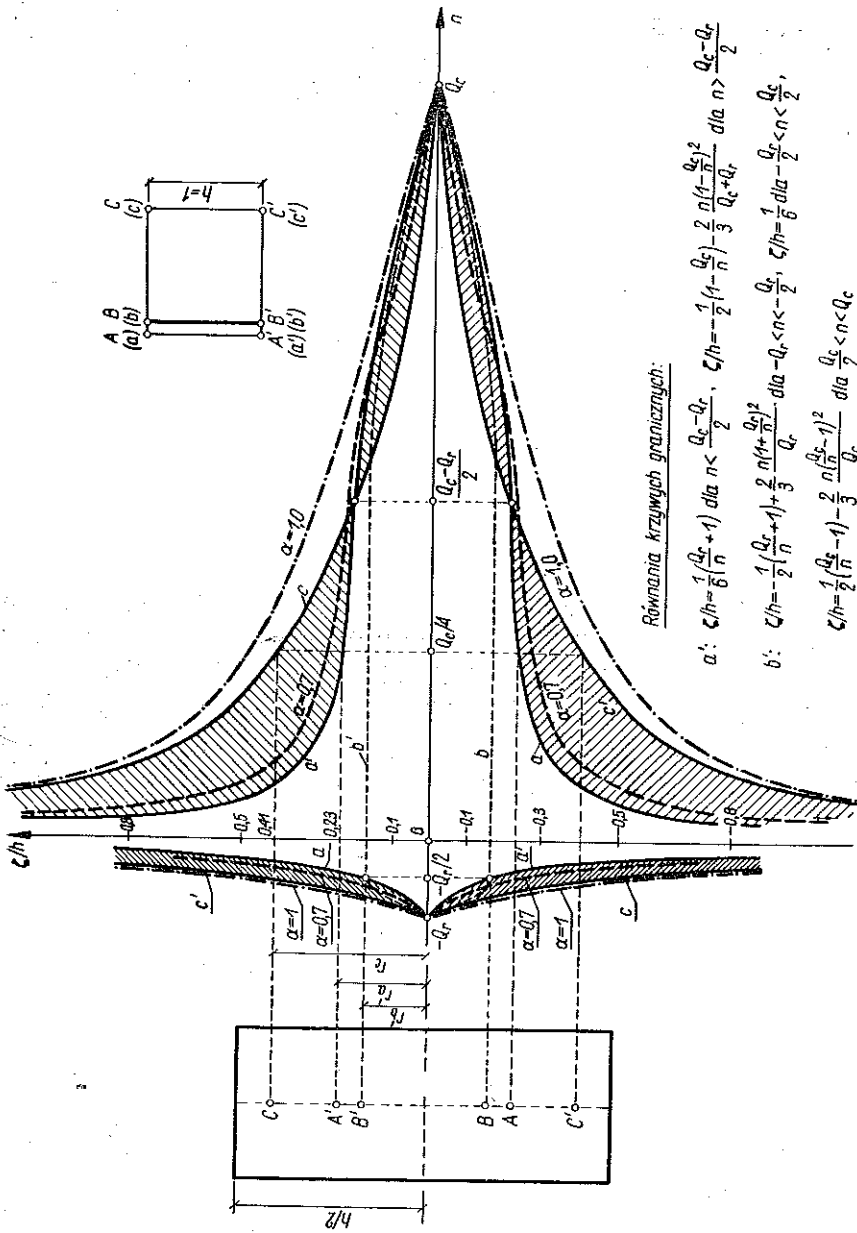
Dla zilustrowania sposobu odczytania naszych wykresów weźmy przykładowo wartość stałą $n = Q_c/4 = 0,25$ dla stosunku $\kappa = 0,1$ (rys. 13) i prześledźmy stany rozkładu naprężeń w przekroju przy zmianie wielkości mimośrodru ζ/h .

Dla wartości ζ/h w przedziale $0 < \zeta/h < 0,23$ wystąpią w przekroju stany wyłącz- nie sprężyste o naprężeniach jedno i dwumiennych. Gdy wielkość ζ/h przybierać będzie wartości $0,23 \leq \zeta/h < 0,41$, w przekroju wystąpi jednostronne uplastycznienie



Rys. 12

(przypadek H). Wielkość tego uplastycznienia i położenie osi obojętnej (y_{pd} oraz y_d) odczytamy stosując wzory tego przypadku z tablicy 2. Dla $\zeta/h \geq 0,41$ wystąpi obustronne uplastycznienie, którego wartości (y_{pd} , y_{pg} i y_d) odczytamy stosując wzory przypadku G . Możemy jeszcze wyznaczyć wartość momentu granicznego. Wyniesie on (w skali wykresu) na granicy uplastycznienia strefy rozciąganej $M = -Q_c/4 \xi/h = 0,25 \cdot 0,23 = 0,0575$. Moment graniczny obustronnego uplastycznienia



Równania krzywych granicznych:

a: $\zeta/h = \frac{1}{6} \left(\frac{Q_c}{n} + 1 \right)$ dla $n < \frac{Q_c - Q_r}{2}$, $\zeta/h = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q_c}{n} \right) - \frac{2}{3} \frac{n \left(1 - \frac{Q_c}{n} \right)^2}{Q_c - Q_r}$ dla $n > \frac{Q_c - Q_r}{2}$

b: $\zeta/h = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_c}{n} + 1 \right) + \frac{2}{3} \frac{n \left(1 + \frac{Q_c}{n} \right)^2}{Q_c}$ dla $-Q_r < n < -\frac{Q_c}{2}$, $\zeta/h = \frac{1}{6} \frac{Q_c}{n}$ dla $n < -\frac{Q_c}{2}$,

$\zeta/h = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_c}{n} - 1 \right) - \frac{2}{3} \frac{n \left(\frac{Q_c}{n} - 1 \right)^2}{Q_c}$ dla $\frac{Q_c}{2} < n < Q_c$

c: $\zeta/h = \frac{1}{6} \left(\frac{Q_c}{n} - 1 \right)$ dla $n > \frac{Q_c - Q_r}{2}$, $\zeta/h = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_c}{n} + 1 \right) - \frac{2}{3} \frac{n \left(1 + \frac{Q_c}{n} \right)^2}{Q_c + Q_r}$ dla $n < \frac{Q_c - Q_r}{2}$

Rys. 13

nia (przy wartości siły osiowej jak poprzednio $n = 0,25$ wyniesie $M = 0,25 \cdot 0,41 = 0,1025$).

W ten sposób mając sporządzone krzywe graniczne przy danym stosunku $\kappa = Q_r/Q_c$ możemy znając wartość osiowej siły i momentu od razu podać stan rozkładu naprężeń i wyliczyć ich konkretne wartości.

Mając gotowe wykresy dochodzi się szybko do konkretnych wartości rozkładu naprężeń w stanie sprężysto-plastycznym. Jediną trudność może stanowić ustalenie dla danego materiału wartości Q_r i Q_c , które wyznaczyć należy doświadczalnie.

Wyznaczenie krzywych granicznych metodą graficzną wymaga dość znacznego nakładu pracy, a krzywe te muszą być wyznaczone dla każdego stosunku $\kappa = Q_r/Q_c$ osobno. Nie trudno zauważyć, że są to krzywe pierwszego i drugiego stopnia. Równania tych krzywych wyprowadzimy obecnie analitycznie, przy czym ograniczymy się tylko do wykresu w układzie siła osiowa, moment, sprowadzonym do wielkości

$$n = \frac{N}{bh}, \quad m = \frac{M}{bh^2}.$$

Ze wzoru (4.1) mamy

$$(4.4) \quad \xi = m/n = \zeta/h.$$

Rozważmy krzywą graniczną (por. rys. 10) dla punktu C (rys. 14). Dla odkształceń sprężystych (na prawo od \bar{CA}') warunek granicznego rozkładu naprężeń ma postać

$$\sigma_g = Q_c = \frac{N}{bh} + \frac{6M}{bh^2}.$$

Wprowadzając oznaczenia (4.4) napiszemy

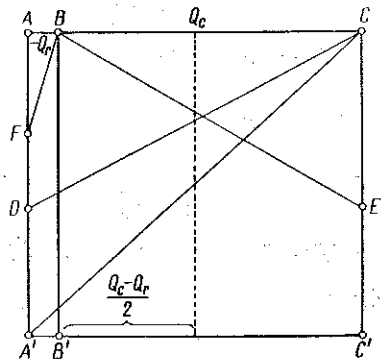
$$(4.5) \quad m = \frac{1}{6}(Q_c - n),$$

$$(4.6) \quad \xi = \frac{1}{6} \left(\frac{Q_c}{n} - 1 \right).$$

W układzie współrzędnych n, m równanie (4.5) przedstawia prostą, która przecina oś odciętych w punkcie $n = Q_c$ (co odpowiada polu $CC'B'B$), oś rzędnych w punkcie $m = Q_c/6$.

Zakres jej ograniczony jest odcinkiem \bar{CA}' wytyczającym pole $BCA'B'$, dla którego $n = (Q_c - Q_r)/2$. Będzie to zatem odcinek «krzywej granicznej» c w zakresie sprężystym

$$\frac{Q_c - Q_r}{2} < n < Q_c.$$



Rys. 14

Dla zakresu pozasprężystego

$$-Q_r < n < \frac{Q_c - Q_r}{2}$$

warunki równowagi sił i momentów (dla figury $CDA'B'B$ względem osi przekroju) napiszemy w sposób następujący:

$$N = \frac{b}{2} \overline{DA'} (Q_c + Q_r) - bhQ_r,$$

$$M = \frac{b}{2} \overline{DA'} (Q_c + Q_r) \left(\frac{h}{2} - \frac{\overline{DA'}}{3} \right).$$

Podstawiając (4.4) i eliminując $\overline{AD'}$ z powyższych równań otrzymamy

$$(4.7) \quad m = \frac{1}{2} (n + Q_r) - \frac{2}{3} \frac{(n + Q_r)^2}{Q_c + Q_r}.$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli przecinającej oś odciętych w punkcie $n = -Q_r$, która osiąga swoje maximum dla $n = (3Q_c - 5Q_r)/8$.

Krzywa graniczna c składa się zatem z odcinka parabolicznego i prostoliniowego, których równania wyznaczyliśmy, (4.7) i (4.5). Jej zakres przy założeniu odpowiedniego \varkappa pokrywa się z krzywą graniczną dla punktu C , wyznaczoną graficznie na rys. 10.

Analogicznie dochodzimy do równań krzywej granicznej a' dla punktu A' , ograniczającej obszar uplastycznienia przy rozciąganiu:

odcinek prostoliniowy

$$(4.8) \quad m = \frac{1}{6} (Q_r + n) \quad \text{dla} \quad -Q_r < n < \frac{Q_c - Q_r}{2},$$

odcinek paraboliczny

$$(4.9) \quad m = -\frac{1}{2} (n - Q_c) - \frac{2}{3} \frac{(n - Q_c)^2}{Q_c + Q_r} \quad \text{dla} \quad \frac{Q_c - Q_r}{2} < n < Q_c.$$

Krzywe graniczne dla punktów C' i A (rys. 14) wyznaczone analitycznie na tej samej drodze mają równania:

krzywa graniczna c' (punkt C')

$$(4.10) \quad m = -\frac{1}{6} (Q_c - n),$$

$$(4.11) \quad m = -\frac{1}{2} (n + Q_r) + \frac{2}{3} \frac{(n + Q_r)^2}{Q_c + Q_r};$$

krzywa graniczna a (punkt A):

$$(4.12) \quad m = -\frac{1}{6} (n + Q_r),$$

$$(4.13) \quad m = \frac{1}{2} (n - Q_c) + \frac{2}{3} \frac{(n - Q_c)^2}{Q_c + Q_r}.$$

Zakres stosowalności równań odcinków prostoliniowych ograniczony jest każdorazowo początkiem uplastycznienia strefy ściskanej lub rozciąganej $(Q_c - Q_r)/2$. Dla naprężeń jednoimiennych, odpowiadających wykresom sporządzonym dla punktu B (rys. 12), zakres sprężysty strefy ściskanej i rozciąganej (obejmujący figurę $BA'C'$, rys. 14) napiszemy

$$M = -\frac{hN}{6},$$

skąd

$$(4.14) \quad m = -\frac{n}{6} \quad \text{dla} \quad -\frac{Q_r}{2} < n < \frac{Q_c}{2}.$$

Dla zakresu pozasprężystego strefy ściskanej (figura $BEC'B'$) przy wartościach $n > Q_c/2$ równania równowagi mamy

$$N = bhQ_c - \frac{b}{2}Q_c\overline{CE}$$

$$M = -\frac{b}{2}\overline{CE}Q_c\left(\frac{h}{2} - \frac{\overline{CE}}{3}\right),$$

skąd otrzymamy

$$(4.15) \quad m = -\frac{1}{2}(Q_c - n) + \frac{2}{3}\frac{(Q_c - n)^2}{Q_r} \quad \text{dla} \quad \frac{Q_c}{2} < n < Q_c.$$

Dla zakresu pozasprężystego strefy rozciąganej (figura $BFA'B'$) otrzymamy analogicznie

$$(4.16) \quad m = \frac{1}{2}(Q_r + n) - \frac{2}{3}\frac{(Q_r + n)^2}{Q_r} \quad \text{dla} \quad -Q_r < n < -\frac{Q_r}{2}.$$

Równanie (4.15) przedstawia parabolę w ćwiartce II przecinającą oś odciętych w punkcie $(Q_c, 0)$ i przechodzącą w punkcie $Q_c/2$ w prostą (4.14), przecinającą początek układu i łączącą się w ćwiartce IV w punkcie $-Q_r/2$ z parabolą (4.16), która z kolei przecina oś odciętych w punkcie $(-Q_r, 0)$. Przebieg tej krzywej b zaznaczono na rys. 16 linią kreska-kropka.

Analogiczne równania dla krzywej b' odpowiadającej wykresom dla punktu B' przyjmą postać:

dla zakresu sprężystego

$$(4.17) \quad m = \frac{n}{6},$$

dla zakresu pozasprężystego strefy ściskanej

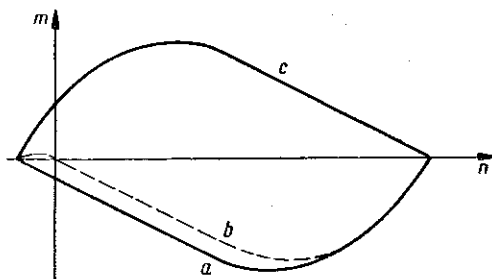
$$(4.18) \quad m = \frac{1}{2}(Q_c - n) - \frac{2}{3}\frac{(Q_c - n)^2}{Q_c}, \quad \text{jeśli} \quad Q_c < n < Q_c,$$

dla zakresu pozasprężystego strefy rozciąganej

$$(4.19) \quad m = -\frac{1}{2}(Q_r+n) + \frac{2}{3} \frac{(Q_r+n)^2}{Q_r} \quad \text{dla} \quad Q_r < n < -Q_r/2.$$

W oparciu o wprowadzone równania podano na rys. 16 zakres wartości n , m odpowiadających określonym formom wykresu naprężeń. Dla lepszej czytelności rysunku skalę rzędnej m zwiększono dwukrotnie. Obszar czysto sprężysty (zacięniowana na obwodzie figura rombowa) ma, jak widać, dość ograniczony zasięg.

Wykres na rys. 16 zawiera łącznie 16 obszarów odpowiadających naszej klasyfikacji, podanej w p. 2.3, co wyczerpuje wszystkie możliwe postacie rozkładu naprężeń.



Rys. 15

Jeśli rozpatrywać będziemy np. włókna górne przekroju, to zauważymy następujące 4 stany (rys. 15):

a) uplastycznienie przy ściskaniu (obszar powyżej krzywej c) odpowiada przypadkom D , E , F i G (rys. 3) oraz prostej CC' (rys. 14);

b) stan sprężysty przy ściskaniu (obszar pomiędzy krzywą c , b) odpowiada przypadkom A , B , H i M oraz prostej BC ;

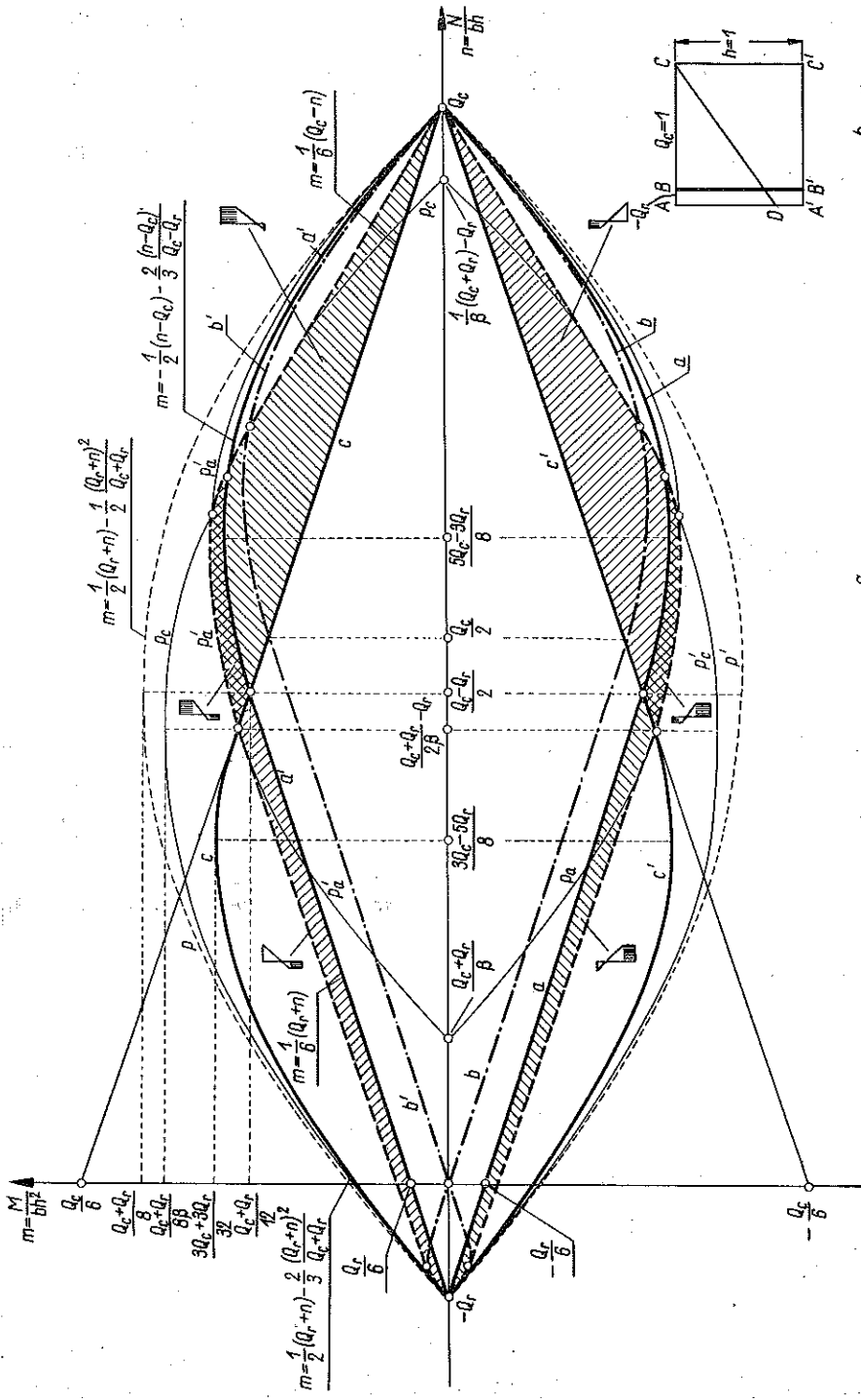
c) stan sprężysty przy rozciąganiu (obszar pomiędzy krzywą a , b) odpowiada przypadkom C , I , L , N oraz prostej AB ;

d) stan uplastycznienia przy rozciąganiu (obszar niżej krzywej a) odpowiada przypadkom K , O , P i R oraz prostej AA' .

Dla włókna dolnego uzyskamy podobny zakres obszaru, a ponieważ każdemu z obszarów włókna dolnego może odpowiadać każdy z 4 obszarów dla włókna górnego, dochodzimy znowu do cyfry 16 możliwych postaci rozkładu naprężeń.

Zauważymy jeszcze, że obszar leżący jednocześnie poza krzywymi c i c' (rys. 16), reprezentujący przypadek D , zredukuje się do punktu $(Q_c, 0)$ (odpowiada to figurze $BCC'B'$ z rys. 14) oraz analogicznie dla przypadku K (figura $ABB'A'$) do punktu $(-Q_r, 0)$.

Na rys. 13 podaliśmy wykres krzywych granicznych wyznaczonych na drodze graficznej w układzie n , ζ/h . Równanie tych krzywych możemy z łatwością otrzymać dzieląc obie strony odpowiednich równań dla krzywych momentów granicznych



a b

Wartości rzędnych zwiększono 2-krotnie.

Rys. 16

przez n . Pamiętamy bowiem, że zgodnie z (4.1) $M = N\zeta$. Równania tych krzywych podano na rys. 13, przy czym oznaczono je tymi samymi literami co na rysunku.

Krzywe a, b, a', b' w układzie $n, \zeta/h$ stają się dwugałęziowe z uwagi na zmienność znaku rzędnych przy przejściu od dodatnich do ujemnych wartości n . Przy $n \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty$ przy $n \rightarrow 0, \zeta \rightarrow -\infty$. Odpowiada to działaniu czystego momentu zginającego.

Zakres sprężysty naprężeń jednoimiennych w tym układzie przedstawia proste równoległe do osi odciętych, które wyznaczają obszar rdzenia przekroju w ujęciu klasycznym.

Rzędne punktów charakterystycznych w układzie n, m znajdziemy z łatwością na drodze analitycznej przyrównując wartości n i następnie m z równań (4.5) i (4.8) lub (4.7) i (4.9); stąd otrzymamy

$$n = \frac{Q_c - Q_r}{2}, \quad m = \frac{Q_c + Q_r}{12}.$$

W układzie $n, \zeta/h$ rzędną punktu charakterystycznego otrzymamy dzieląc przez siebie wartości m/n zgodnie z (4.4), skąd dostaniemy

$$\xi = \zeta/h = \frac{1}{6} \frac{Q_c + Q_r}{Q_c - Q_r}.$$

Jak pamiętamy, współrzędne te spełniają warunek równoczesnego początku uplastycznienia w górnym i dolnym włóknie i w tym sensie będą to współrzędne punktu osobliwego. W analogiczny sposób dojdziemy do wartości współrzędnych drugiego punktu osobliwego, leżącego na przecięciu krzywych granicznych c', a w ćwiartce II wykresu.

4.2. Nośność graniczna przekroju. Zakres stosowalności teorii. W omówionej teorii stanów sprężysto-plastycznych wyodrębniliśmy zakresy poszczególnych przypadków, nie analizując jednak możliwości występowania w praktyce wszystkich form wykresu naprężeń. Zależy to w dużym stopniu od cech fizycznych użytego materiału oraz czynników zewnętrznych, wywołujących stany naprężenia w przekroju. Wywody teoretyczne mogą być w zasadzie stosowane do dowolnego materiału o odpowiednich granicach plastyczności Q_c i Q_r ; w dalszych jednak rozważaniach ograniczymy się do przekroju betonowego. Podkreślimy od razu, że analizujemy stany naprężeń w samym betonie nie uwzględniając armatury. Wynika to z podstawowego założenia rozważania stanów przed zarysowaniem.

Z praktyki wiadomo, że wyczerpanie nośności betonu następuje przy określonym stopniu uplastycznienia powodując zerwanie ciągłości ośrodka (naruszenie spójności materiału) przez zarysowanie lub zmiążdżenie. Teoria dotycząca stanów przed zarysowaniem nie zajmuje się późniejszym rozkładem naprężeń, w którym wkracza do akcji armatura (ustalając nowy stan równowagi naprężeń). Stąd zary-

sowanie przekroju równoznaczne będzie w naszym przypadku z wyczerpaniem nośności.

W praktyce rozważania nasze będą miały zastosowanie bezpośrednio do określania nośności ustroju sprężonego bez pomocy armatury lub słabo zbrojonego, w którym zerwanie armatury następuje jednocześnie z zarysowaniem. Dla innych przypadków teoria nasza pozwala wyznaczać tylko moment rysujący lub moment niszczący przez zmiążdżenie strefy ściskanej, następujące przed zarysowaniem. Dla ustrojów pełno-sprężonych (tj. takich, w których nie dopuszczamy do zarysowania) stanami granicznymi są właśnie stany objęte bezpośrednio teorią.

Określenie stopnia uplastycznienia, które spowoduje zniszczenie przekroju, związane jest z przyjęciem odpowiedniej hipotezy zniszczenia. Doświadczenia wykazały, że osiągnięcie przez skrajne włókna granicy plastyczności nie wyczerpuje nośności przekroju. Analogicznie do hipotez wyężenia, stosowanych przy wyznaczaniu wytrzymałości materiału, musimy przyjąć dla naszych rozważań odpowiednią hipotezę zniszczenia. Badania laboratoryjne pouczają, że zniszczenie następuje, gdy uplastycznienie osiągnie dostateczny zakres strefy ściskanej lub rozciąganej. Wielkość tę przyjęto określać współczynnikiem wypełnienia bryły naprężeń α . Wyznaczenie tego współczynnika możliwe jest na drodze doświadczalnej lub teoretycznej przy przyjęciu, jak już wspomnieliśmy, odpowiedniej hipotezy nośności granicznej.

Omówimy najpierw podejście teoretyczne (na drodze analitycznej i graficznej), a następnie zobaczymy, jak wielkość tę można wyznaczyć doświadczalnie.

Najogólniejsza hipoteza zniszczenia przyjmuje pełne uplastycznienie strefy ściskanej i rozciąganej. Warunki granicznej równowagi możemy napisać (rys. 17) w sposób następujący:

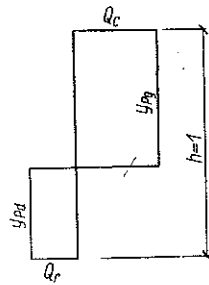
$$n = Q_c y_{pg} - Q_r y_{pd} = (Q_c + Q_r) y_{pg} - Q_r,$$

skąd

$$y_{pg} = \frac{n + Q_r}{Q_c + Q_r}$$

oraz

$$m = (Q_c + Q_r) \left(\frac{y_{pg} - y_{pd}^2}{2} \right).$$



Rys. 17

Po podstawieniu odpowiedniej wartości na y_{pg} otrzymamy

$$(4.20) \quad m = \frac{1}{2} (n + Q_r) - \frac{1}{2} \frac{(n + Q_r)^2}{Q_c + Q_r}$$

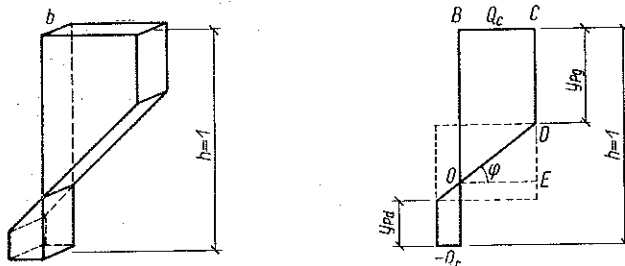
oraz

$$\xi = \zeta/h = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Q_r}{n} \right) - \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{Q_r}{n} \right)^2 n}{Q_c + Q_r}.$$

Jest to równanie paraboli, która w układzie współrzędnych n, m naniesiona jest na rys. 16. Przechodzi ona przez punkty $(Q_c, 0)$ i $(Q_r, 0)$ oraz osiąga maksimum dla $m = (Q_c + Q_r)/8$ i $n = (Q_c - Q_r)/2$. Analogiczny wykres uzyskamy graficznie przesuując prostą poziomą $A'C'$ (rys. 7) ku górze aż do położenia \overline{AC} . Zakreślone pola dadzą kolejne wartości $n, \zeta/h$, które naniesiono na rys. 13 jako obwiednię wszystkich możliwych wartości. W układzie n, m pokrywa się ona z wykresem ujętym analitycznie wzorem (4.20). Symetryczne gałęzie wykresów uzyskamy przy zamianie znaków naprężeń (ściskanie we włóknach dolnych, rozciąganie w górnych). Hipoteza ta zakłada równoczesne osiągnięcie pełnego uplastycznienia strefy ściskanej i rozciąganej.

Blizsza rzeczywistości będzie hipoteza przyjmująca zgodnie z doświadczeniami pewien stopień wypełnienia bryły naprężeń (rys. 18), określanym współczynnikiem α . Wartość tego współczynnika określa stosunek powierzchni pól $BCDO/BCEO$.

Stosunek ten może być różny dla naprężeń ściskających i rozciągających, powodujących uplastycznienie, zawsze jednak będzie się wahał w granicach $1/2 < \alpha < 1$.



Rys. 18

Przyjmując hipotezę zniszczenia opartą na wyżej zdefiniowanym współczynniku α , określimy teraz zakres stosowalności teorii dla różnych stanów uplastycznienia.

Dla obustronnego uplastycznienia przekroju (przypadek G) przy założeniu jednakowej wartości α na ściskanie i rozciąganie otrzymamy (por. rys. 18)

$$(4.21) \quad \alpha = \frac{y_{pg} + \frac{Q_c \operatorname{tg} \varphi}{2}}{y_{pg} + Q_c \operatorname{tg} \varphi},$$

skąd

$$(4.22) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2y_{pg}(1-\alpha)}{Q_c(2\alpha-1)}.$$

Równanie równowagi sił przyjmie w tym układzie postać:

$$n = y_{pg}(Q_c + Q_r) - Q_r + \frac{1}{2}(Q_c + Q_r)^2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Podstawiając (4.22) dojdziemy do postaci

$$(4.23) \quad n = y_{pg}(Q_c + Q_r) - \frac{Q_c \alpha + Q_r(1-\alpha)}{Q_c(2\alpha-1)} - Q_r.$$

Otrzymamy stąd interesującą nas wielkość granicznego uplastycznienia powodującego zniszczenie:

$$(4.24) \quad y_{pg} = \frac{n+Q_r}{Q_c+Q_r} \frac{Q_c(2\alpha-1)}{\alpha Q_c+Q_r(1-\alpha)}$$

Warunek równowagi momentów w przekroju (rys. 18) napiszemy w postaci następującej:

$$m = y_{pg}(Q_c+Q_r) \left(\frac{1-y_{pg}}{2} \right) + \frac{1}{2} (Q_c+Q_r)^2 \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{1}{2} - y_{pg} - \frac{1}{3} (Q_c+Q_r) \operatorname{tg} \varphi \right]$$

Podstawiając wartości y_{pg} (4.24) i $\operatorname{tg} \varphi$ (4.22) dojdziemy po przekształceniach do wzoru

$$(4.25) \quad m = \frac{1}{2} (n+Q_r) - \frac{\beta}{2} \frac{(n+Q_r)^2}{Q_c+Q_r},$$

w którym oznaczono

$$\beta = \frac{(2\alpha-1)Q_c[Q_c+2(1-\alpha)Q_r]}{[Q_c\alpha+(1-\alpha)Q_r]^2} + \frac{4(1-\alpha)^2(Q_c+Q_r)^2}{3[Q_c\alpha+(1-\alpha)Q_r]^2}$$

Wprowadzając jak poprzednio oznaczenie $\kappa = Q_r/Q_c$, otrzymamy po podzieleniu licznika i mianownika przez Q_c^2 postać ostateczną

$$(4.26) \quad \beta = \frac{(2\alpha-1)[1+2\kappa(1-\alpha)]}{[\alpha+\kappa(1-\alpha)]^2} + \frac{4(1+\kappa)^2(1-\alpha)^2}{3[\alpha+\kappa(1-\alpha)]^2}$$

Dla wartości $\kappa = 0,1$ (jak na rys. 16) oraz $\alpha = 0,7$ otrzymamy $\beta = 1,7076/1,5987 = 1,067 \approx 1,07$

Równanie (4.25) przedstawia parabolę położoną wewnątrz paraboli określonej wzorem (4.20). Jej maksimum wynosi $m = (Q_c+Q_r)8\beta$ przy wartości $n = (Q_c+Q_r)/2\beta - Q_r$, przecina ona oś n w punktach $n = -Q_r$ oraz $n = 1/\beta(Q_c+Q_r) - Q_r$. Naniesiono ją na rys. 16 oznaczając literą p_c .

Dla uplastycznienia obustronnego przy ściskaniu w dolnym włóknie (przypadek O klasyfikacji) otrzymamy parabolę symetryczną oznaczoną p'_c .

Dla danego stosunku wypełnienia bryły naprężeń (np. $\alpha = 0,7$) istnieje taki osobliwy stan obustronnego uplastycznienia, który wywołuje zniszczenie jednocześnie w strefie ściskanej i rozciąganej (wyjaśnimy to lepiej przy omawianiu graficznej metody wyznaczania zakresu stosowalności teorii).

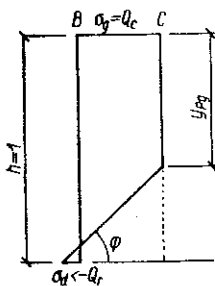
Podane wzory (4.24) i (4.25) dotyczyły warunku zniszczenia (zmiażdżenia) górnej strefy ściskanej. Wzory na warunek zniszczenia (zarysowania) dolnej strefy rozciąganej otrzymamy na tej samej drodze zamieniając wartości $-Q_r$ na Q_c i $-Q_c$ na Q_r . Otrzymamy w ten sposób:

$$(4.27) \quad m = \frac{1}{2} (n-Q_c) + \frac{\beta'}{2} \frac{(n-Q_c)^2}{Q_c+Q_r}$$

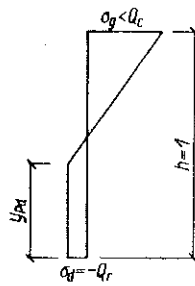
Wartość β' obliczymy ze wzoru (4.26) podstawiając zamiast κ wielkość $\kappa' = 1/\kappa = Q_c/Q_r$. Dochodzimy stąd do wykresu paraboli, którą oznaczyliśmy na rys. 16 przez p_a i parabolę symetryczną p'_a .

Wielkość β' przy powyższych wartościach liczbowych wyniesie $\beta' = 51,96/41,07 = 1,265$.

Obie te krzywe stosować można tylko dla stanów obustronnego uplastycznienia, a więc powyżej krzywych a' i c (na rys. 16). Zauważymy przy tym, że prawie na całym odcinku obustronnego uplastycznienia najpierw wystąpi zniszczenie spowodowane zarysowaniem (krzywa p_a i p'_a), a jedynie na niewielkim odcinku przy dużych wartościach n najpierw wystąpi zmiażdżenie. Punkt przecięcia krzywych p'_a i p_c (reprezentujący jednocześnie obustronne zniszczenie) zależy jest od wartości współczynnika α , który przyjęliśmy jednakowo dla ściskania i rozciągania. Przyjęcie większej wartości α dla rozciągania uzasadniałaby obecność armatury. Przy rosnącej wartości współczynnika α parabola p_c podnosi się i dla wartości $\alpha = 1$ również $\beta = 1$, a wzór (4.25) przyjmuje postać wzoru (4.20).



Rys. 19



Rys. 20

W strefie jednostronnego uplastycznienia (typu F , H , N i P) warunki równowagi określimy z rys. 19 i 20.

Dla przypadku F (rys. 19) otrzymamy

$$(4.28) \quad n = Q_c - \frac{1}{2}(1 - y_{pg})^2 \operatorname{ctg} \varphi,$$

oraz

$$(4.29) \quad m = (Q_c - n) \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - y_{pg}}{3} \right),$$

przy czym

$$(4.30) \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{(2\alpha - 1)Q_c}{2y_{pg}(1 - \alpha)}.$$

Podstawiając (4.30) otrzymamy po obliczeniach

$$(4.31) \quad n = \frac{Q_c}{1 - \alpha} \left[\frac{(1 - 2\alpha)}{4} y_{pg} + \frac{1}{2} + \frac{(1 - 2\alpha)}{4y_{pg}} \right],$$

a stąd wielkość granicznej strefy uplastycznienia da się wyrazić wzorem

$$(4.32) \quad y_{pg} = \frac{2n(1 - \alpha) - Q_c}{(1 - 2\alpha)Q_c} \pm \left[\left(\frac{2n(1 - \alpha) - Q_c}{(1 - 2\alpha)Q_c} \right)^2 - 1 \right]^{1,2}.$$

Jeśli teraz podstawimy wartość (4.32) do równania równowagi momentów (4.29), to otrzymamy równanie krzywej granicznej stosowalności teorii dla przypadku F . Postępując podobnie dla przypadku uplastycznienia H (rys. 20) otrzymamy równanie krzywej granicznej dla zarysowania w postaci

$$(4.33) \quad m = (n + Q_r) \left(\frac{1 - y_{pd}}{3} - \frac{1}{2} \right),$$

gdzie znowu

$$(4.34) \quad y_{pd} = \frac{2n(1-\alpha) + Q_r}{(2\alpha-1)Q_r} \pm \left[\left(\frac{2n(1-\alpha) + Q_r}{(2\alpha-1)Q_r} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}.$$

Równania (4.29) i (4.33) określają krzywe ograniczające stosowalność naszej teorii przy $\alpha = 0,7$ w zakresie przypadków F i H oraz N i P . Pozostaje jeszcze określenie stosowalności teorii przy jednostronnym uplastycznieniu typu E i I lub M i R , tzn. wewnątrz obszaru ograniczonego krzywymi b i b' .

Dla naprężeń jednego znaku przy wypełnieniu bryły naprężeń poza wartością $\alpha = 0,7$ musimy przyjąć pewną hipotezę wyczerpania nośności przekroju. Wydaje się rzeczą uzasadnioną przyjęcie hipotezy zilustrowanej na rys. 21.

Z chwilą osiągnięcia uplastycznienia granicznego (odpowiadającego stosunkowi α) na całej wysokości przekroju (figura $BCKB'$ rys. 21) dalszy wzrost uplastycznienia ilustrować będzie prosta KB' obracająca się wokół punktu K aż do położenia KC' . W ten sposób wartość y_{pg} nie będzie nadmiernie wzrastać przy malejącym obszarze sprężystym, co jest zgodne z praktyką. Graniczną wartość \bar{y}_{pg} (odcinek \overline{CK}) określimy

$$\bar{y}_{pg} = 1 - Q_c \operatorname{tg} \varphi,$$

skąd po podstawieniu $\operatorname{tg} \varphi$ ze wzoru (4.22) otrzymamy

$$(4.35) \quad \bar{y}_{pg} = 2\alpha - 1.$$

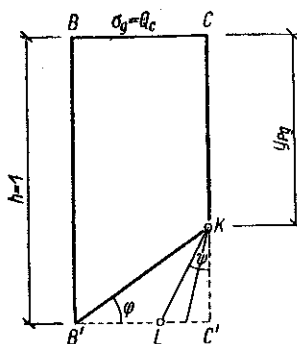
Równania równowagi dla tego stanu (np. dla figury $BCKLB'$) pozwala nam wyznaczyć równania krzywych stosowalności teorii dla tego przypadku w postaci

$$n = Q_c - \frac{1}{2}(1 - \bar{y}_{pg})^2 \operatorname{tg} \psi,$$

$$m = (Q_c - n) \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \bar{y}_{pg}}{3} \right),$$

skąd po podstawieniu (4.35) otrzymamy

$$(4.36) \quad m = (Q_c - n) \left[\frac{1}{2} - \frac{2(1-\alpha)}{3} \right]$$



Rys. 21

oraz dla rozciągania

$$(4.37) \quad m = (Q_r + n) \left[\frac{2(1-\alpha)}{3} - \frac{1}{2} \right].$$

Są to równania prostych przechodzących przez punkty odpowiednio $(Q_c, 0)$ i $(-Q_r, 0)$.

Otrzymaliśmy zatem krzywą ograniczającą zakres stosowalności teorii przy założeniu wartości n , Q_c i Q_r . Określa ją 6 równań: dwa w stanie obustronnego uplastycznienia, (4.25) i (4.27), po jednym przy jednostronnym uplastycznieniu, (4.29) i (4.33), oraz po jednym dla uplastycznienia przy naprężeniach jednoimiennych, (4.36) i (4.37). Symetryczną krzywą w układzie n, m otrzymamy w ćwiartce II i III (rys. 16) oraz w układzie $n, \xi/h$ w ćwiartce II i IV (rys. 13).

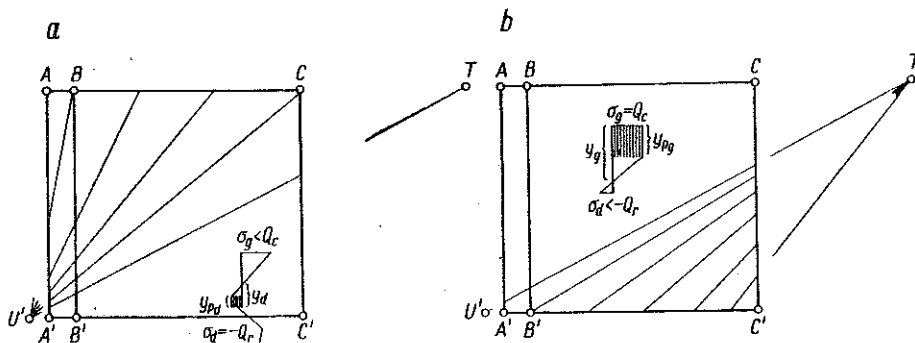
Znacznie prościej dochodzi się do krzywych ograniczających zakres stosowalności teorii przy danym współczynniku α na drodze graficznej.

Wartość współczynnika α z rys. 18 możemy określić w sposób następujący:

$$(4.38) \quad \alpha = \frac{bQ_r y_{pd} + bQ_r \left(\frac{y_d - y_{pd}}{2} \right)}{bQ_r y_d} = \frac{1}{2} + \frac{y_{pd}}{2y_d},$$

skąd przy ustalonej wartości α (np. $\alpha = 0,7$) otrzymamy $y_{pd} = 0,4 y_d$.

Pozwala to na wyznaczenie punktów T i U' (rys. 22a i 22b), z których poprowadzony pęk prostych wyznacza kolejne rozkłady naprężeń w przekroju o danym stosunku α .



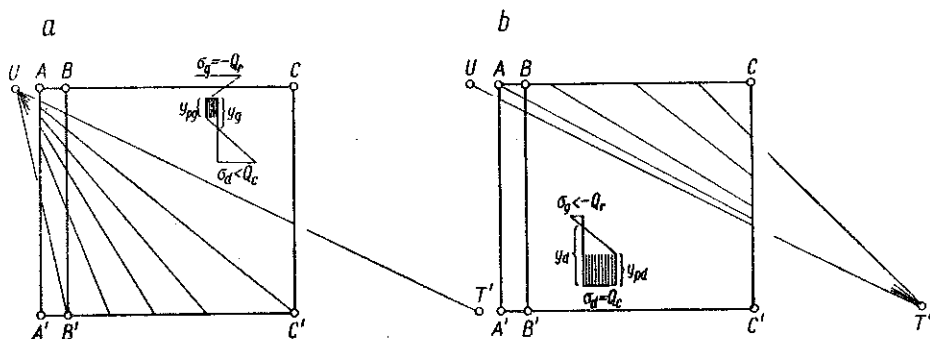
Rys. 22

Pęk prostych przechodzących przez punkt U' zawartych między prostymi $U'T$ i $U'A$ określa graniczne rozkłady naprężeń, powodujące zniszczenie przez zarysowanie strefy rozciąganej. Na wycinku $U'T$ do $U'C$ występują obustronne uplastycznienia [obszar powyżej krzywych a' i c (rys. 16) oraz poniżej krzywej $a = 0,7$], wycinek $U'C$ do $U'B$ reprezentuje uplastycznienie jednostronne typu H (obszar powyżej krzywej a' oraz poniżej krzywej $a = 0,7$ i krzywej c); wycinek $U'B$ do $U'A$ ilustruje jednoimienne uplastycznienia od rozciągania (przypadek I) przy hipotezie

zniszczenia nieco odmiennej od opisanej przy rys. 21, co jednak wpłynie tylko nieznacznie na przebieg krzywej. Dla powyższych 3 zakresów (odpowiadających 3 równaniom przy wyznaczaniu krzywej granicznej ważności teorii na drodze analitycznej) obliczymy współrzędne krzywej stosowności teorii analogicznie do sposobu podanego wyżej.

Proste przechodzące przez punkt U' , leżące poniżej UT , określają rozkład naprężeń, w których już nastąpiło zniszczenie przez zmiążdżenie strefy ściskanej i stąd stany graniczne tego obszaru wyznacza pęk prostych, przechodzących przez punkt T (rys. 22b). Kolejne wycinki pęku ($TU'-TA'$, $TA'-TB'$, $TB'-TC'$) odpowiadają analogicznie 3 typom równań przy zniszczeniu przez zmiążdżenie strefy ściskanej. Prosta TU' charakteryzuje punkt osobliwy przecięcia krzywych p_c i p'_a i określa rozkład naprężeń wywołujących jednoczesne zniszczenie strefy ściskanej i rozciąganej.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla przypadków M, N, O, P i R otrzymamy biorąc pod uwagę rys. 23a i 23b krzywą zakresu stosowności teorii dla tych przypadków, przedstawioną na rys. 13 w ćwiartce II i IV.



Rys. 23

Analiza wykresów podanych na rys. 16 pozwala na wyciągnięcie szeregu wniosków. Dla ustalonych wartości α i a zauważmy, że przy małych wartościach n , zniszczenie następuje przez zarysowanie bez wystąpienia uplastycznienia strefy ściskanej (w obszarze ograniczonym krzywą c , rys. 16). Przy większych wartościach n zniszczeniu przez zarysowanie towarzyszy już uplastycznienie strefy ściskanej, zaś dla dużych n zniszczenie następuje od sił ściskających (zmiążdżenie) nawet bez uplastycznienia strefy rozciąganej. Zakres wartości n , powodujących zmiążdżenie strefy ściskanej przy sprężystym rozciąganiu, jest niewielki, zaś zakres n powodujących uplastycznienie strefy rozciąganej zupełnie znikomy. Zwraca również uwagę fakt, że przyrost momentu powodującego przejście od początku uplastycznienia do zarysowania strefy rozciąganej (czyli różnica rzędnych krzywych a' i p'_a) jest rzędu kilku do kilkunastu procent.

Wnioski te dotyczą przyjętej wartości $\alpha = 0,7$. Dla większych wartości współczynnika wypełnienia strefy rozciąganej wartość rzędnej momentu rysującego

będzie wyższa. Rozszerzy się również zakres wartości n , przy którym zarysowaniu towarzyszyć będzie obustronne uplastycznienie.

Na zakończenie analizy wykresów (sporządzonych przy założeniu współczynnika wypełnienia $\alpha = 0,7$) warto zauważyć, że wartość analogicznego współczynnika u LEONHARDTA, [38], oscyluje w granicach 0,5 (dla trójkątnego rozkładu naprężeń) do 0,8. H. RÜSCH, [63], proponuje (w oparciu o materiał doświadczalny) zróżnicowanie wartości α w zależności od jakości betonu:

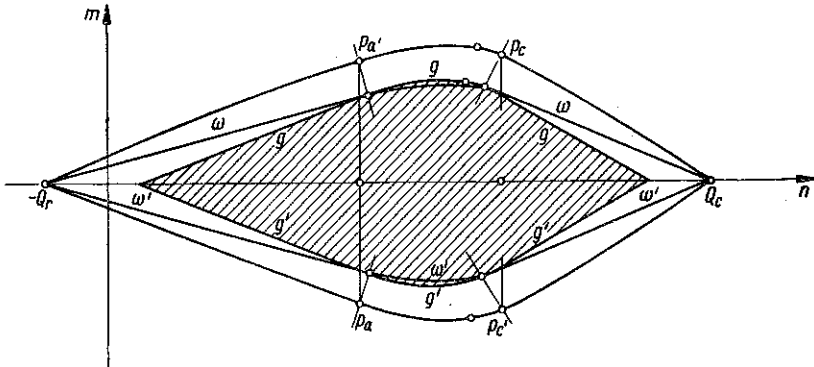
$$\alpha = 0,72 \text{ dla betonu } B 225,$$

$$\alpha = 0,61 \text{ dla betonu } B 600.$$

Według E. MÖRSCHA, [47], należy przyjmować wartości nieco mniejsze.

4.3. Bezpieczeństwo przekroju. Na podstawie dotychczasowych rozważań i przyjętych założeń potrafimy wyznaczyć granice obszaru, w którym wielkości n , m przy obciążeniu prostym nie spowodują zniszczenia przekroju.

Zakres tego obszaru, ograniczonego krzywymi p_a , p'_a , p_c i p'_c wykreślonymi dla przyjętego współczynnika wypełnienia bryły naprężeń $\alpha = 0,7$ (co jak widzieliśmy ma swój odpowiednik w wynikach badań doświadczalnych), przedstawiono na oddzielnym rys. 24.



Rys. 24

Dla lepszej czytelności sporządzono go w nieco przesadnych proporcjach, jako odpowiednią poszczególnych krzywych składowych, uwzględniając tylko zakres stosowalności każdego odcinka. Nie oznacza to jednak, że mamy prawo dysponować całym obszarem ograniczonym tą obwiednią. Pomiedzy obliczoną teoretycznie nośnością przekroju a jego rzeczywistą wytrzymałością istnieją zawsze nieuniknione rozbieżności, wynikające z założeń upraszczających i nieuwzględnionych wpływów ubocznych. Wielkość tych rozbieżności zależy zarówno od ścisłości samej teorii jak i od warunków realizacji. Dla pokrycia tych rozbieżności zastosować musimy odpowiednie współczynniki bezpieczeństwa.

Istnieje kilka sposobów wyznaczania współczynników bezpieczeństwa, [71]. W przypadku ogólnym, obciążenia elementu zarówno momentem zginającym jak

i zewnętrzną siłą podłużną, gdy obie te wielkości mogą równocześnie ulegać zmianom, wygodnie jest przyjmować obszar bezpieczny ograniczony krzywą równoległą do krzywej $p_a = 0,7$ (obszar zacieniowany na rys. 24). Takie przyjęcie rezerwy bezpieczeństwa jest niezależne od sposobu wzrostu wielkości n i m oraz gwarantuje dla każdej pary wielkości współrzędnych tego obszaru stałą, minimalną wartość bezpieczeństwa. Ta stała wartość, którą możemy każdorazowo ustalać, wyraża się w tym, że dowolny punkt odpowiedni g jest równo oddalony od krzywej granicznej p_a .

Kształt obszaru bezpiecznego (rys. 24) oraz sposób wyznaczania obwiedni, złożonej z kilku odcinków, nasuwają następujące spostrzeżenia, dotyczące «prostego» wzrostu obciążenia, tzn. wzrostu następującego po wspólnej normalnej do obu krzywych p_a i g (przy dodatnich momentach):

- przy dużych wartościach n ($n > Q_c/2$) wzrostowi siły podłużnej towarzyszy wzrost momentu;
- przy małym n wzrostowi obciążenia prostego towarzyszy wzrost momentu przy zmniejszeniu siły podłużnej;
- przy wartości n w otoczeniu $Q_c/2$ wzrost obciążenia następuje przy rosnącym momencie i prawie niezmienniej wartości siły podłużnej.

Z uwagi na niemal prostoliniowy przebieg skrajnych odcinków krzywej p (a zatem i g) wzrostowi obciążenia prostego w tych zakresach towarzyszyć będzie proporcjonalny wzrost (lub zmniejszenie) wielkości N w stosunku do M . Stosunek przyrostów M/N w tym zakresie jest niemal niezależny od wartości n , co odpowiada np. obciążeniu wstępnie sprężonego elementu podłużną siłą zewnętrzną o stałym mimośrodzie.

Drugi sposób wyznaczania obszarów gwarantujących bezpieczeństwo przekroju charakteryzuje się przyjęciem stałego współczynnika bezpieczeństwa ν . Mnożąc rzędne krzywej p_a przez ten stały czynnik otrzymamy krzywą oznaczoną na rys. 24 przez ω , która ogranicza obszar bezpieczny w tym drugim przypadku. Ten sposób podejścia będzie racjonalny w przypadku obciążenia zewnętrznego samym tylko momentem przy niezmienniej (lub wahającej się w niewielkich granicach) wartości siły osiowej. Przypadek taki wystąpi, gdy jedyną siłą podłużną będzie siła sprężająca $N = S$, którą możemy uważać za stałą.

Naszkicowane sposoby wyznaczania «obszarów bezpiecznych» na wykresach n i m nie mówiły na razie o samej wartości współczynników bezpieczeństwa, a dotyczyły jedynie ogólnej zasady ich wyznaczania, słusznej dla całej teorii.

Pamiętamy, że krzywa graniczna p_a składała się z 4 głównych gałęzi (nie licząc dalszych 2 skrajnych przy jednoimiennych odkształceniach plastycznych) wyznaczanych analitycznie lub graficznie dla różnych przypadków uplastycznienia p_a , p'_a , p_c i p'_c .

Dla każdej z tych 4 gałęzi, których odpowiedniki funkcjonalne będą składowymi obwiedni obszaru bezpiecznego g lub ω musimy dobrać współczynniki bezpieczeństwa kierując się następującymi wytycznymi:

1. W zakresie p_a i p'_a (tzn. przy rozciąganiu) współczynniki bezpieczeństwa w elementach zbrojonych mogą odpowiadać normalnym współczynnikom na zarysowanie. Obecność armatury zabezpiecza przekrój przed zniszczeniem z chwilą zarysowania. Dotyczy to przypadków G, H i J oraz O, P i R , przy czym dla przypadków G i O muszą być jednocześnie dobrane współczynniki na ściskanie.

2. W zakresie p_c i p'_c (tzn. przy ściskaniu) współczynniki bezpieczeństwa muszą odpowiadać normalnym współczynnikom pewności na zniszczenie, a zatem będą wyższe niż przy 1. Dotyczy to przypadków E, F i G oraz M, N i O .

3. Dla stanów bezużytkowych (gdzie działa jedynie sprężenie i ciężar własny), w których większe naprężenia występują na ogół w strefie dolnej, współczynniki bezpieczeństwa mogą być mniejsze niż dla stanów użytkowych.

Zastanówmy się jeszcze, w jaki sposób możemy zagwarantować bezpieczeństwo elementu z punktu widzenia naruszenia ciągłości ośrodką, inaczej mówiąc, jak należy dobrać przekrój i parametry sprężenia, aby nie naruszyć spójności przekroju.

Przejściu do stanu bezużytkowego do użytkowego towarzyszy odciążenie pewnej części przekroju, wywołane zmianą znaku momentu zginającego. Wzrost obciążeń nie przebiega na ogół monotonicznie tym nie mniej pomiędzy maksymalnym obciążeniem początkowym (bezużytkowym) a całkowitym obciążeniem użytkowym istnieje zazwyczaj dość znaczny odstęp czasu. Pozwala to na pominięcie przy rozpatrywaniu stanów użytkowych ewentualnych samonaprężeń wywołanych stanem początkowym, które ulegną relaksacji. Ponadto zakładamy, że obciążenia wywołujące odkształcenia plastyczne występują jedynie jako stany krótkotrwałe.

Rozważać będziemy oba stany niezależnie od siebie przyjmując, że obciążenia wzrastają monotonicznie. Ograniczymy się do przypadku zginanej belki sprężonej przy złożeniu $N = S, P = O$.

Zgodnie z punktem 4.2 dla każdej wielkości $n = S/bh$ istnieją dwie miarodajne wartości graniczne m , określane odpowiednimi wzorami zależnie od zakresu występowania n .

Dla uproszczenia wywodów zastąpmy krzywą graniczną p_a na odcinkach skrajnych przez proste. Przez odcinki skrajne będziemy rozumieli krzywe p_a i p'_a od przecięcia z krzywymi c i c' do punktu $(-Q_r, 0)$. Analogicznie wykresy p_c i p'_c od przecięcia z krzywymi a i a' do punktu $(Q_c, 0)$ zastąpimy również przez proste. Równania tych prostych zastępczych zapiszemy w postaci

$$(4.39) \quad m = \pm \frac{\bar{m}(n+Q_r)}{\bar{n}+Q_r}, \quad m = \pm \frac{\bar{m}(n-Q_c)}{\bar{n}-Q_c},$$

gdzie przez \bar{n} i \bar{m} oznaczono współrzędne punktów przecięcia odpowiednich krzywych (p_c i a' , p'_c i a' oraz p'_a i c).

Na odcinku środkowym, obustronnego uplastycznienia pozostawiamy wykresy paraboliczne bez zmian zgodnie ze wzorami (4.25) i (4.27).

Wartość odciętej \bar{n} punktu przecięcia się np. krzywych p_c i a' wyznaczmy z wykresu naprężeń na rys. 25, skąd otrzymamy:

$$\bar{n} = Q_c - \frac{1}{2}(Q_c + Q_r)^2 \operatorname{tg} \varphi, \quad y_{pg} = 1 - (Q_c + Q_r) \operatorname{tg} \varphi.$$

Podstawiając wartość $\operatorname{tg} \varphi$ według (4.22) obliczymy dla danego α :

$$y_{pg} = \frac{Q_c(2\alpha - 1)}{Q_c + 2Q_r(1 - \alpha)}$$

oraz

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(1 - \alpha)}{Q_c + 2Q_r(1 - \alpha)}.$$

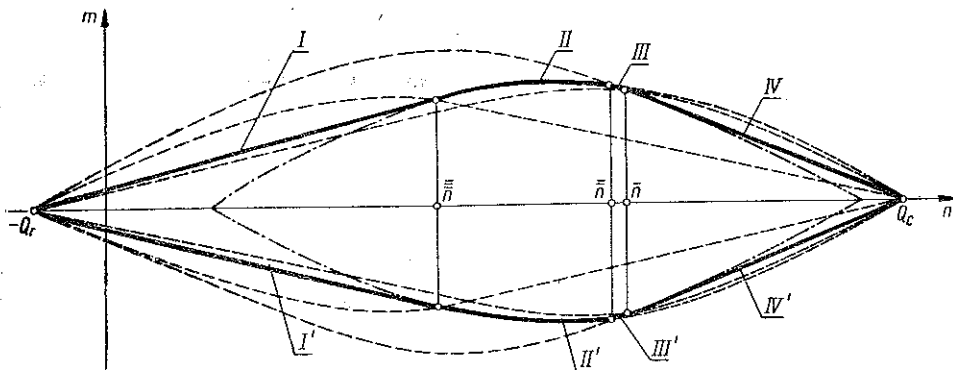
Po prostych podstawieniach otrzymamy ostatecznie wartość odciętej punktu przecięcia krzywych p_c i a' w postaci

$$(4.40) \quad \bar{n} = \frac{\alpha Q_c^2 - (1 - \alpha) Q_r^2}{Q_c + 2Q_r(1 - \alpha)} = Q_c \frac{\alpha - \kappa^2(1 - \alpha)}{1 + 2\kappa(1 - \alpha)}.$$

Wartość rzędnej punktu przecięcia m otrzymamy wstawiając wartości (4.40) do odpowiedniego wzoru, w tym przypadku do (4.9); otrzymamy stąd

$$\bar{m} = \frac{Q_c}{2} \frac{(\kappa + 1)^2}{2\kappa + \frac{1}{1 - \alpha}} - \frac{2Q_c}{3} \frac{(\kappa + 1)^3}{\left(2\kappa + \frac{1}{1 - \alpha}\right)^2}.$$

Współrzędne przecięcia pozostałych krzywych wyliczymy analogicznie, a wstawiając te wartości do wzoru (4.39) otrzymamy odpowiednie 4 równania prostych zastępczych.



Rys. 26

Mając do dyspozycji w ten sposób określoną krzywą graniczną (rys. 26), możemy zauważyć, że projektowanie przekroju sprężonego będzie się sprowadzało na odcinkach skrajnych do rozwiązania pewnego układu równań liniowych, a na odcinkach środkowych (złożonych również z 2 krzywych) do równań drugiego stopnia.

Nie wdając się w szczegóły projektowania (co nie jest tematem pracy) podamy tylko najogólniej drogę postępowania przy projektowaniu przekroju z uwzględnieniem stanów sprężysto-plastycznych. I tak np. dla lewej części wykresu na rys. 26 wykorzystamy pierwszy ze wzorów (4.39), zamieniając układ 2 nierówności przez równania (stosownie do znaków plus i minus). Przechodząc od wartości n i m do S i M napiszemy dla najprostszego ujęcia projektowania: $M = -Se + Mg$ dla stanu początkowego, $M = -Se + Mg + Mp$ dla stanu użytkowego. Jeśli oznaczymy ponadto dla dodatniej części wykresu

$$\bar{n} = \bar{S}/bh, \quad \bar{m} = \bar{M}/bh^2$$

i analogicznie dla momentów ujemnych \bar{S}'/bh i \bar{M}'/bh^2 oraz wprowadzimy zróżnicowane współczynniki bezpieczeństwa ν_1 i ν_2 , to otrzymamy następujący układ równań liniowych:

$$(4.41) \quad \begin{aligned} \frac{\bar{M}'(S+bhQ_r)}{\nu_1(\bar{S}'+bhQ_r)} &= -Se+Mg, \\ \frac{\bar{M}(S+bhQ_r)}{\nu_2(\bar{S}+bhQ_r)} &= -Se+Mg+Mp. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ (np. odejmując stronami przy założeniu, że ciężar stały kompensuje się przy sprężaniu) możemy wyznaczyć dwie wielkości znając pozostałe. Możemy np. zakładając b i h obliczyć S i e albo zakładając znajomość stosunku S/bh (naprężenia średniego) oraz stosunku b/h obliczyć e i h .

Można również bez trudności ustawiać warunki ekstremalne dla wyznaczenia optymalnych wymiarów przekroju i parametrów sprężania przy uwzględnieniu stanów sprężysto-plastycznych. Można wreszcie opierając się na podanej teorii rozwijać różne metody projektowania znane dla zakresów sprężystych.

Dla odcinków środkowych rachunki będą nieco bardziej skomplikowane, ale tok postępowania będzie podobny. Np. przecięcie obwiedni p_c i p'_a otrzymamy z równań (4.25) i (4.27), skąd otrzymamy wartość odciętej

$$(4.42) \quad \bar{n} = \frac{\beta'Q_c - \beta Q_r}{\beta + \beta'} \mp \frac{Q_c + Q_r}{\beta + \beta'} (\beta - \beta\beta' + \beta')^{1/2},$$

określającej stosowalność wzorów do napisania równań typu (4.41). Ograniczenie odcinka środkowego, wyznaczonego dwoma krzywymi drugiego stopnia od lewej strony otrzymamy wyznaczając odcięta przecięcia krzywych p'_a i c . Wartość tej odciętej i wyznaczonej stąd rzędnej posłużą nam z kolei do określenia stosowalności wzorów (4.33) i (4.27)

$$(4.43) \quad \bar{n} = Q_r \frac{\kappa'^2(1-a) - a}{1 + 2\kappa'(1-a)}.$$

W ten sposób otrzymujemy cztery zakresy projektowania, w których stosować będziemy właściwe wzory wyjściowe. Zakresy te ilustruje rys. 26. Idąc od lewej

otrzymamy zakres pierwszy dopuszczający uplastycznienie w strefie rozciąganej, następnie dwa zakresy obustronnego uplastycznienia i zakres czwarty, w którym dopuszczamy uplastycznienie tylko w strefie ściskanej.

Na zakończenie rozdziału dotyczącego bezpieczeństwa przekroju omówimy pojęcie uogólnionego rdzenia przekroju, rozszerzonego na stany sprężysto-plastyczne.

Pojęcie rdzenia właściwego jako pojęcie geometryczne, związane z wymiarami przekroju i niezależne od naprężeń nie ulegnie zmianie przy przejściu do stanów sprężysto-plastycznych.

Natomiast pojęcie rdzenia uogólnionego, które jest zależne od stosunku naprężeń, występujących na obu krawędziach w ramach naprężeń dopuszczalnych nie da się transponować do stanów pozasprężystych.

GUYON, [20], określa rdzeń uogólniony jako tę część przekroju, w której przyłożony środek ciśnień wywołuje naprężenie w danych granicach. Prace polskie, [30] i [31], definiują uogólniony rdzeń przekroju dla danej siły podłużnej S jako miejsce geometryczne punktów, w których przyłożona siła S wywołuje naprężenia w granicach naprężeń dopuszczalnych.

Promień rdzenia uogólnionego r_g , r_d , w granicach którego powinien się znaleźć środek ciśnień określony jest w pracy [30] w sposób następujący:

$$r_d = \min\left(r_{wd} \frac{\sigma_0 - \sigma_{g1}}{\sigma_0}\right) \quad \text{lub} \quad r_d = \min\left(r_{wg} \frac{\sigma_{d1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right),$$

$$r_g = \min\left(r_{wg} \frac{\sigma_0 - \sigma_{d2}}{\sigma_0}\right) \quad \text{lub} \quad r_g = \min\left(r_{wd} \frac{\sigma_{g2} - \sigma_0}{\sigma_0}\right),$$

w którym σ_{g1} i σ_{d1} oznacza odpowiednie naprężenia na krawędzi górnej lub dolnej w stanie bezużytkowym, σ_{d2} i σ_{g2} odpowiednie naprężenia na krawędzi dolnej lub górnej w stanie użytkowym, σ_0 naprężenie średnie oraz r_{wg} , r_{wd} górny i dolny rdzeń właściwy przekroju.

Rozszerzenie pojęcia rdzenia uogólnionego na stany sprężysto-plastyczne natrafia na trudności formalne. Pojęcie tego rdzenia oddawało nam wielkie usługi przy projektowaniu trasy kabla i wykreślaniu obwiedni granicznej. Zabiegi te miały na celu uchronienie konstrukcji od naprężeń niebezpiecznych w ramach tzw. naprężeń dopuszczalnych. W stanie sprężysto-plastycznym te naprężenia są z reguły przekraczane.

Zadaniem naszym jest zanalizowanie pojęcia takiego rdzenia, w którym przyłożony środek ciśnień nie wywoła naprężeń większych od jednego z danych stanów sprężysto-plastycznych. Formułując to inaczej zapytajmy, jak zmieniają się warunki dla wartości promienia rdzenia uogólnionego w przypadku dopuszczenia naprężeń pozasprężystych.

Weźmy dla przykładu wartość r_g . Definicja dla stanu sprężystego podaje, że należy wziąć mniejszą z dwu wartości:

$$r_{wg} \frac{\sigma_0 - \sigma_{d2}}{\sigma_0}, \quad r_{wd} \frac{\sigma_{g2} - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

Wielkości r_{wg} i r_{wd} jako niezależne od naprężeń nie ulegną zmianie również w stanie pozasprężystym i dla przekroju prostokątnego wyniosą 1/6 (por. wykresy b i b' na rys. 13 i 16). Stąd

$$r_g = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sigma_{d2}}{\sigma_0} \right).$$

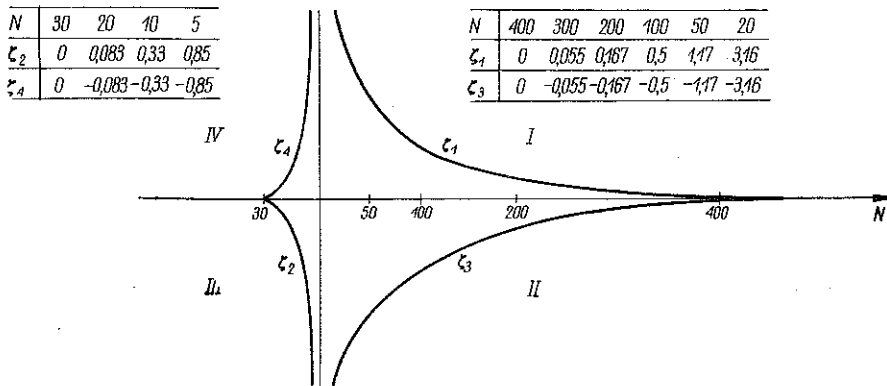
Jeśli założymy, że $\sigma_0 = N/A$, zaś $A = bh = 1$, to $\sigma_0 = N$ i stąd

$$r_g = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sigma_{d2}}{N} \right) = f(N),$$

Promień rdzenia uogólnionego możemy przedstawić jako pewną wartość położenia środka ciśnieni i przyjmując $\sigma_{d2} = Q_r$, otrzymamy

$$r_g = \zeta_1 = r_{wg} \left(1 - \frac{Q_r}{N} \right) = f(N).$$

Zależność tej postaci $\zeta = f(N)$ znamy z rozważań nad krzywymi granicznymi przy stosunku $(\zeta/h) : (N/Q_c)$. W istocie, jeśli zrobimy wykresy dla r_g przyjmując jako war-



Rys. 27

tość naprężeń średnich $\sigma_0 = N$ oraz podstawiając $\sigma_{d2} = Q_r$, zaś $\sigma_{g2} = Q_c$ (rys. 27 dla $Q_c = 400$, $Q_r = 30$), zauważymy pełną odpowiedniość do naszej krzywej granicznej c (por. rys. 8 i 11):

$$r_g = \zeta_1 = r_{wd} \left(\frac{Q_c}{N} - 1 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{Q_c}{N} - 1 \right),$$

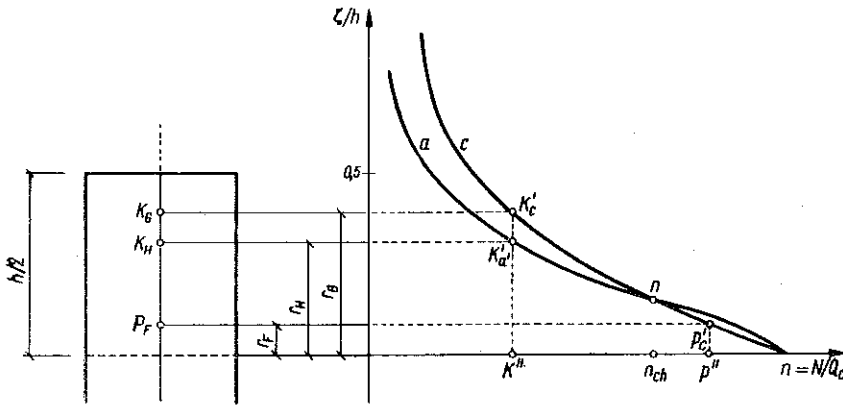
$$(4.44) \quad r_g = \zeta_2 = r_{wg} \left(1 - \frac{Q_r}{N} \right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{Q_r}{N} \right).$$

W analogiczny sposób sporządzone wykresy dla r_d wykazują lustrzane odbicie obu gałęzi w ćwiartce II i IV:

$$(4.45) \quad \begin{cases} r_d = \zeta_3 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{Q_c}{N} \right), \\ r_d = \zeta_4 = \frac{1}{6} \left(\frac{Q_r}{N} - 1 \right). \end{cases}$$

Wykres dla promienia rdzenia uogólnionego r_d wykazuje podobieństwo do naszej krzywej granicznej c' .

Wobec stwierdzenia przydatności naszych wykresów granicznych do określania położenia rdzenia uogólnionego dla dowolnych naprężeń, a więc i pozasprężystych, weźmy pod uwagę wykres krzywej granicznej c oraz a' dla obszaru I przy danym stosunku $\kappa' = Q_c/Q_r$ (rys. 28) i dowolny punkt K na osi odciętych $n = K''$. Odcięta



Rys. 28

K'' reprezentuje pewną wartość uogólnionej siły; odnosząc rzędną do krzywej a w punkcie K'_a i rzutując ją na wysokość belki, otrzymamy punkt K_H . Odnosząc odciętą $n = K''$ do krzywej c (punkt K'_c), otrzymamy rzut jej na wysokości belki w punkcie K_G . Punkt K_H i K_G wyznaczają dwa promienie rdzeni, które wywołują w przekroju stany sprężysto-plastyczne. Promień r_H rozumiany jako odcinek od środka belki do punktu K_H jest rdzeniem granicznego uplastycznienia jednostronnego $\sigma_d = Q_r$. Promień r_G jest rdzeniem, w którym wystąpi pewne uplastycznienie w strefie rozciąganej a tylko graniczne w strefie ściskanej.

Te stany naprężeń wywołane będą przyłożeniem siły uogólniającej o wartości $n = K''$. Przy wartościach $n > n_{ch}$, np. o odciętej P'' , otrzymamy wartość rdzenia na krzywej c w punkcie P'_c , która odniesiona do osi przekroju belki, wyznaczy punkt P_F . Promień tak znalezionej rdzenia uogólnionego r_F oznaczają, że siła N równa w skali odciętej P'' , umieszczona w granicach r_F , wywoła co najwyżej początek uplastycznienia strefy ściskanej w przypadku sprężysto-plastycznym F .

Mamy zatem dość ogólną metodę, która pozwala na wyznaczanie rdzenia uplastycznienia dla dowolnie danych granicznych stanów naprężeń przy zmiennych wartościach siły uogólnionej. Wartość r_d dla stanów sprężystych podano w pracy [30] jako mniejszą z dwu wartości ζ_1 i ζ_2 . Jak widzieliśmy na rys. 27, daje to dwie gałęzie wykresów w I i III ćwiartce, co odpowiada naszemu obszarowi I krzywych granicznych c i a' . Wartość r_d obliczana jest dla naprężeń w stanie bezużytkowym dla naprężeń przeciwnych znaków (rozciąganie u góry). Odpowiednie gałęzie wykresów dla r_d znajdują się w II i IV ćwiartce, wewnątrz obszaru I naszych krzywych granicznych a i c' (por. na rys. 13 promienie r'_a , r'_b i r'_c).

Wykres obszarów występowania różnych stanów sprężysto-plastycznych i sprężystych (na rys. 13) pozwala na dobranie najwłaściwszego rdzenia uogólnionego z uwzględnieniem dopuszczalnych stanów pozasprężystych.

5. Rozkład naprężeń i stany uplastycznienia wzdłuż belki

Opierając się na przeprowadzonych wywodach teoretycznych, podanych wykresach stanów granicznych i wyprowadzonych wzorach na wielkości stref uplastycznienia przekroju podamy obecnie równania pozwalające wyznaczać rozkład naprężeń wzdłuż belki, będącej w stanie sprężysto-plastycznym.

Rozważymy przypadek prostej belki sprężonej, do której stosują się wszystkie założenia przyjęte w punkcie 2.1 i 2.2.

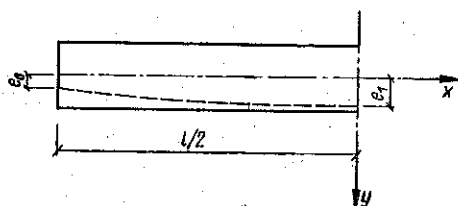
5.1. Równanie osi obojętnej w fazie sprężysto-plastycznej. Położenie osi obojętnej w przekroju dla różnych stanów uplastycznienia określa wielkość y_d . Ogólnie równanie osi obojętnej możemy przedstawić w postaci:

$$(5.1) \quad y_d = y_d(x) = f [M(x), e(x), S, Q_r, Q_c, h, b].$$

Jedynie wielkości M i e są funkcjami x , pozostałe wielkości przyjmujemy za stałe. We wzorach tablicy 2 określających wielkość y_d powtarza się wyrażenie $Se-M$, które określa wartość momentu zmiennego na długości belki. Przy założeniu obciążenia równomiernego i parabolicznej trasy kabla otrzymamy przy oznaczeniach podanych na rys. 29 następujące zależności:

$$(5.2) \quad e = e(x) = \frac{4(e_0 - e_1)}{l^2} x^2 + e_1,$$

$$(5.3) \quad M_x = M(x) = \frac{q}{8} (l^2 - 4x^2).$$



Rys. 29

Stąd wyrażenie $Se-M$ przybiera postać

$$(5.4) \quad Se-M = \left[\frac{4S}{l^2} (e_0 - e_1) + \frac{q}{2} \right] x^2 - \frac{ql^2}{8} + Se_1.$$

Podstawiając wartość (5.4) do odpowiednich wzorów otrzymamy równania osi obojętnej dla każdego obszaru belki w stanie sprężysto-plastycznym. Np. dla przypadku H jednostronnego uplastycznienia strefy rozciąganej otrzymamy

$$(5.5) \quad y_d(x)_H = \frac{5}{4} Q_r h^2 - Sh + \frac{(3Q_r h - 6S) \left\{ \left[\frac{4S}{l^2} (e_0 - e_1) + \frac{q}{2} \right] x^2 + \frac{ql^2}{8} + Se_1 \right\}}{2(Q_r h + S)^2} + \\ + \frac{9Q_r \left\{ \left[\frac{4S}{l^2} (e_0 - e_1) + \frac{q}{2} \right] x^2 - \frac{ql^2}{8} + Se_1 \right\}^2}{2(Q_r h + S)^3}$$

Równanie osi obojętnej dla pozostałych przypadków uplastycznienia otrzymamy na podobnej drodze podstawiając wartość (5.4) do odpowiednich wzorów tabelicy 2.

5.2. Równanie linii uplastycznienia. Ogólne równanie linii uplastycznienia ma postać

$$(5.6) \quad y_{pg(d)}(x) = F[M(x), e(x), A],$$

gdzie przez A oznaczono wielkości niezmiennie geometryczne i technologiczne danej konstrukcji. Dla poszczególnych stanów otrzymamy różne równania linii uplastycznienia podstawiając wartość (5.4) do wzorów tabelicy 2 właściwych dla danego stanu np. dla stanu H :

$$(5.7) \quad y_{pd} d_H(x) = -\frac{S}{Q_r} \pm \left[\left(\frac{S}{Q_r} - \frac{h}{2} \right)^2 + \left(h - \frac{2S}{Q_r} \right) \frac{ax^2 + b}{c} + \left(\frac{ax^2 + b}{c} \right)^2 \right]^{1/2},$$

w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$a = \frac{4S(e_0 - e_1)}{l^2} + \frac{q}{2}, \quad b = Se_1 - \frac{ql^2}{8}, \quad c = \frac{3}{Q_r h + S}.$$

Przy określaniu rozkładu naprężeń wzdłuż belki istotnym jest wyznaczenie odciętej początku uplastycznienia górnego i dolnego włókna. Wartość tej odciętej wyznaczmy przyrównując równania na y_{pd} i y_{pg} do zera i wyznaczając stąd wartość x . I tak np. dla przypadku H przyrównując równania (5.7) do zera i wykonując szereg przekształceń otrzymamy wzór

$$(5.8) \quad x_{1,2}(H) = \left\{ \frac{S}{acQ_r} - \frac{h}{2ac} - \frac{b}{a} \mp \frac{1}{2ac} \left[\frac{2S}{Q_r} (2h-1) + h^2 - h \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

w którym symbole a , b i c posiadają oznaczenia podane przy wzorze (5.7).

Podobnie dla przypadku uplastycznienia F otrzymamy

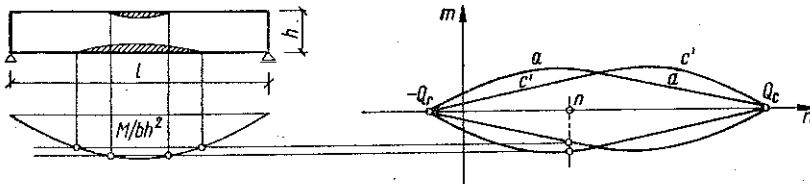
$$(5.9) \quad x_{1,2}(F) = \left\{ \frac{-S}{acQ_c} - \frac{h}{2ad} - \frac{b}{a} \mp \frac{1}{2ad} \left[\frac{-2S}{Q_c} (2h-1) - h^2 + h \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

gdzie $d = 3/(Q_c h - S)$; inne oznaczenia podano poprzednio.

Możemy również wyliczyć analitycznie wartości momentów od sił osiowych i obciążeń zewnętrznych, powodujących przejście do poszczególnych stanów uplastycznienia oraz wywołujących początek uplastycznienia w środku belki. Wystarczy odpowiednie wzory przy obliczonej wartości x porównać z sobą lub przyrównać do zera, co tutaj pomijamy.

Łatwą kontrolę obliczeń analitycznych możemy przeprowadzić na wykresach krzywych granicznych. Np. wartość momentów obliczoną analitycznie należy podzielić przez bh^3 i porównać z wartością momentu dla tej samej wielkości siły osiowej odniesionej do skali wykresu N/bh przy właściwej wartości κ . Z wykresów tych możemy się również zorientować w rozkładzie stanów granicznego uplastycznienia wzdłuż belki przy małej wartości siły poziomej. Wystarczy na danym wykresie o danym κ poprowadzić rzędną pionową o wartości odciętej $n = N/bh$. Określając wartości M lub ζ w poszczególnych przekrojach odczytujemy na rzędnej n panujący tam stan i otrzymujemy stąd obszary stanów uplastycznienia wzdłuż belki.

Rysunek 30 podaje podobną metodę graficznego wyznaczania granic obszarów uplastycznienia wzdłuż belki za pomocą wykresu momentów zginających wziętych w skali M/bh^2 obliczonych od obciążeń i siły sprężającej.



Rys. 30

Dla właściwej siły osiowej (wziętej znowu w skali wykresu] N/bh) zaznaczamy przecięcia z krzywymi granicznymi wykresu (rys. 30) i odnosimy je poziomo do przecięcia z wykresem momentów. Odniesione do krawędzi belki przecięcia te wyznaczają początek uplastycznienia dla danego na wykresie m, n stanu sprężysto-plastycznego.

5.3. Kąty obrotu przekrojów końcowych belki sprężonej w stanie sprężysto-plastycznym. Kąty wzajemnych obrotów przekroi $\Delta\varphi$, mierzone na jednostkę długości, obliczymy dla każdego ze stanów sprężysto-plastycznych osobno. Kąty obrotów przekrojów końcowych będą sumą obrotów w poszczególnych stanach. Do tego celu wykorzystamy wzory zestawione dla poszczególnych przypadków uplastycznienia w tabelicy 2. Wzory te wyprowadzono z warunku płaskich przekroi w następującej postaci:

dla zakresu sprężystego

$$\varepsilon = \Delta\varphi y = \frac{\sigma}{E}, \quad \Delta\varphi = \frac{\sigma}{Ey};$$

dla przypadku sprężysto-plastycznego F

$$\varepsilon_c = \Delta\varphi(y_g - y_{pg}) = \frac{Q_c}{E_c}, \quad \Delta\varphi = \frac{Q_c}{E_c} \frac{1}{y_g - y_{pg}};$$

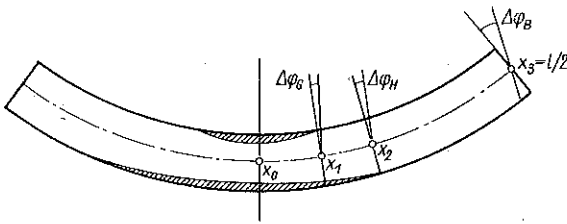
dla przypadku sprężysto-plastycznego H

$$\varepsilon_r = \Delta\varphi(y_d - y_{pd}) = \frac{Q_r}{E_r}, \quad \Delta\varphi = \frac{Q_r}{E_r} \frac{1}{y_d - y_{pd}}.$$

Dla obustronnego uplastycznienia (typu G) można wziąć wzór typu F lub H . Mając obliczone zakresy uplastycznienia wzdłuż belki wystarczy scałkować funkcje występujące w tych wzorach w odpowiednich przedziałach odnoszących się do danego przypadku i dodać je do siebie, pamiętając że są to wartości obrotów wzajemnych, liczonych od środka belki, lub traktując je jako obrót przekroju końcowego belki jednostronnie utwierdzonej dla każdego przypadku. Oznacza to, że obliczając np. obrót wzajemny dla jednostronnego uplastycznienia (typ H), przedział całkowania otrzymamy między początkiem uplastycznienia obustronnego (typu G), a końcem uplastycznienia jednostronnego (tzn. początkiem stanu sprężystego). Dla wyznaczenia obrotu wzajemnego w tym przedziale przyjmujemy jako stan początkowy obrót na granicy stanu G , a kąt obrotu obliczony będzie jako różnica między obrotem początkowym i końcowym uplastycznienia typu H (rys. 31).

Należy zaznaczyć, że obrót ten liczony jest względem osi obojętnej każdego przedziału. Oś ciężkości przekroju końcowego dozna prócz obrotu odkształcenia osiowego

$$(5.10) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varphi y_0,$$



Rys. 31

$$\Delta\varphi_{l/2} = \Delta\varphi_G + \Delta\varphi_H + \Delta\varphi_c$$

Całkowanie kątów obrotów na poszczególnych odcinkach przeprowadzimy zgodnie z rys. 31 podstawiając wartości y_g , y_d , y_{pg} i y_{pd} obliczone ze wzorów tablicy 2. Wzór ogólny będzie miał postać

$$(5.11) \quad \varphi\left(\frac{l}{2}\right) - \varphi(0) = \frac{Q_c}{E_c} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y_{gG} - y_{pgG}} + \frac{Q_r}{E_r} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{y_{dH} - y_{pdH}} + \frac{1}{E} \int_{x_2}^{x_3} \frac{\sigma g dx}{y_{gB}}.$$

Całki typu $\frac{Q_r}{E_r} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{y_{dH} - y_{pdH}}$ po podstawieniu wartości prowadzą do wyrażenia

$$(5.12) \quad \frac{Q_r}{E_r} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{Ax^4 + Bx^2 + C + D + [E + F(Ax^4 + Bx^2 + C)]^{1/2}},$$

gdzie symbole A, B, C, D, E i F oznaczają wartości stałe i znane dla każdego typu konstrukcji. Mamy np.

$$A = \frac{9Q_c}{2(Q_c h - S)^3} \left[\frac{16S^2(e_0 - e_1)^2}{l^4} + \frac{4S(e_0 - e_1)q}{l^2} \right] + \frac{q^2}{4},$$

$$B = \frac{9Q_c}{2(Q_c h - S)^3} \left[\frac{8S^2 e_1 (e_0 - e_1)}{l^4} - \frac{q^2 l^2}{8} \right] + \frac{6S + 3Q_c h}{2(Q_c h - S)^2} \left[\frac{4S(e_0 - e_1)}{l^2} + \frac{q}{2} \right] \dots$$

Rozwiązanie tej całki prowadzi do całek typu eliptycznego, które trudno jest wyrazić w postaci kanonicznej i które mają skomplikowaną postać. Pokażemy drogę rozwiązania tego typu całek metodą numeryczną Runge-Kutta (por. np. [7]).

Oznaczając

$$(5.13) \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{Ax^4 + Bx^2 + C + D + [E + F(Ax^4 + Bx^2 + C)]^{1/2}} = f(x)$$

oraz przyjmując $x_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$, podzielimy przedział całkowania, w którym panuje jednakowy stan uplastycznienia na kilka równych części. Zgodnie ze schematem typu I rozwiązania numerycznego Runge-Kutta obliczamy wartości współczynnika:

$$k_1 = \varkappa f(x_0), \quad k_2 = \varkappa f\left(x_0 + \frac{\varkappa}{2}\right),$$

$$k_3 = \varkappa f\left(x_0 + \frac{\varkappa}{2}\right), \quad k_4 = \varkappa f(x_0 + \varkappa)$$

oraz wyznaczamy ogólną postać rozwiązania:

$$(5.14) \quad \varphi(x_0 + \varkappa) = \varphi(x_0) + \frac{\varkappa}{6} \left[f(x_0) + 4\varkappa f\left(x_0 + \frac{\varkappa}{2}\right) + \varkappa f(x_0 + \varkappa) \right].$$

Dla wykonanej do badań laboratoryjnych belki sprężonej o następujących danych: $l = 345$ cm, $h = 24$ cm, $b = 8$ cm, $S = 18600$ kG, $q = 9,5$ kG/cm b, $e = 2,6$ cm = const, $Q_r = 30$ kG/cm², $Q_c = 250$ kG/cm² obliczono przykładowo wartość:

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x) = \frac{1}{y_a - y_{pd}},$$

przy założeniu prostej trasy kabła i stanie H uplastycznienia na całej długości belki. Mamy następujące wartości pomocnicze: $\bar{S} = S/b = 18600/8 = 2325$ kG/cm, $q/b = 9,5/8 = 1,1875$ kG/cm/b/cm, $Se - M = 0,594x^2 - 11650$, skąd

$$f(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{y_a - y_{pd}} =$$

$$= \frac{1}{0,25 \cdot 10^{-4} x^4 + 0,162 \cdot 10^{-3} x^2 + 76,976 - [50,75 \cdot 10^{-4} x^4 - 32,9 \cdot 10^{-3} x^2 + 5323,8]^{1/2}}.$$

Dzielimy obszar całkowania $l/2$ na 5 równych części $\kappa = 34$ cm i układamy następujący schemat rozwiązania numerycznego dla $x_0 = 0$ oraz $\varphi(0) = 0$.

$$\varphi(\kappa) = \frac{\kappa}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{\kappa}{2}\right) + f(\kappa) \right],$$

$$\varphi(2\kappa) = \varphi(\kappa) + \frac{\kappa}{6} \left[f(\kappa) + 4f\left(\frac{3}{2}\kappa\right) + f(2\kappa) \right],$$

$$\varphi(3\kappa) = \varphi(2\kappa) + \frac{\kappa}{6} \left[f(2\kappa) + 4f\left(\frac{5}{2}\kappa\right) + f(3\kappa) \right],$$

$$\varphi(4\kappa) = \varphi(3\kappa) + \frac{\kappa}{6} \left[f(3\kappa) + 4f\left(\frac{7}{2}\kappa\right) + f(4\kappa) \right],$$

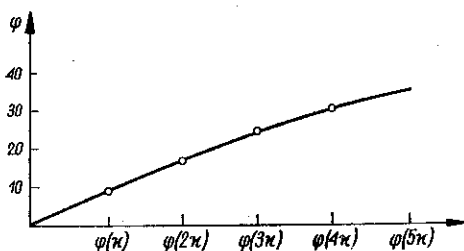
$$\varphi(5\kappa) = \varphi(4\kappa) + \frac{\kappa}{6} \left[f(4\kappa) + 4f\left(\frac{9}{2}\kappa\right) + f(5\kappa) \right].$$

Obliczone wartości $f(\kappa)$ oraz $\varphi(\kappa)$ zestawiono w tabelicy 3.

Tablica 3

	$\kappa/2$	κ	$\frac{3}{2}\kappa$	2κ	$\frac{5}{2}\kappa$	3κ	$\frac{7}{2}\kappa$	4κ	$\frac{9}{2}\kappa$	5κ
$f(\kappa)$	0,246	0,2445	0,2394	0,232	0,223	0,211	0,202	0,1897	0,1774	0,165
$\varphi(\kappa)$	—	8,373	—	16,5	—	24,065	—	30,915	—	36,94

Wartość $\varphi(5\kappa)$ przedstawia w skali wartość $\text{tg } \varphi$ na końcu belki. W podobny sposób wyznaczmy wartości kątów obrotów dla innych przypadków uplastycznienia z tym zastrzeżeniem, że jeśli $x_0 \neq 0$, to musimy uwzględnić wartość x_0 według wzoru (5.14). Wartość x_0 wyznaczmy z sąsiedniego przedziału, w którym panował inny stan uplastycznienia, rozpoczynając zawsze od przypadku, w którym $x_0 = 0$ i posuwając się w kierunku rosnących wartości kątów. Zależność $f(\varphi)$ przedstawiona jest na rys. 32.



Rys. 32

Obliczanie wartości kątów obrotów wzajemnych w przypadku belki w stanie sprężysto-plastycznym ma, jak widzimy, dość skomplikowany przebieg.

W przypadku obustronnego uplastycznienia typu G obliczenie kątów obrotów wzajemnych będzie miało nieco inny przebieg.

Podstawiając do wzoru (5.11) wyrażenia y_{gG} i y_{pgG} zgodnie ze wzorami (3.17) i (3.13) zestawionymi w tabelicy 2, otrzymamy zależność

$$(5.15) \quad \frac{Q_c}{E_c} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y_{gG} - y_{pgG}} = \frac{Q_c}{E_c} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{a + b[cx^2 + g]^{1/2}},$$

w której oznaczono

$$a = \frac{2Q_c h a - 2S\beta}{Q_c - Q_r} - \frac{2Q_c(Q_r h + S)}{Q_c^2 - Q_r^2}, \quad c = \frac{4\omega S}{Q_c l^2} (e_0 - e_1) + \frac{\omega q}{2Q_c},$$

$$b = \frac{2Q_c}{Q_c - Q_r}, \quad g = \gamma h^2 + \delta \frac{Sh}{Q_c} + \varepsilon \frac{S^2}{Q_c^2} + S e_1 - \frac{ql^2}{8};$$

pozostałe oznaczenia podano w związku ze wzorem (3.17).

Rozwiązanie równania (5.15) przy podstawieniu $\sqrt{cx^2 + y} = t - x\sqrt{c}$ prowadzi do całki typu

$$(5.16) \quad I = \frac{1}{b\sqrt{c}} \int \frac{(g + t^2) dt}{\left(t^2 + \frac{2at}{b} + g\right)t}.$$

Mianownik w wyrażeniu podcałkowym da się przedstawić

$$t^2 + \frac{2at}{b} + g = \left(t + \frac{a}{b}\right)^2 + g - \frac{a^2}{b^2}.$$

W zależności od wartości $g - \frac{a^2}{b^2} > 0$, $g - \frac{a^2}{b^2} < 0$ otrzymamy dwa rozwiązania:

Przypadek 1.

$$(5.17) \quad g - \frac{a^2}{b^2} < 0 = -\alpha^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - g}.$$

Całka (5.16) da się przedstawić w następującej postaci:

$$I_1 = \frac{1}{2ab\sqrt{c}} \left\{ \frac{1}{\frac{a}{b} - \alpha} \left[\int \frac{(t^2 + g) dt}{t} - \int \frac{(t^2 + g) dt}{t + \frac{a}{b} - \alpha} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{a}{b} + \alpha} \left[\int \frac{(t^2 + g) dt}{t} - \int \frac{(t^2 + g) dt}{t + \frac{a}{b} + \alpha} \right] \right\}.$$

Wartość jej jest następująca:

$$(5.18) \quad I_1 = \frac{\ln t}{b\sqrt{c}} - \frac{a}{b^2 \alpha \sqrt{c}} \left[\ln \left(t + \frac{a}{b} - \alpha \right) - \ln \left(t + \frac{a}{b} + \alpha \right) \right] =$$

$$= \frac{\ln(x\sqrt{c} + \sqrt{cx^2 + g})}{b\sqrt{c}} - \frac{a}{ab^2 \sqrt{c}} \left[\ln \left(x\sqrt{c} + \sqrt{cx^2 + g} + \frac{a}{b} - \alpha \right) - \right.$$

$$\left. - \ln \left(x\sqrt{c} + \sqrt{cx^2 + g} + \frac{a}{b} + \alpha \right) \right].$$

Przypadek 2.

$$(5.19) \quad g - \frac{a^2}{b^2} > 0 = \beta^2.$$

Całka (5.16) ma postać

$$I_2 = \frac{1}{b\sqrt{c}} \int \frac{(g+t^2)dt}{\left[\left(t+\frac{a}{b}\right)^2 + \beta^2\right]t}.$$

Podstawiając $u = t + a/b$ otrzymamy

$$I_2 = \frac{1}{b\sqrt{c}} \left\{ \int \frac{\left(u - \frac{a}{b}\right) du}{u^2 + \beta^2} + g \int \frac{du}{(u^2 + \beta^2)\left(u - \frac{a}{b}\right)} \right\}.$$

Znajdziemy kolejno

$$\int \frac{\left(u - \frac{a}{b}\right) du}{u^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \ln(u^2 + \beta^2) - \frac{a}{b\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\beta},$$

$$g \int \frac{du}{(u^2 + \beta^2)\left(u - \frac{a}{b}\right)} = \ln\left(u - \frac{a}{b}\right) - \frac{1}{2} \ln(u^2 + \beta^2) - \frac{a}{b\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\beta}.$$

Stąd

$$(5.20) \quad I_2 = \frac{1}{b\sqrt{c}} \left(\ln t - \frac{2a}{b\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{t + \frac{a}{b}}{\beta} \right) =$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{c}} \left[\ln(x\sqrt{c} + \sqrt{cx^2 + g}) - \frac{2a}{b\beta} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x\sqrt{c} + \sqrt{cx^2 + g} + \frac{a}{b}}{\beta} \right) \right].$$

Wartość wzajemnego obrotu przekrojów końcowych w zakresie sprężystym (por. $x_2 - x_3$ na rys. 31) można obliczyć na tej samej drodze lub na podstawie znanych wzorów, np. [31]. Po obliczeniu poszczególnych wartości dla różnych stanów uplastycznienia należy je zsumować zgodnie z (5.10) i rys. 31.

*

* *

Autor poczuwa się do miłego obowiązku złożenia serdecznego podziękowania Doc. Dr Czesławowi EIMEROWI za cenne uwagi i konsultacje.

Wykaz literatury:

- [1] A. L. L. BAKER, *A Plastic Theory of Design for Ordinary Reinforced and Prestressed Concrete Including Moment Re-distribution in Continuous Members*, Mag. Concr. Research, No 2, 1949, 57.
 [2] A. L. L. BAKER, *Recent Research in Reinforced Concrete and its Application to Design*, Structural Paper No 26, J. Inst. Civil Engin. vol. 35-36, London 1951.

- [3] A. L. L. BAKER, *The Ultimate-Load Theory Applied to the Design of Reinforced, Prestressed Concrete Frames*, London 1956.
- [4] A. L. L. BAKER-LEE, *Limit Analysis and Design*, J. Amer. Concrete Inst., 4, 1954.
- [5] Н. Я. БЕЗУХОВ, *Теория упругости и пластичности*, Гос. Изд. Техн. Теор. Лит., Москва 1953.
- [6] В. BUKOWSKI, *Morfologia rys w konstrukcjach żelbetowych i betonowych*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 1957.
- [7] L. COLLATZ, *Numerische Behandlungen von Differentialgleichungen*, Berlin 1955.
- [8] ЧЕН-ВЕНЬ-ШАН, *К расчету перераспределения усилий в неразрезных предварительно напряженных железобетонных балках*, Бетон и Железобетон, 7, 1960.
- [9] F. DISCHINGER, *Elastische und plastische Verformung der Eisenbetontragwerke*, Bauing., 5/6, 21/22, 31/32, 47/48 (1939).
- [10] С. EIMER, *Elementy ściskane wstępnie sprężone*, Inżyn. Budown. 6, 1951.
- [11] С. EIMER, *Podstawy teorii pelzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych*, Rozpr. Inżyn. 3, 5 (1957).
- [12] R. H. EVANS, E. W. BENNETT, *Prestressed Concrete Theory and Design*, London 1958.
- [13] E. FREYSSINET, *Exposé d'ensemble de l'idée de précontraint*, Annales, ITBTP No 77, 6 (1949).
- [14] А. А. ГВОЗДЕВ, С. М. КРЫЛОВ и другие, *Исследование распределения усилий в статических обычных и предварительно напряженных железобетонных конструкциях*, Научно-мехн. отчет Н.Я.Я.Ж.Б., 1957.
- [15] А. А. ГВОЗДЕВ, *О перераспределении усилий в статически неопределимых железобетонных обычных и предварительно напряженных конструкциях*, Научное сообщение, Москва 1955.
- [16] А. А. ГВОЗДЕВ, *Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
- [17] Y. GUYON, *Etude expérimentale de poutres continues en beton précontraint*, Travaux 1953, Avril, Mai, Juin, Juillet.
- [18] Y. GUYON, *Etude sur les poutres continues et sur certains systemes hyperstatiques en beton précontraint*, I. T. V. T. P. Circ. J. No 8, Paris 1945.
- [19] Y. GUYON, *Note sur les traces de cables concordants dans une construction hyperstatique précontrainte*, Gandawa 1951.
- [20] Y. GUYON, *Béton précontraint, Étude theoretique et experimentale*, Paris 1951, tome II, Constructions hyperstatiques, Paris 1958.
- [21] W. HERBERG, *Spannbetonbau*, Leipzig 1957.
- [22] A. W. HILL, *Hauptbericht über den ersten Internationalen Kongress in London 1953, der Internationalen Vereinigung für Spannbeton*.
- [23] A. W. HILL, *Gospodarcze zalety betonu sprężonego*, Streszczenie ref. z Kongresu w Amsterdamie 1951 (tłum. w jęz. polskim).
- [24] O. HOFFMAN, G. SACHS, *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, PWN Warszawa 1959.
- [25] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1954.
- [26] А. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, Гос. Изд. Техн. Теор. Лит., Москва-Ленинград 1948.
- [27] K. JÄGER, B. G. NEAL, *Die Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stahlstabwerke*, Wien 1958.
- [28] K. JÄGER, *Die wahrscheinlichste Momentenverteilung in Statisch unbestimmten Stahlbalken*, Allgemeine Bauzeitung, No 290a, 1952.
- [29] G. KANI, *Spannbeton in Entwurf und Ausführung*, Stuttgart 1955.
- [30] St. KAUFMAN, J. MAMES, *Uogólniony rdzeń przekroju w belce wstępnie sprężonej*, Arch. Inżyn. Ładow., 3/4, 1 (1955).
- [31] St. KAUFMAN, *Mosty sprężone*, Warszawa 1956.
- [32] St. KAUFMAN, *O racjonalnym projektowaniu sprężonych przekrojów zginanych*, Inżyn. Budown., Warszawa 1956.

- [33] St. KAUFMAN, J. НОР, *Studium nad racjonalnym kształtowaniem przekroju poprzecznego belki sprężonej*, Arch. Inżyn. Ładow., 1, 5 (1959).
- [34] T. KLUZ, *Beton kablowy. Projektowanie i wykonawstwo*, Budown. Archit., Warszawa 1956.
- [35] С. М. КРЫЛОВ, *Перераспределение усилий в статических неопределимых железобетонных конструкциях*. Сборник статей: Теория расчета и конструирования железобетонных конструкций, Москва 1958.
- [36] А. КУДЗИС, *К вопросу о распределении усилий в неразрезных предварительно напряженных железобетонных балках*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 1958.
- [37] D. H. LEE, *Inelastic Behaviour of Reinforced Concrete Members Subjected to Short-Time Static Load*, Proc. Amer. Soc. Civ. 286, 99 (1953).
- [38] F. LEONHARDT, *Spannbeton für die Praxis*, Berlin 1955.
- [39] F. LEVI, G. PIZETTI, *Fluage, Plasticité, Précontrainte*, Paris 1951.
- [40] T. Y. LIN *Strength of Continuous Prestressed Concrete Beams under Static and Repeated Loads* J. Amer. Concr. Inst., 10, 1955.
- [41] J. ŁEMPICKI, *Teoria zginania belki żelbetowej statycznie wyznaczalnej*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 2 (1956).
- [42] G. MAGNEL, *Theorie und Praxis des Spannbetons*, Wiesbaden 1956.
- [43] J. MAMES, *Sprężona belka cięgła. Analiza i projektowanie*. Arch. Inżyn. Ładow., 4, 3 (1957).
- [44] J. MAMES, *Obliczanie odgięć w belce z betonu kablowego*, Inżyn. Budown., 5, 1955.
- [45] В. В. МИХАЙЛОВ, *Расчет прочности и трещиностойчивость предварительно напряженных конструкций*. Исследования, Сборник статей, Москва 1949.
- [46] В. В. МИХАЙЛОВ, *Методы расчета предварительно-армированных конструкций в различных странах*. По материалам Конгресса в Амстердаме, Бетон и Железобетон, 5, 1956.
- [47] E. MÖRSCH, *Die Ermittlung des Bruchmomentes von Spannbetonbalken*, Beton u. Stahlbeton 7, 1950.
- [48] B. G. NEAL, *The Plastic Methods of Structural Analysis*, London 1956.
- [49] W. OLSZAK, *Z teorii belek i płyt wstępnie sprężonych*, Inżyn. Budown., 2, 1947.
- [50] W. OLSZAK, C. EIMER, *Inne poza betonem materiały sprężone*, Inżyn. Budown., 10, 1953.
- [51] W. OLSZAK, *Konstrukcje wstępnie sprężone*, t. 1, Warszawa 1955 PWN.
- [52] W. OLSZAK, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych*, Cz. I i II, Arch. Mech. Stos., 3, 4, 6 (1954).
- [53] W. OLSZAK, *Zjawisko rys w elementach konstrukcyjnych w świetle teorii sprężystości i plastyczności*, Arch. Inżyn. Ładow., 6 (1958).
- [54] W. OLSZAK, S. KAJFASZ, J. PIETRZYKOWSKI, *O nowej metodzie badań wytrzymałości materiałów kruchych na rozciąganie (Teoria tarczy kołowej w zastosowaniu do badań laboratoryjnych)*, Inżyn. Budown., 9, 1954.
- [55] A. PHILLIPS, *Introduction to plasticity*, New York 1956.
- [56] J. PIETRZYKOWSKI, *W poszukiwaniu najwłaściwszej metody projektowania mieszanki betonowej*, Inżyn. Budown., 12, 1955; 1, 1956.
- [57] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Basel 1955.
- [58] L. PRANDTL, *Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht*, Zeitschr. Angew. Math. Mech., 3 (1923).
- [59] E. REUSS, *Berücksichtigung der plastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie*, Zeitschr. Angew. Math. Mech., 10 (1930).
- [60] M. R. ROŠ, *Vorgespannter Beton*, EMPA-Bericht No 155, Zürich 1946.
- [61] M. R. ROŠ, A. SARRASIN, *Die materialtechnischen Grundlagen und Probleme des Eisenbetons im Hinblick auf die zukünftige Gestaltung der Stahlbeton Bauweise*, EMPA-Bericht No 162, Zürich 1950.
- [62] H. RÜSCH, *Der Einfluss des Sicherheitsbegriffs auf die techn. Regeln für vorgespannten Beton*, Schweiz. Archiv Angew. Wissenschaft und Technik, Heft 3, S. 85, Zürich 1954.

[63] H. RÜSCH, *Bruchlast und Bruchsicherheitsnachweis bei Biegungsbeanspruchung von Stahlbeton unter besonderer Berücksichtigung der Vorspannung*, Beton u. Stahlbetonbau, Heft 9, S, 215, 196.

[64] К. В. САХНОВСКИ, *Железобетонные конструкции*, Москва 1951.

[65] F. SCHLEICHER, *Der Spannungszustand an der Fließgranze*, Zeitsch. Angew. Math. Mech., 6 (1926).

[66] W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, Warszawa 1957.

[67] WŁ. STAROSOLSKI, *Projektowanie sprężonych przekrojów zginanych z uwzględnieniem wszystkich programowych stanów obciążenia belki*; Arch. Inżyn. Ładow., 4, 1958.

[68] L. STABILINI, *Die Plastizität und der Bauingenieur*, Bauing. 6, 1960.

[69] ARVO YLINEN, *A Method of Determining the Buckling Stress and the Required-Cross-Sectional Area for Centrally Loaded Straight Columns in Elastic and Inelastic Range*, Zürich 1956.

[70] ARVO YLINEN, *Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten Stabes im elastischen und unelastischen Bereich*, Rozpr. doktorska, Helsinki 1938.

[71] W. WIERZBICKI, *W sprawie bezpieczeństwa belki zginanej*, Przegląd Techn., 12/13, 1939.

[72] W. ZERNA, *Spann beton*, Düsseldorf 1953.

[73] *Применение напряжению армированного железобетона*. По материалам второго международного Конгресса (Амстердам 1955), Москва 1957.

[74] Hauptbericht über den dritten Kongress des Internationalen Spannbeton-Verbands (F. I. P), Berlin 1958.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ БАЛКИ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ФАЗЕ ДО ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТРЕЩИН

Основываясь на принципе плоских сечений и при предположении идеального упруго-пластического материала, постоянного модуля упругости и соответствующих пределах пластичности бетона Q_c и Q_t составляется уравнение, определяющее распределение напряжений в изгибаемом прямоугольном предварительно напряженном сечении, для учитываемых в классификации, случаев распространения пластичности. Область, в которой выступают отдельные упруго-пластические состояния, в зависимости от результирующей осевой силы и изгибающего момента представлена на рис. 16. Предельные кривые для отдельных состояний определяются графически и аналитически, рассматривая предельные распределения напряжений в начальной точке распространения пластичности, в крайних волокнах. И так напр. диаграмма B, C, D, A', B', B на рис. 16b иллюстрирует распространение пластичности (DA') в растягиваемой зоне при начальной точке распространения пластичности ($BC = Q_c$) в сжимаемой зоне. Другие предельные распределения для точки S получим, поворачивая прямую DC вокруг точки C . Аналогично поступаем изготовляя предельные кривые для точек A', C', A .

Эти кривые обозначены соответственно c, a, b и c', a', b' , приводя в качестве примера уравнения кривых c и a' . Они состоят из двух частей — прямой и параболической, пересекающихся в характеристической точке. Координаты этой точки представляют величину осевой силы и момента, вызывающих в сечении начало распространения пластичности, одновременно в сжимаемых и растягиваемых волокнах. Прямые отрезки предельных кривых a, a', c, c' ограничивают область (рис. 1a), в которой значение осевой силы и момента вызывает в сечении только упругие напряжения. Область ограниченная кривыми a', c для $n < (Q_c - Q_t)/2$ представляет распространение пластичности растягиваемой зоны, а для $n > (Q_c - Q_t)/2$ — сжимаемой зоны. Область, расположенная выше кривых отрезков a' и c , ограниченная кривой p представляет значения n и m , вызывающие в се-

чении двухстороннее распространение пластичности. Аналогические области четверти II и III, напр. для консольной балки, определяют предельные кривые c' и a .

Кривая p иллюстрирует теоретическое полное распространение пластичности во всем сечении. Рассматривая общий случай нагрузки сечения осевой силой и моментом при предположении сплошной среды, следует принять в качестве предельного состояния возникновения трещины в бетоне или его сокрушение. Принимая значение коэффициента полноты напряжений $\alpha = 0,7$, вызывающего в сечении предельное состояние, определяется для каждого упруго-пластического состояния область распространения пластичности. Эта область обозначена на диаграмме пунктирной линией p_α , как огибающая кривых p_α , p_c , p'_α , и p'_c , определенных для каждого распространения пластичности отдельно. Область допустимого распространения пластичности до возникновения трещин или сокрушения бетона зачерчена косыми линиями.

Безопасную область можно определить в зависимости от способа нагрузки или кривой g (параллельной $p_\alpha = 0,7$ — область зачерченная вертикальными линиями) или кривой ω , образованной путем умножения ординат кривой p_α на постоянный коэффициент безопасности ν). В случае нагрузки элемента переменным моментом и осевой силой удобнее будет принять кривую g (рис. 24).

В работе приводятся принципы подбора коэффициентов безопасности и указания, касающиеся проектирования сечения с допущением некоторых упруго-пластических состояний, основываясь при этом на системе уравнений кривых p_α в ее четырех составляющих диапазонах. Это позволяет определить оптимальные размеры сечения и параметров предварительного напряжения и подбора трассы пучков при учете упругих и пластических состояний.

В заключение приводятся формулы, дающие возможность определить зону распространения пластичности вдоль балки и значения углов взаимных оборотов конечных сечений балки в упруго-пластическом состоянии.

Summary

SOME REMARKS ON PRESTRESSED BEAM IN THE ELASTIC-PLASTIC STATE BEFORE CRACK FORMATION

On the basis of the principle of plane section and assuming perfect elastic-plastic material, constant Young's modulus and relative yield points of concrete Q_c and Q_r , equations are obtained for the determination of the stress distribution in a bent prestressed element of rectangular cross-section for classified plasticity cases, Table 2. The range of appearance of each particular elastic-plastic state in function of the resultant axial force and bending moment is represented in Fig. 16a. For each particular state the limit curves are determined graphically and mathematically by considering the limit stress distributions at the beginning of the plastic state in extreme fibres. For example, the diagram B, C, D, A', B', B in Fig. 16b shows the plasticity (DA') of the tension zone with the beginning of plasticity of compression zone ($BC = Q_c$). The other limit diagrams for point C may be obtained by turning of CD line round point C . Limit diagrams for points A', C', A may be found in the same manner.

These curves are denoted in the diagrams by c, a, b and c', a', b' . As an example, the equations of the curves c, a' are given. They are composed of two branches: rectilinear and parabolic intersecting at the characteristic point (Fig. 16a). The coordinates of this point represent the magnitude of the axial force and moment, corresponding to the beginning of the plastic state in the cross-section in compressed and stretched fibres simultaneously. The straight segments of the limit curves a, a', c, c' bound the region (Fig. 16a) where the value of the axial force and moment do not produce stresses exceeding the elastic range in the profile. The region bounded with the curves a', c for $n < (Q_c - Q_r)/2$ is the plasticity region in the stretched zone and for $n > (Q_c - Q_r)/2$ it repre-

sents the plasticity region in the compressed zone. The region above the curvilinear segments a' and c , bounded by the curve p represents the values of n , m producing plasticity on both sides of the profile. In the quadrant II and III analogous regions, for a cantilever beam for instance, are determined by the limit curves c' , a .

The curve p illustrates the theoretical state of full plasticity in the entire cross-section. Considering the general case of load by an axial force and moment and assuming the continuity of the body, the limit state is considered to be that of crack formation or crushing. Assuming the coefficient of filling up of the stress solid corresponding to the limit state in the cross-section to be $\alpha = 0.7$ the range of validity is determined for all the elastic-plastic states. On the diagram it is determined by a dashed line constituting the envelope of the curves p_a, p_c, p_a', p_c' , determined for each state of plasticity separately. Zones of admissible plasticity before cracking and crushing are marked by oblique shading (Fig. 16a). The safe region of the validity range depending on the way of leading may be bounded either by the curve g (parallel to $p_a = 0.7$ — oblique shaded) or the curve ω (obtained by multiplying the ordinates p_a by a constant safety factor), Fig. 24.

If the element is loaded by a variable moment and axial force, it is more convenient to take the curve g . The principles of choosing the safety factors are given as well as directions for the design of a profile admitting certain elastic-plastic states, by means of the system of equations of the curve p_a in the four component ranges. This enables the determination of the best dimensions of the cross-section and the prestressing parameters and the choice of the path of the cable taking inelastic states into consideration.

In conclusion, equations are given enabling us to determine the plasticity regions along the beam and the computation of the values of the rotation angles of the end section in the elastic-plastic state.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji 9 grudnia 1960 r.