

ALEKSANDER LISOWSKI

ANALOGIA RÓWNAŃ COLTRIEGO I GULDANA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCX

TOM IX . ZESZYT 2 . ROK 1961

SPIS TREŚCI

Wstęp	281
1. Metoda odkształceń w zastosowaniu do ram o węzłach nieprzesuwnych i przesuwnych	281
1.1. Zależności między momentami węzłowymi a odkształceniami pręta	281
1.2. Warunki równowagi węzła lub pręta wyciętego z ramownicy	284
1.3. Warunek równowagi węzła w postaci Guldana	287
2. Metoda potencjałów węzłowych w zastosowaniu do obliczania rozdziału prądu w sieci elektrycznej	288
2.1. Warunki brzegowe podparcia pręta	291
2.2. Warunek równowagi węzła sieci	293
3. Zastosowanie elektrycznych układów analogowych do ram o węzłach nieprzesuwnych i przesuwnych	295
3.1. Ramy o węzłach nieprzesuwnych	296
3.2. Układy o węzłach przesuwnych	296
3.3. Zastosowanie symetrii i antysymetrii przy budowie analogów	298

Wstęp

Między zjawiskami elektrycznymi i mechanicznymi istnieją daleko idące podobieństwa. W szczególności wiele układów statyki na podstawie analogii rozpatrywać można za pomocą układów elektrycznych. W pracy niniejszej rozpatrzone będą analogowe układy sieci elektrycznej w zastosowaniu do rozwiązywania prętowych układów ram i belek. W szczególności rozważona zostanie metoda odkształceń w zapisie Guldana w zastosowaniu do układów ramowych oraz metoda równań potencjałów Coltri'ego w zastosowaniu do obliczania sieci elektrycznych.

Równania Coltri'ego zostaną sprowadzone do postaci równań Guldana. Ułatwi to odwzorowanie schematu statycznego ramownicy za pomocą schematu sieci elektrycznej z uwzględnieniem warunków brzegowych oparcia prętów.

W niniejszym opracowaniu autor oparł się na pracy I. MALECKIEGO, [4], oraz na pracach uczonych radzieckich z Rostowskiego Instytutu Inżynieryjno-Budowlanego [1].

1. Metoda odkształceń w zastosowaniu do ram o węzłach nieprzesuwnych i przesuwnych

Ogólne założenia dla obliczania ram opierają się na warunku zrównoważenia całej rami oraz poszczególnych jej elementów. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego rama odkształca się do położenia, w którym nastąpi statyczny stan równowagi. Muszą zatem być spełnione następujące warunki w ramie odkształconej: (a) cała rama znajduje się w stanie równowagi, (b) każdy pręt wyodrębniony (myślowo) z rami znajduje się w stanie równowagi, (c) każdy węzeł wyodrębniony z rami znajduje się w stanie równowagi.

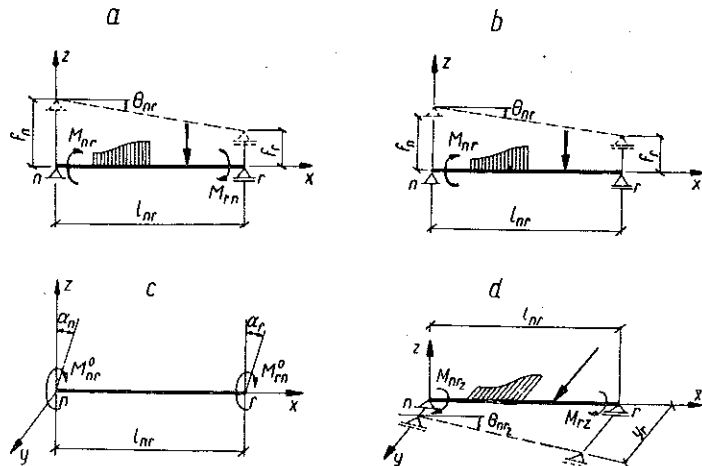
Zanim przejdziemy do rozpatrzenia stanu równowagi wydzielonego węzła, wyprowadzimy wzory na momenty podporowe w prętach w zależności od przesunięć i obrotów ograniczających je węzłów.

1.1. Zależności między momentami węzłowymi a odkształceniami pręta. Rozpatrzmy najpierw układ płaski. Dowolny pręt rami znajduje się pod wpływem obciążenia działającego bezpośrednio na niego oraz momentów oddziaływania ograniczających go węzłów. Przyjmując oznaczenia momentów jak na rys. 1a i uważając za dodatni taki kąt obrotu, który nastąpił zgodnie z ruchem wskazówek

zegara, otrzymamy dla pręta o stałym przekroju zginanego w płaszczyźnie xz wzory

$$(1.1) \quad \begin{cases} \varphi_n = \frac{l_{nr}}{6EJ_{nr}}(2M_{nr} - M_{rn}) + \frac{\mathcal{R}_{nr}}{EJ_{nr}} + \theta_{nr}, \\ \varphi_r = \frac{l_{nr}}{6EJ_{nr}}(2M_{rn} - M_{nr}) - \frac{\mathcal{R}_{rn}}{EJ_{nr}} + \theta_{nr}, \end{cases}$$

gdzie E oznacza współczynnik sprężystości podłużnej, J moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem osi obojętnej, φ_n i φ_r odpowiednie kąty



Rys. 1

obrotu na podporach n i r , \mathcal{R}_{nr} i \mathcal{R}_{rn} reakcje wtórne podpór n i r od obciążenia działającego bezpośrednio na pręt, θ_{nr} kąt obrotu cięciwy odkształconej osi pręta wynikły z niejednakowego osiadania podpór, l_{nr} długość pręta $n-r$.

Kąt obrotu cięciwy

$$(1.2) \quad \theta_{nr} = \frac{f_n - f_r}{l_{nr}},$$

gdzie f_n i f_r są przesunięciami pionowymi punktów n i r .

Rozwiązując układ równań (1.1) względem momentów M_{nr} i M_{rn} otrzymamy

$$(1.3) \quad \begin{cases} M_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(2\varphi_n + \varphi_r - 3\theta_{nr}) - \frac{2}{l_{nr}}(2\mathcal{R}_{nr} - \mathcal{R}_{rn}), \\ M_{rn} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(2\varphi_r + \varphi_n - 3\theta_{nr}) + \frac{2}{l_{nr}}(2\mathcal{R}_{rn} - \mathcal{R}_{nr}). \end{cases}$$

Podstawiając

$$(1.4) \quad \begin{cases} \bar{M}_{nr} = -\frac{2}{l_{nr}}(2\mathcal{R}_{nr} - \mathcal{R}_{rn}), \\ \bar{M}_{rn} = \frac{2}{l_{nr}}(2\mathcal{R}_{rn} - \mathcal{R}_{nr}), \end{cases}$$

możemy wzory (1.3) napisać w następującej postaci powszechnie stosowanej do obliczeń:

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} M_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(2\varphi_n + \varphi_r - 3\theta_{nr}) + \bar{M}_{nr}, \\ M_{rn} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(2\varphi_r + \varphi_n - 3\theta_{nr}) + \bar{M}_{rn}, \end{cases}$$

gdzie \bar{M}_{nr} jest momentem, jaki powstanie na podporze n pręta $n-r$ przy założeniu całkowitego utwierdzenia w węzłach, a \bar{M}_{rn} momentem, jaki powstanie na podporze r pręta $n-r$ przy założeniu całkowitego utwierdzenia w węzłach.

W przypadku pręta jednostronnie sprężysto utwierdzonego na podporze n (rys. 1b) otrzymamy

$$(1.5) \quad \varphi_n = \frac{M_{nr} l_{nr}}{3EJ_{nr}} + \frac{\mathcal{R}_{nr}}{EJ_{nr}} + \theta_{nr},$$

skąd

$$(1.6) \quad M_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(1,5\varphi_n - 1,5\theta_{nr}) - \frac{3\mathcal{R}_{nr}}{l_{nr}}.$$

W przypadku utwierdzenia na podporze r (przy oparciu przegubowym na podporze n)

$$(1.7) \quad M_{rn} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(1,5\varphi_r - 1,5\theta_{nr}) + \frac{3\mathcal{R}_{rn}}{l_{nr}}.$$

Podstawiając jak wyżej w równaniu (1.6)

$$(1.8) \quad \bar{M}_{nr} = -\frac{3\mathcal{R}_{nr}}{l_{nr}}$$

otrzymamy ostatecznie

$$(1.6.1) \quad M_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}(1,5\varphi_n - 1,5\theta_{nr}) + \bar{M}_{nr},$$

gdzie \bar{M}_{nr} oznacza moment, jaki powstanie na podporze n pręta $n-r$ przy założeniu całkowitego utwierdzenia w węzle n (węzeł r jest przegubowy).

Wzory (1.3.1) i (1.6.1) mogą służyć do obliczania momentów węzłowych ram płaskich (dla prętów jednostronnie lub dwustronnie sprężysto utwierdzonych), gdy znane są obroty i przesunięcia węzłów.

W przypadku ogólnym pręt $n-r$ może być oprócz rozważonego wyżej zginania względem osi y , również zginany względem osi z oraz skręcany względem osi x (oś pręta pokrywa się z osią x).

W pracy niniejszej uwzględnimy dodatkowo tylko skręcanie pręta na skutek działania momentów o wektorze równoległym do osi pręta w ograniczających go węzłach (por. rys. 1c).

Względny kąt skręcenia końców pręta $n-r$ względem osi x wynosi

$$(1.9) \quad \alpha_n - \alpha_r = \frac{M_{nr}^0}{\kappa G J_{nr}^0} l_{nr},$$

$$\alpha_r - \alpha_n = \frac{M_{rn}^0}{\kappa G J_{nr}^0} l_{nr}.$$

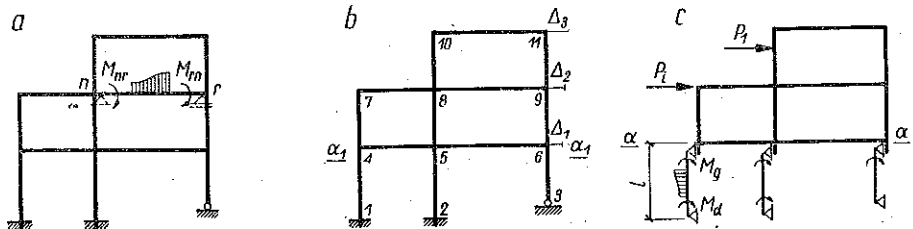
Skąd obliczymy

$$(1.10) \quad M_{nr}^0 = \frac{\kappa G J_{nr}^0}{l_{nr}} (\alpha_n - \alpha_r) = -M_{rn}^0,$$

gdzie M_{nr}^0 oznacza moment skręcający na podporze n pręta $n-r$ względem osi x , G współczynnik sprężystości poprzecznej, J^0 biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta, κ współczynnik zależny od kształtu przekroju poprzecznego pręta oraz α_n kąt obrotu węzła n względem osi x .

W podanych wyżej wzorach przyjęto za dodatnie takie momenty oddziaływania węzłów, które nadają obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara, gdy patrzymy w kierunku przeciwnym do dodatniego zwrotu odpowiedniej osi. Kąty obrotu przyjęto za dodatnie takie, które nastąpiły zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy patrzymy w kierunku przeciwnym do dodatniego zwrotu odpowiedniej osi. Za dodatnie przesunięcia uważamy takie, które nastąpiły zgodnie z dodatnim zwrotem odpowiedniej osi.

1.2. Warunki równowagi węzła lub pręta wyciętego z ramownicy. Rozpatrzmy dowolną ramę płaską podaną na rys. 2. Każdy pręt rami $n-r$ możemy rozważyć jako pręt statycznie wyznaczalny, jeżeli znać będziemy oddziaływanie na ten pręt ograniczających go węzłów.



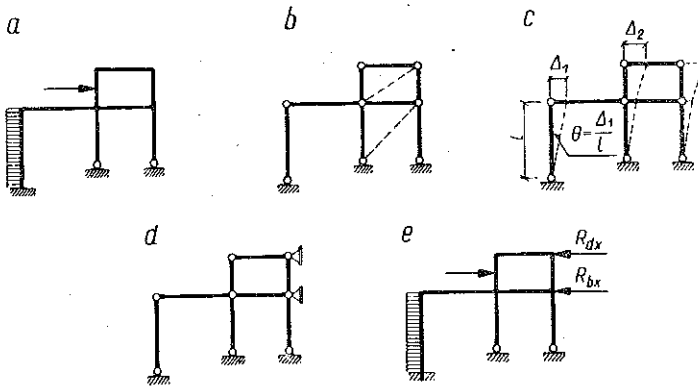
Rys. 2

Możemy bez trudności obliczyć momenty węzłowe według wzorów (1.3.1), (1.6.1) ub (1.10), gdy znamy kąty obrotu oraz przesunięcia węzłów. W zakresie przedstawionym w pracy niniejszej, tj. dotyczącym odkształceń tylko w płaszczyźnie xz

wystąpią kąty φ oraz przesunięcia wzdłuż osi x i z , na podstawie których wyrazić możemy kąty θ^1 . Ogólnie przy stosowaniu metody odkształceń możemy powiedzieć, że rozwiązanie ramownicy sprowadzi się do ułożenia i rozwiązania układu równań liniowych, przy czym ilość niewiadomych jest równa ilości szukanych kątów obrotu węzłów oraz ilości nieznanymi przesunięć węzłów Δ . Na podstawie warunków brzegowych pominąć możemy kąty obrotów podpór całkowicie utwierdzających $\varphi = 0$ oraz kąty obrotów na podporach przegubowych [wielkość φ , nie występuje w równaniu (1.6)].

Omówimy pokrótce stopień swobody ramownicy.

Rama posiada tyle stopni swobody, ile trzeba dodać prętów, żeby rama po zamianie sztywnych węzłów na węzły przegubowe stała się z powrotem geometrycznie niezmienna. Rozpatrzmy ramę przedstawioną na rys. 3a. Aby uczynić ją z powrotem geometrycznie niezmienną, wystarczy dodać dwa pręty ab i cd (rys. 3b).



Rys. 3

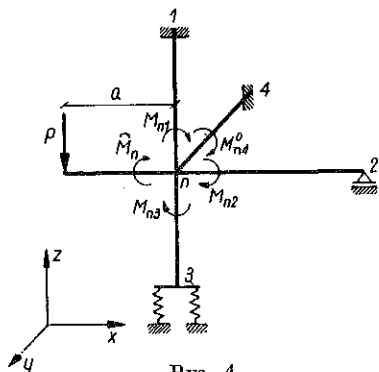
Stopień swobody można określić jeszcze inaczej. Rama ma tyle stopni swobody, ile trzeba dodać podpór przegubowo-przesuwnych w węzłach (ograniczających jeden stopień swobody), aby uczynić ramę geometrycznie niezmienną po zamianie węzłów sztywnych na przeguby. Rozpatrzmy tę samą ramę podaną na rys. 3c. Rama uległa odkształceniu uzyskując przesuw dolnego rygła o Δ_1 , górnego o Δ_2 . Ażeby uczynić ramę geometrycznie niezmienną, wystarczy dodać dwie podpory przegubowo-przesuwne w węzle b i d , które uczynią urządzenie z powrotem geometrycznie niezmiennym (rys. 3d). Możemy przyjąć, że zamiast podpór na ramę w węzłach b i d działają takie dwie siły R_{bx} oraz R_{dx} , które powodują, że przesunięcia węzłów b i d są pod działającym obciążeniem równe zero. Ponieważ w rzeczywistości założone podpory nie istnieją, stąd warunek

$$R_{bx} = 0, \quad R_{dx} = 0$$

daje nam dodatkowe zależności, z których możemy obliczyć rzeczywiste przesuw węzłów Δ_1 i Δ_2 .

¹ Zastosowanie metody odkształceń do ram przestrzennych podał autor w książce [2].

Przejdźmy do omówienia ilości równań, które musimy ułożyć dla ramownicy. Wróćmy do przykładu ramy podanej na rys. 2. Po odrzuceniu węzłów podporowych widzimy, że jako niewiadome wystąpią kąty obrotu węzłów $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8,$



Rys. 4

φ_9, φ_{10} i φ_{11} oraz trzy nieznanne przesuwry rygli Δ_1, Δ_2 i Δ_3 . Ogólnie można powiedzieć, że potrzeba ułożyć tyle równań równowagi węzłów, ile mamy kątów obrotu węzłów do wyznaczenia, oraz dodatkowo musimy ułożyć tyle dodatkowych równań równowagi przecięć, ile mamy wyznaczyć nieznanymi przesunięciami.

Z warunku równowagi dowolnego węzła (rys. 4) wyciętego z ramownicy wynika, że suma oddziaływań momentów węzłowych na schodzące się w tym węźle pręty względem dowolnej osi jest równa zero. W pracy niniejszej ograniczymy się do rozważenia warunku równowagi tylko względem osi y :

$$(1.11) \quad \sum M_n = M_{n1} + M_{n2} + M_{n3} + M_{n4}^0 + \widehat{M}_n = 0.$$

Odpowiednie wartości momentów M_{nr} wyznaczamy dla prętów dwustronnie utwierdzonych według wzoru (1.3.1), jednostronnie utwierdzonych według wzoru (1.6.1), prętów skręcanych według (1.10) oraz moment bezpośrednio zaczepiony do węzła obliczamy bezpośrednio z warunków obciążenia, np. według rys. 4,

$$\widehat{M}_n = Pa.$$

Ostatecznie w równaniach równowagi węzłów pozostaną jako niewiadome kąty φ oraz θ , które można wyrazić za pomocą składowych przesunięć (por. rys. 3c):

$$(1.12) \quad \theta = \frac{\Delta}{l},$$

gdzie Δ oznacza przesunięcie względne końców pręta oraz l długość pręta.

Dla wyznaczenia dodatkowych związków w liczbie równej liczbie nieznanymi składowymi przesunięciami piszemy równanie równowagi odciętej części ramownicy na kierunek poszukiwanego przesunięcia, np. dla przesunięcia Δ_1 przekrój pod ryglem 4-5-6 dla ramownicy podanej na rys. 2b.

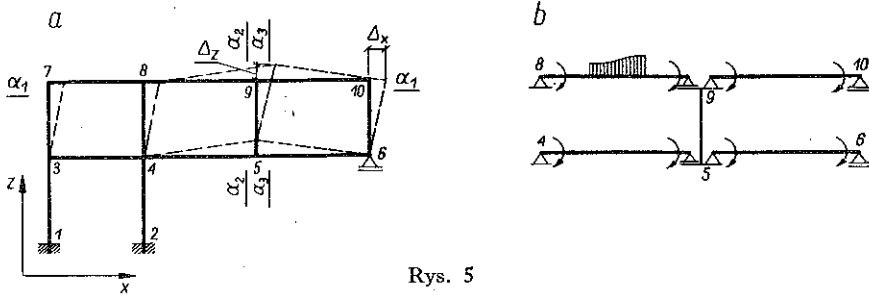
Przyrównanie do zera wszystkich sił czynnych i reakcji odciętej (górnej) części ramy na kierunek osi x da poszukiwany związek w postaci tzw. równania piętra (według rys. 2c)

$$(1.13) \quad \sum X = \sum P + \sum R_0 + \sum \frac{M_d + M_g}{l} = 0.$$

We wzorze powyższym P oznacza rzuty na oś x sił działających powyżej przekroju $a-a$, R_0 reakcje odciętych prętów od obciążenia działającego bezpośrednio na nie,

obliczone jak dla belki swobodnie podpartej, M_d moment węzłowy pręta przeciętego w dolnym węźle (poniżej przekroju), M_g moment węzłowy pręta przeciętego w węźle górnym (powyżej przekroju) oraz l długość przeciętego pręta.

W przypadku gdy w odciętej przekrojem $\alpha-\alpha$ części ramy znajdować się będzie nieznaną reakcją rzeczywistej podpory potrzeba rozważyć jeszcze jeden przekrój $\alpha'-\alpha'$ i obliczyć wszystkie siły działające na odcięty pręt w kierunku szukanego przesunięcia. Np. rama przedstawiona na rys. 5a posiada dwa stopnie swobody,



Rys. 5

które określa poziomy przesuw rygła górnego Δ_x oraz pionowy przesuw słupa Δ_z . Dla określenia Δ_x rozważymy przekrój $\alpha_1-\alpha_1$ oraz napiszemy równanie piętra (1.13). Związek wynikający z rozważenia przesuwny pionowego Δ_z (por. rys. 5b) określimy przez wydzielenie słupa 5-9 dwoma przekrojami $\alpha_2-\alpha_2$ oraz $\alpha_3-\alpha_3$ oraz przez napisanie dla tego pręta warunku równowagi rzutów na oś z:

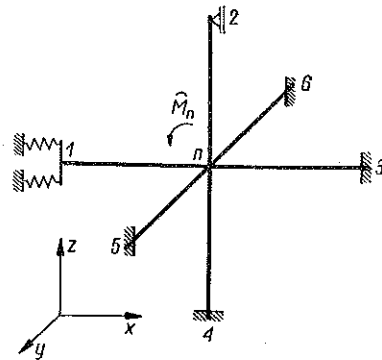
$$(1.14) \quad \sum Z_{5-9} = 0.$$

Ostatecznie możemy napisać dla danej ramownicy tyle równań równowagi węzłów oraz równań przecięć, ile jest niewiadomych odkształceń do wyznaczenia.

1.3. Warunek równowagi węzła w postaci Guldana. Celem przyspieszenia toku obliczeń i ich schematyzacji Guldan zgrupował pewne wyrazy i doprowadził równanie równowagi węzła (1.11) do postaci praktycznej w zastosowaniach. W pracy niniejszej wykorzystamy równanie Guldana do porównania go z równaniem Coltri'ego. Rozpatrzmy warunek równowagi węzła n względem osi y (rys. 6). Pręty $n-1$, $n-2$, $n-3$ i $n-4$ leżą w płaszczyźnie xz , pręty $n-5$ i $n-6$ są do niej prostopadłe. Warunek równowagi węzła n względem osi y ma postać

$$(1.15) \quad \sum M_n = \sum M_{nr} + \sum M'_{nr} + \sum M''_{nr} + \hat{M}_n = 0,$$

gdzie $\sum M_{nr}$ jest sumą momentów zginających prętów obustronnie utwierdzonych, $\sum M'_{nr}$ sumą momentów zginających prętów jednostronnie utwierdzonych, $\sum M''_{nr}$



Rys. 6

sumą momentów skręcających prętów skręcanych oraz \widehat{M}_n jest wypadkowym momentem zewnętrznym (czynnym) działającym bezpośrednio na węzeł.

Dla rozpatrywanego węzła n mamy

$$\sum M_{nr} = M_{n1} + M_{n3} + M_{n4}, \quad \sum M'_{nr} = M_{n2}, \quad \sum M^0_{nr} = M^0_{n5} + M^0_{n6}.$$

Ze związków powyższych oraz z równań (1.3.1), (1.6.1) i (1.10) przy uwzględnieniu (1.15) otrzymamy po odpowiednim zgrupowaniu następujące równanie

$$(1.16) \quad \varphi_n (2 \sum k_{nr} + 1,5 \sum k'_{nr} + \sum k^0_{nr}) + \sum \varphi_r k_{nr} - \sum \varphi_r k^0_{nr} - \\ - 3 \sum \theta_{nr} k_{nr} - 1,5 \sum \theta'_{nr} k'_{nr} + \sum \overline{M}_{nr} + \sum \overline{M}'_{nr} + \widehat{M}_n = 0.$$

W równaniu (1.16) wprowadzaliśmy: sztywności prętów zginanych obustronnie utwierdzonych

$$(1.17.1) \quad k_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}},$$

sztywności prętów zginanych jednostronnie utwierdzonych

$$(1.17.2) \quad k'_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}},$$

sztywności prętów skręcanych

$$(1.17.3) \quad k^0_{nr} = \frac{\kappa GJ^0_{nr}}{l_{nr}}.$$

Przy oznaczeniu

$$(1.18) \quad d_n = 2 \sum k_{nr} + 1,5 \sum k'_{nr} + \sum k^0_{nr},$$

$$(1.19) \quad m_n = \sum \overline{M}_{nr} + \sum \overline{M}'_{nr} + \widehat{M}_n$$

otrzymamy prostszą postać równania (1.16)

$$(1.16.1) \quad d_n \varphi_n + \sum k_{nr} \varphi_r - \sum k^0_{nr} \varphi_r - 3 \sum k_{nr} \theta_{nr} - 1,5 \sum k'_{nr} \theta'_{nr} + m_n = 0.$$

W analogiczny sposób przedstawić można warunek równowagi piętra lub wydzielonego pręta, ale w pracy niniejszej będzie to niepotrzebne².

2. Metoda potencjałów węzłowych w zastosowaniu do obliczania rozdziału prądów w sieci elektrycznej

Podstawowymi zależnościami, które pozwalają obliczyć rozdział prądów w sieci, są pierwsze i drugie równania Kirchhoffa. Sposób ten jednak jest bardzo pracochłonny, gdyż wymaga ułożenia $i - 1$ równań dla sumy prądów w węzłach, gdzie i oznacza liczbę węzłów w sieci oraz k liczbę równań dla sumy napięć i sił elektromotorycznych dla każdego oczka sieci. Sposób rozwiązania sieci znacznie się uprości, gdy zamiast nieznanych prądów J_{nr} jako niewiadome przyjmujemy potencjały poszczególnych prądów sieci. Wówczas ilość niewiadomych będzie się równała tylko $i - 1$,

² Równanie Guldena do obliczania przestrzennych układów ramowych podał autor w książce [2].

gdyż jeden z węzłów sieci możemy zawsze uziemić, co nie wpłynie na rozdział prądów ani napięć w sieci.

Zastosowanie metody potencjałów węzłowych ma ponadto tę dogodność, że wynika tutaj pewna prawidłowość w układaniu równań. Otrzymane w ten sposób równania, tzn. równania Coltri'ego, porównamy z podanymi w poprzednim paragrafie równaniami Guldana. Rozważania nasze przeprowadzimy tylko dla oporności rzeczywistej.

Rozpatrzmy warunek równowagi węzła n dowolnej sieci o i schodzących się w nim gałęzi przedstawionej na rys. 7. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa suma prądów wychodzących z węzła musi być równa zero:

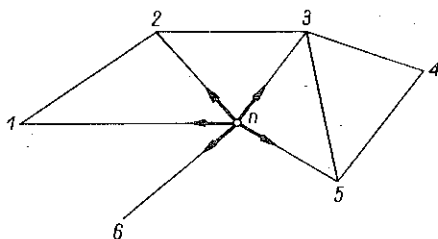
$$(2.1) \quad \sum J_n = \sum J_{nr} = 0.$$

W rozpatrywanym przypadku (rys. 7)

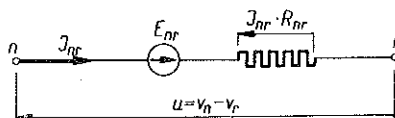
$$\sum J_n = J_{n1} + J_{n2} + J_{n3} + J_{n5} + J_{n6} = 0.$$

Za dodatni prąd przyjmujemy taki, który wypływa z węzła. Dowolny odcinek sieci pomiędzy dwoma węzłami (przy rozważaniu tylko oporności rzeczywistej)

przedstawić można za pomocą oporu R , siły elektromotorycznej E oraz potencjałów węzłowych V (rys. 8).



Rys. 7



Rys. 8

Warunek równowagi gałęzi $n-r$ można zatem przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad E_{nr} - J_{nr} R + (V_n - V_r) = 0.$$

Przyjęto następujący sposób znakowania. Siła elektromotoryczna wywołuje prąd w kierunku swego działania (strzałki), a spadek napięcia w oporze JR rysujemy w postaci strzałki zwróconej w stronę wyższego potencjału.

Z równania (2.2) obliczymy wartość prądu w gałęzi:

$$(2.3) \quad J_{nr} = \frac{1}{R_{nr}} [E_{nr} + (V_n - V_r)] = E_{nr} G_{nr} + (V_n - V_r) G_{nr},$$

gdzie $1/R_{nr} = G_{nr}$ oznacza przewodność gałęzi.

Równanie równowagi węzła (2.1) przedstawić możemy za pomocą wyrażenia (2.3) rozciągając znak sumowania na wszystkie gałęzie schodzące się w węzle:

$$(2.4) \quad \sum J_{nr} = \sum E_{nr} G_{nr} + \sum (V_n - V_r) G_{nr} = \\ = V_n \sum G_{nr} - \sum V_r G_{nr} + \sum E_{nr} G_{nr} = 0.$$

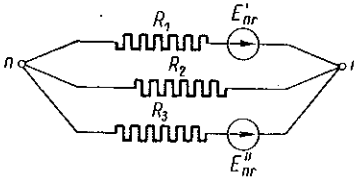
W równaniu (2.4) za dodatnią siłę elektromotoryczną uważamy zgodnie z rys. 8 taką, która posiada zwrot skierowany od węzła n . W przypadku gdy z węzła r do n jest kilka dróg, wówczas musimy sumować przewodności w wyrazie $V_r G_{nr}$ (np. zgodnie z rys. 9):

$$(2.5) \quad G_{nr} = G_1 + G_2 + G_3,$$

gdzie odpowiednio $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$ oraz $G_3 = 1/R_3$.

Równanie równowagi węzła (2.4), gdzie jako niewiadome występują potencjały węzłów sieci, nosi nazwę równania potencjałów węzłowych lub równania Coltri'ego.

Jeżeli porównamy teraz równanie Coltri'ego (2.4) z równaniem równowagi węzła ramownicy w zapisie Guldana (1.16.1), widzimy pewną analogię. I tu i tam znak sumy rozciąga się na wszystkie pręty lub gałęzie schodzące się w węzle. Gdzie figurują sztywności prętów k w metodzie odkształceń, tam odpowiednio mamy przewodności gałęzi w równaniu potencjałów.



Rys. 9

W metodzie odkształceń jako niewiadome przyjmujemy kąty obrotów, a w metodzie potencjałów węzłowych wartości potencjałów V . Jako wyrazy wolne traktujemy w metodzie odkształceń momenty utwierdzenia \bar{M} , a w metodzie potencjałów węzłowych siły elektromotoryczne E . Istnieją, oczywiście, różnice pomiędzy poszczególnymi wyrazami w powyższych równaniach oraz różnice w znakach (np. w drugim składniku równania odkształceń mamy $\sum k_{nr} \varphi_r$, wówczas gdy drugi wyraz równania potencjałów posiada wartość $-\sum G_{nr} V_r$), ale przez przyjęcie odpowiedniego schematu gałęzi doprowadzimy równanie Coltri'ego do postaci Guldana.

Już z porównania równań (1.16.1) i (2.4) oraz sposobu ich wyprowadzenia widzimy, że gdzie w układzie statycznym będą występować obroty węzłów oraz momenty węzłowe, tam odpowiednio w układzie sieci elektrycznej występować powinny potencjały oraz wartości prądów. Najkorzystniejszy wydaje się do zastosowania schemat Puchowa, Ileńko i Czeglina, przedstawiony na rys. 10 (por. [1]).

Wywołując napięcia φ_n i φ_r oraz siły elektromotoryczne θ_{nr} , φ_{nr}^0 i φ_{rn}^0 zgodnie z rys. 10a otrzymamy następujące wartości prądów płynących w węzle n i r :

$$(2.6.1) \quad J_{nr} = \frac{\varphi_n}{r_{nr} + \frac{r_{nr} r_{nr}}{r_{nr} + r_{nr}}} + \frac{\varphi_r}{2 \left(r_{nr} + \frac{1}{2} r_{nr} \right)} - \frac{\theta_{nr}}{r_{nr} + \frac{1}{2} r_{nr}} - \frac{\theta_{nr}}{2 \left(r_{nr} + \frac{1}{2} r_{nr} \right)} - \frac{\varphi_{nr}^0}{r_{nr} + \frac{1}{2} r_{nr}} + \frac{\varphi_{rn}^0}{2 \left(r_{nr} + \frac{1}{2} r_{nr} \right)} = \frac{1}{3r_{nr}} (2\varphi_n + \varphi_r - 3\theta_{nr}) - \frac{1}{3r_{nr}} (2\varphi_{nr}^0 - \varphi_{rn}^0)$$

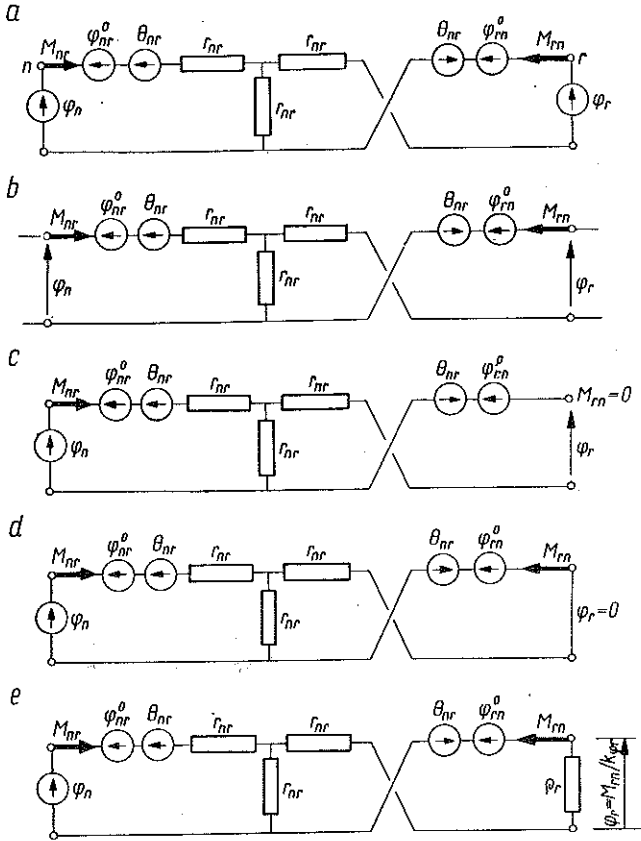
oraz

$$(2.6.2) \quad J_{rn} = \frac{1}{3r_{nr}} (2\varphi_r + \varphi_n - 3\theta_{nr}) + \frac{1}{3r_{nr}} (2\varphi_{rn}^0 - \varphi_{nr}^0).$$

Porównując wzory (2.6) z (1.3) widzimy, że wartość prądu J_{nr} może przedstawiać wartość momentu utwierdzenia M_{nr} , gdy

$$(2.7) \quad r_{nr} = \frac{l_{nr}}{6EJ_{nr}}$$

Wartość kąta obrotu dla schematu belki statycznie wyznaczalnej obliczymy z zależności $\varphi_{nr}^0 = \mathcal{R}_{nr}/EJ_{nr}$ oraz $\varphi_{rn}^0 = \mathcal{R}_{rn}/EJ_{nr}$.



Rys. 10

Rozpatrzmy warunki jakie musi spełnić schemat sieci podanej na rys. 10a, aby oddać dowolny sposób oparcia pręta.

2.1. Warunki brzegowe podparcia pręta. Typowe rodzaje podparcia drugiego końca r pręta podane zostały na rys. 4. Odróżniać będziemy przy zginaniu podparcie przegubowe (węzeł 2), całkowite utwierdzenie (węzeł 1), sprężyste utwierdzenie (węzeł 3) oraz pręt utwierdzony z jednej, a całkowicie swobodny z drugiej strony (wspornik statycznie wyznaczalny). Ponadto przy skręcaniu uwzględniać będziemy całkowite lub sprężyste utwierdzenie (węzeł 4). Poszczególne rodzaje podparcia

pręta rozpatrzemy oddzielnie oraz dostosujemy schemat elektryczny pręta (rys. 10a), aby spełniał dane warunki brzegowe. Zaczniemy od zginania.

Dla podparcia przegubowego warunek statyczny ujęty jest równaniem $M_{rn} = 0$.

W schemacie elektrycznym uzyskamy go przez rozwarcie końców r sieci (por. rys. 10c).

Całkowite utwierdzenie ujęte jest warunkiem odkształceniowym, a mianowicie kąt obrotu na podporze całkowicie utwierdzającej musi być równy zeru. W rozważanym przypadku $\varphi_r = 0$. Warunek ten w schemacie elektrycznym pręta uzyskamy przez zwarcie końców r sieci (por. rys. 10d).

Podpora sprężysto utwierdzająca (podpora 3 na rys. 4) przeciwstawiać się może w sposób sprężysto zarówno przesunięciom jak i obrotowi. Ugięcie podpory f_r związane jest z wartością reakcji tej podpory zależnością (przyjmujemy, co zwykle ma miejsce, zależność liniową)

$$(2.8) \quad R_r = k_f f_r,$$

gdzie R_r oznacza reakcję sprężystą podpory po linii sprężystego przesunięcia, a k_f współczynnik sprężystego osiadania podpory (wartość siły, która powodować będzie jednostkowe ugięcie podpory).

Moment utwierdzenia podpory sprężysto liniowo utwierdzającej jest związany zależnością

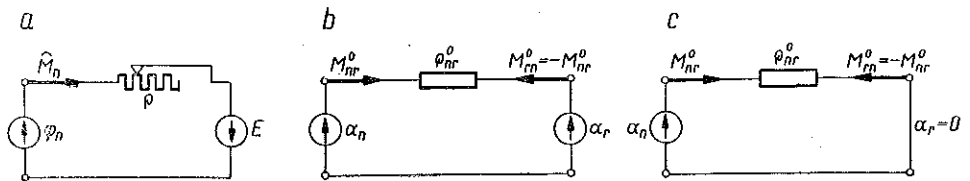
$$(2.9) \quad M_r = k_\varphi \varphi_r,$$

gdzie k_φ jest współczynnikiem sprężystego utwierdzenia podpory z warunku dotyczącego obrotu, a φ_r kątem obrotu pręta sprężysto utwierdzonego na podporze r .

Obecnie ograniczymy się do rozważania podpory sprężysto utwierdzającej z warunku dotyczącego obrotu. Traktując w sieci moment M_{rn} jako prąd płynący w węzle r oraz φ_r jako napięcie pomiędzy końcami r sieci otrzymujemy zależność (z prawa Ohma)

$$(2.10) \quad \varphi_r = \frac{M_{rn}}{k_{\varphi r}},$$

gdzie $k_{\varphi r} = \varrho_r$ jest oporem charakteryzującym działanie sprężyste podpory wstawionym pomiędzy końce r sieci (por. rys. 10e).



Rys. 11

Przy schemacie pręta wspornikowego mamy układ statycznie wyznaczalny i z warunków zewnętrznego obciążenia obliczyć możemy moment utwierdzenia M_{nr} w węzle n . Warunek ten możemy uwzględnić w ten sposób, że włączamy do węzła n gałąź z taką siłą elektromotoryczną E i oporem ϱ , aby prąd w tej gałęzi był równy

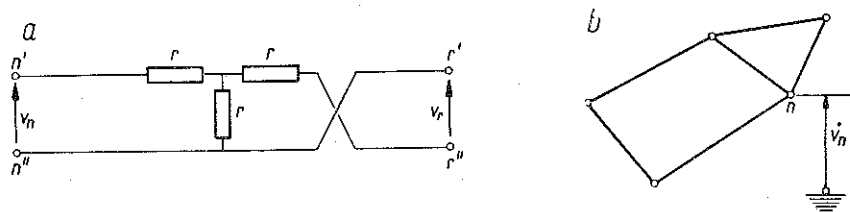
danemu \widehat{M}_{nr} (rys. 11a). W przypadku działania kilku zewnętrznych momentów składowych na węzeł n możemy je zsumować i oddać ich wpływ na węzeł za pomocą jednej gałęzi, w której przepuścimy dany prąd \widehat{M}_n .

Rozważmy z kolei sprężyste utwierdzenie końca r pręta skręcanego momentami węzłowymi.

Traktując moment skręcający w węźle M_{nr}^0 jako prąd płynący w gałęzi sieci $n-r$, otrzymamy ze wzoru (1.10.1)

$$(2.11) \quad M_{nr}^0 = \frac{\kappa G J_{nr}^0}{l_{nr}} (a_n - a_r) = \frac{a_n - a_r}{\varrho_{nr}^0},$$

gdzie ϱ_{nr}^0 przedstawia opór, jaki musimy wstawić w gałęzi $n-r$ pomiędzy siłami elektromotorycznymi równymi odpowiednio a_n i a_r (rys. 11b). W przypadku całkowitego utwierdzenia pręta w węźle r przyjmujemy z warunku odkształceń dla $a_r = 0$ zwarcie w końcach r sieci (rys. 11c). Stosując zastępcze schematy elektryczne należy podkreślić, że pręt zastąpiony został układem czwórnika, w którym potencjał węzła V przedstawia napięcie pomiędzy dwoma końcówkami wejściowymi (lub wyjściowymi) n' i n'' lub r' a r'' (rys. 12a). Literą węzła n lub r oznaczaliśmy końcówkę



Rys. 12

górną z lewej oraz prawej strony (rys. 10a). Przy rozpatrywaniu natomiast sieci elektrycznej potencjał węzłów traktujemy zwykle w stosunku do przyjętego dla wszystkich węzłów jednego poziomu odniesienia, np. jako zero przyjmujemy potencjał ziemi (rys. 12b).

2.2. Warunek równowagi węzła sieci. Warunek równowagi dowolnego węzła sieci sprowadza się do sumowania wszystkich prądów schodzących się w tym węźle gałęzi. Ponieważ w naszym przypadku sieć przedstawiać ma układ prętowy, odróżnić będziemy zgodnie z podziałem uczynionym w rozdziale pierwszym pręty jednostronnie i dwustronnie sprężyste utwierdzone. Suma prądów w węźle z uwzględnieniem momentów zewnętrznych zaczepionych do węzła musi być równa zeru:

$$(2.12) \quad \sum J_n = \sum J_{nr} + \sum J'_{nr} + \sum J''_{nr} + \widehat{J}_n = 0.$$

Wartość prądu w gałęzi będącej analogiem pręta zginanego dwustronnie utwierdzonego jest równa

$$(2.13) \quad J_{nr} = \frac{1}{3r_{nr}} (2\varphi_n + \varphi_r - 3\theta_{nr}) \mp \frac{1}{3r_{nr}} (2\varphi_{nr}^0 - \varphi_{rn}^0),$$

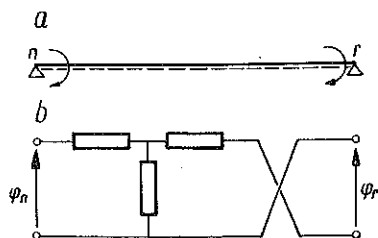
jednostronnie sprężycie utwierdzonego

$$(2.14) \quad J'_{nr} = \frac{1}{3r'_{nr}} (1,5\varphi_n - 1,5\theta'_{nr}) \mp \frac{1}{2r'_{nr}} \varphi_{nr}^0,$$

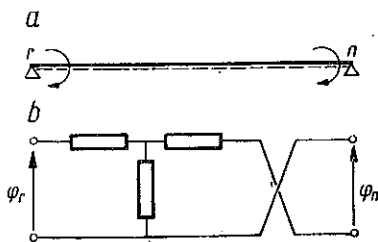
a pręta skręcanego

$$(2.15) \quad J_{nr}^0 = \frac{\varphi_n - \varphi_r}{\varrho_{nr}^0}.$$

Wzory (2.13) i (2.14) zostały wypisane dla schematu pręta, w którym podpora n jest z lewej strony podpory r (por. rys. 13) w przypadku przeciwnym należy uwzględnić znaki podane niżej (rys. 14).



Rys. 13



Rys. 14

Dla jednoznacznego oznaczenia położenia względem siebie węzłów n i r należy w rozważanej ramownicy wcześniej założyć spody prętów, np. przez kreskowanie i odpowiednio uwzględnić kierunki prądów i napięć według schematów podanych na rys. 13 i 14.

Po omówieniu znaków napięć przejdźmy ponownie do warunku równowagi dowolnego węzła sieci. Wstawiając (2.13), (2.14) i (2.15) do (2.12), otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum J_n = \sum \left[\frac{1}{3r'_{nr}} (2\varphi_n + \varphi_r - 3\theta_{nr}) \mp \frac{1}{3r'_{nr}} (2\varphi_{nr}^0 - \varphi_{rn}^0) \right] + \\ + \sum \left[\frac{1}{3r'_{nr}} (1,5\varphi_n - 1,5\theta'_{nr}) \mp \frac{1}{2r'_{nr}} \varphi_{nr}^0 \right] + \sum \frac{\varphi_n - \varphi_r}{\varrho_{nr}^0} + \widehat{M}_n = 0. \end{aligned}$$

Sumując odpowiednie wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} \varphi_n \left(\sum 2 \cdot \frac{1}{3r'_{nr}} + \sum 1,5 \cdot \frac{1}{3r'_{nr}} + \sum \frac{1}{\varrho_{nr}^0} \right) + \sum \frac{1}{3r'_{nr}} \varphi_r - \sum \frac{1}{\varrho_{nr}^0} \varphi_r - \sum 3 \cdot \frac{1}{3r'_{nr}} \theta_{nr} - \\ - \sum 1,5 \cdot \frac{1}{3r'_{nr}} \theta'_{nr} \mp \sum \frac{1}{3r'_{nr}} (2\varphi_{nr}^0 - \varphi_{rn}^0) \mp \sum \frac{1}{3r'_{nr}} \cdot 1,5\varphi_{nr}^0 + \widehat{M}_n = 0. \end{aligned}$$

Podstawiając w powyższym równaniu $r = l/6EJ$ oraz $\varrho^0 = l/\alpha GJ_0$ z uwzględnieniem zależności (1.17) otrzymamy

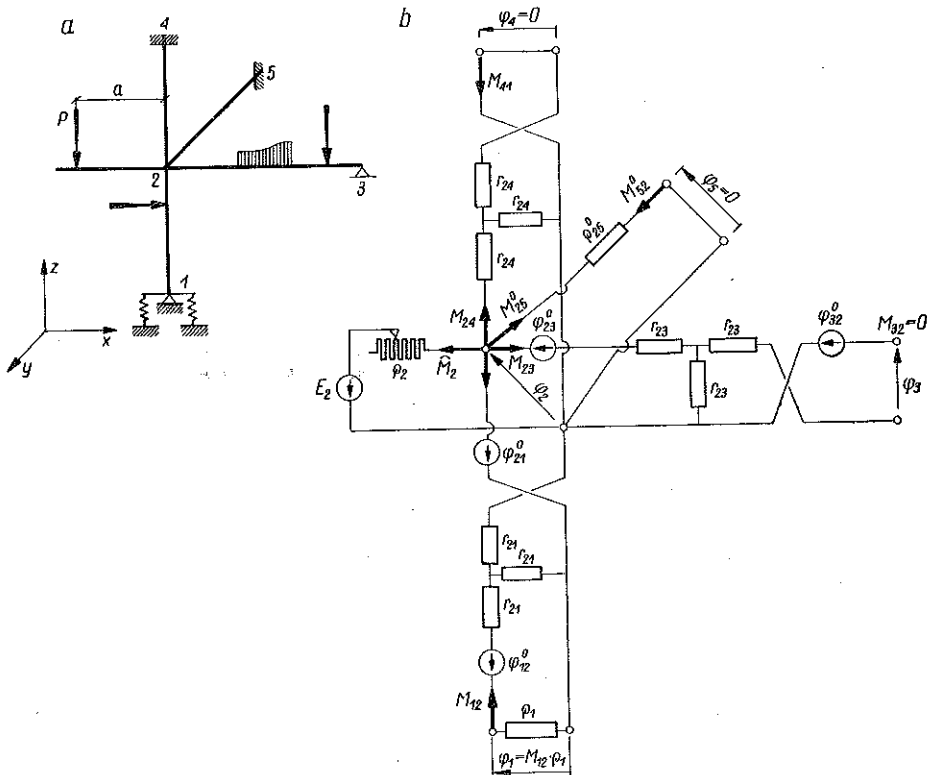
$$(2.16) \quad \varphi_n (2 \sum k_{nr} + 1,5 \sum k'_{nr} + \sum k_{nr}^0) + \sum \varphi_r k_{nr} - \sum \varphi_r k_{nr}^0 - 3 \sum \theta_{nr} k_{nr} - \\ - 1,5 \sum \theta'_{nr} k'_{nr} \mp \sum k_{nr} (2\varphi_{nr}^0 - \varphi_{rn}^0) \mp \sum k'_{nr} \cdot 1,5\varphi_{nr}^0 + \widehat{M}_n = 0.$$

Ostatnie trzy wyrazy z uwzględnieniem sposobu oznaczenia węzłów przedstawionych na rys. 13 i 14 przedstawiają wolny wyraz m_n w równaniu równowagi węzła ramownicy (1.19). W ten sposób równanie równowagi węzła sieci (2.12) sprowadziliśmy do identycznej postaci z równaniem Guldana (1.16.1).

Widzimy zatem, że przyjęty do rozważań elektryczny schemat pręta Puchowa, Ileńko i Czegolina pozwolił sprowadzić równanie potencjałów węzłowych do zapisu Guldana. W ten sposób w sieci elektrycznej będącej analogiem układu ramowego wykorzystać możemy wszelkie związki i uproszczenia stosowane w metodzie odkształceń. Ponadto na podstawie szczegółowo omówionych różnych sposobów oparcia pręta (rys. 10 i 11) możemy w sposób prosty określić układ sieci.

3. Zastosowanie elektrycznych układów analogowych do ram o węzłach nieprzesuwnych i przesuwnych

Dowolny układ ramowy składa się z szeregu prętów połączonych w węzłach. Łącząc zatem schematy sieci poszczególnych prętów z uwzględnieniem warunków brzegowych otrzymać możemy w prosty sposób analog elektryczny dowolnej ramownicy.

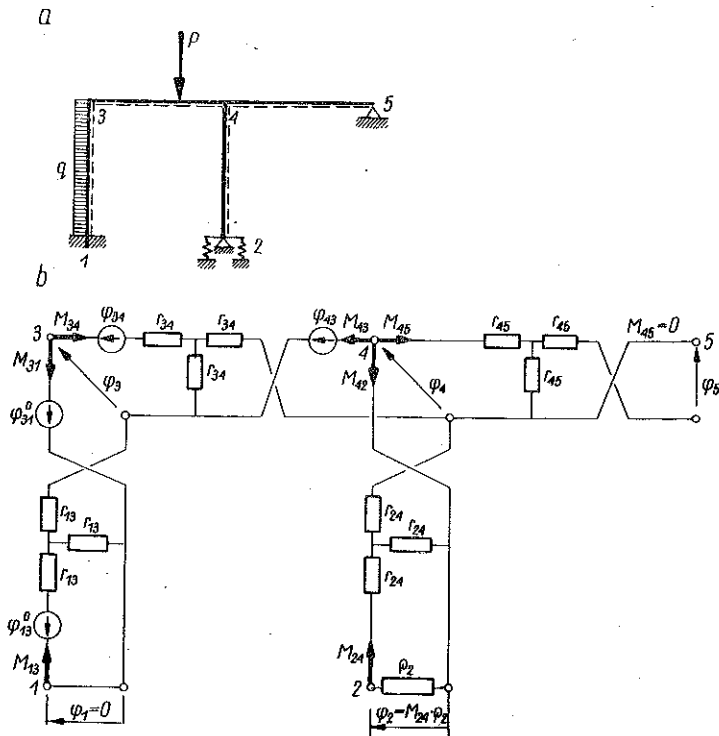


Rys. 15

Zacniemy od narysowania schematu sieci dla węzła podanego na rys. 15a. Oznaczenie spódów prętów wraz z numeracją węzłów podano na rysunku. Analog

układu prętowego z uwzględnieniem warunków brzegowych, jak utwierdzenie całkowite w węzłach 4 i 5, oparcie przegubowo nieprzesuwne na podporze 3, oparcie sprężyste ze względu na obrót na podporze 1 oraz zaczepienie zewnętrznego momentu $\widehat{M}_2 = Pa$ podano na rys. 15b.

3.1. Ramy o węzłach nieprzesuwnych. W równaniach metody odkształceń jako niewiadome występują kąty obrotu φ i θ , natomiast jako wyrazy wolne przyjmujemy kąty φ_{nr}^0 i φ_{rn}^0 oraz moment bezpośrednio zaczepiony do węzła \widehat{M}_n . Wartość momentu \widehat{M}_n obliczamy bezpośrednio z obciążenia ramownicy, a kąty obrotu φ_{nr}^0 oraz φ_{rn}^0 najczęściej na podstawie odpowiednich wzorów lub tablic. W przypadku zatem gdy w układzie prętowym nie występuje przesuw węzłów (ściślej, nie występują kąty θ) wystarczy włączyć do analogu elektrycznego jako czynne siły elektromotoryczne obliczone wartości φ_{nr}^0 , φ_{rn}^0 oraz \widehat{M}_n , a pomiar prądów i napięć da nam wartości momentów utwierdzenia oraz kątów obrotu węzłów.



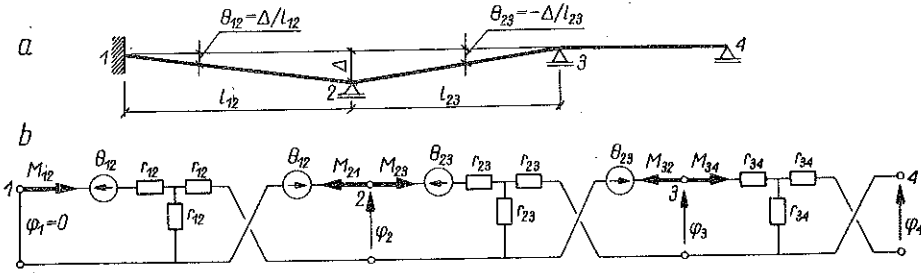
Rys. 16

Dla przykładu podamy analog ramy płaskiej przedstawionej na rys. 16. Przyjęty spód prętów oznaczono na rys. 16a, a analog rozpatrywanej ramy na rys. 16b.

3.2. Układy o węzłach przesuwnych. W układach, w których występują kąty powstające z niejednakowego przesunięcia podpór θ , należy włączyć siły elektromotoryczne równe θ_{nr} . Jeżeli te kąty są znane (przykład belki na nierówno osadzonych

podporach; por. rys. 17a), wówczas po ich włączeniu pomiar prądów i napięć pozwoli na znalezienie momentów utwierdzenia i kątów obrotu. Odpowiedni analog belki z przyłożonym obciążeniem podany jest na rys. 17b).

W większości przypadków ramownic o węzłach przesuwnych nie jest z góry znany przesuw węzłów, wówczas nie możemy bezpośrednio posłużyć się analogiem pręta przedstawionym na rys. 10a, gdyż nie wiemy, jakie siły elektromotoryczne włączyć. Należałoby wówczas wypisać równania przecięć i zbudować analog, który spełniałby powyższe równania. Praktycznym okazać się może sposób analogiczny do metody dwuetapowej H. Crossa stosowanej do ram przesuwnych. Posłużyć się wówczas możemy modelem elektrycznym pręta rozważanym w pracy niniejszej.



Rys. 17

Jako pierwsze traktujemy rozwiązanie dla węzłów pozbawionych możliwości przesuwu i rozwiązanie to traktujemy jako etap pierwszy. Zakładając następnie założony przesuw np. Δ_i znajdujemy kolejno rozdział momentów węzłowych pod wpływem sił elektromotorycznych $\theta = \Delta/l$ kolejno od każdego przesuwu.

Dla założonego przesuwu węzła, np. $\Delta = 1$ znajdujemy (mierząc na modelu) wielkości momentów węzłowych i obliczamy kolejno reakcje dodatkowe przyjętych podpór drugiego etapu danej fazy.

Wielkość rzeczywistego przesunięcia nie jest znana; oznaczamy

$$(3.1) \quad \Delta_i = 1 \cdot X_i.$$

Ogólnie warunek zrównoważenia dodatkowo przyjętej podpory etapu pierwszego można napisać

$$(3.2) \quad \bar{R}_k + \sum_1^n R_k^i X_i = 0,$$

gdzie \bar{R}_k jest reakcją podpory k obliczoną z pierwszego etapu, R_k^i reakcją podpory k obliczoną z fazy i drugiego etapu, od założonego przesunięcia Δ_i (np. $\Delta_i = 1$), oraz X_i niewiadomym stosunkiem rzeczywistego przesunięcia (3.1) do założonego. Równań (3.2) możemy ułożyć tyle, ile jest stopni swobody ramownicy.

Rozwiązując układ równań (3.2) np. na drodze rachunkowej obliczymy nieznane wartości X_i , na podstawie których bez trudu znajdziemy już rzeczywiste przesunięcia (3.1).

W przypadku podpór osiadających sprężysto należy napisać równanie (3.2) uwzględniając dodatkowo reakcję przężystego oddziaływania podpory:

$$(3.3) \quad R_k = k_k \Delta_k,$$

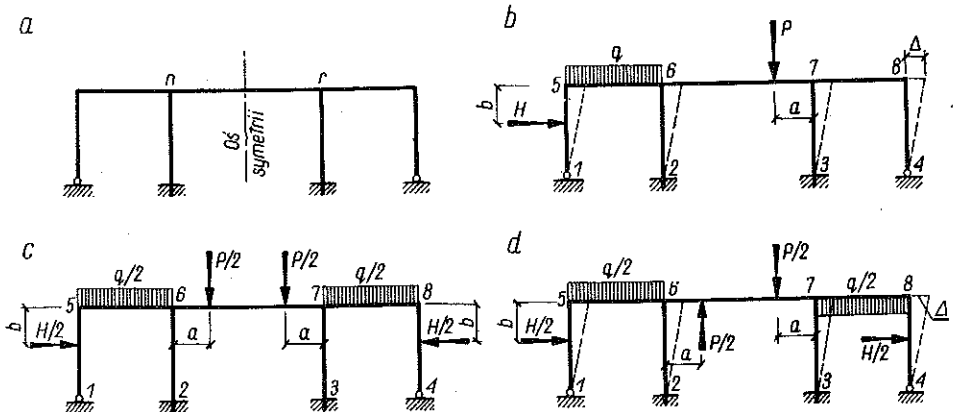
gdzie k_k jest współczynnikiem sprężystego osiadania podpory, a Δ_k wartością sprężystego osiadania podpory.

Przedstawiony sposób (dwuetapowy) można zalecić w ramownicach tego typu, gdzie nie występuje wiele składowych przesunięć, a więc ułożenie i rozwiązanie równań nie będzie uciążliwe.

Warunek ten spełniony jest w większości rozważanych ram, gdyż ilość składowych przesunięć wynosi zwykle 1 lub 2, lub mieści się zazwyczaj w granicach 4 (z wyjątkiem np. ram o wielu kondygnacjach).

3.3. Zastosowanie symetrii i antysymetrii przy budowie analogów. W przypadku gdy rama przedstawia układ symetryczny względem pewnej osi, to dowolne obciążenie działające na ramę można rozłożyć na symetryczne i antysymetryczne względem tej osi. Możemy zatem skorzystać z uproszczeń wynikających z symetrycznego i antysymetrycznego odkształcenia układu. Odróżnimy dwa przypadki, gdy oś symetrii przechodzi przez przęśło oraz gdy przechodzi przez podporę.

W przypadku pierwszym rozpatrzmy dla przykładu ramę podaną na rys. 18a, w której oś symetrii przecina pręt $n-r$. Dowolne obciążenie działające na ramę



Rys. 18

(por. rys. 18b) rozłożyć można na symetryczne (rys. 18c) oraz antysymetryczne (18d). Sumując odkształcenia lub odpowiednie wielkości sił w prętach, otrzymane oddzielnie dla schematu c oraz d ze sobą, znajdziemy na zasadzie superpozycji rozwiązanie dla dowolnego obciążenia przedstawionego na rys. 18b (schemat b).

Rozpatrzmy najpierw przypadek symetrii. Z warunku odkształceń (warunek symetrycznego odkształcenia ramownicy względem osi symetrii) (dla rys. 18c) otrzymujemy upraszczające związki

$$\varphi_5 = -\varphi_8, \quad \varphi_6 = -\varphi_7, \quad \Delta = 0.$$

Zamiast zatem pięciu niewiadomych w metodzie odkształceń zastosowanej do omawianej ramownicy, a mianowicie $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ i Δ otrzymujemy po uwzględnieniu wypisanych wyżej równości tylko dwie.

Przyjmując jako niewiadome kąty obrotów φ_5 i φ_6 trzeba zatem ułożyć tylko dwa równania równowagi (1.16), do których wejdą sztywności schodzących się w tych węzłach prętów. Wystarczy zatem i w schemacie elektrycznym uwzględnić tylko jedną (np. lewą) część ramy odciętą przekrojem.

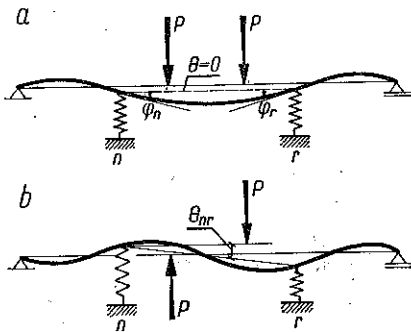
Przejdźmy do określenia sztywności a następnie schematu elektrycznego pręta $n-r$ przeciętego przekrojem symetrii (rys. 18a).

Uwzględniając we wzorze (1.3) $\varphi_r = -\varphi_n$ oraz $\theta_{nr} = 0$ otrzymamy $M_{nr} = -\frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}\varphi_n - \frac{2}{l_{nr}}(2\mathcal{R}_{nr} - \mathcal{R}_{rn})$. W przypadku symetrii otrzymujemy ponadto, że reakcje wtórne muszą być sobie równe czyli

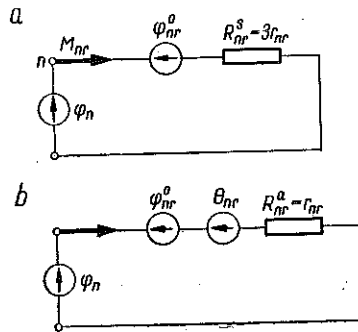
$$\mathcal{R}_{rn} = \mathcal{R}_{nr} = EJ_{nr}\varphi_{nr}^0.$$

W ten sposób ostatecznie otrzymamy

$$(3.4) \quad M_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}\varphi_n - \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}}\varphi_{nr}^0.$$



Rys. 19



Rys. 20

Odpowiednią wartość natężenia prądu w węźle n otrzymamy (co łatwo sprawdzić) w sieci podanej na rys. 20a, jeżeli włączymy jako siły elektromotoryczne φ_n oraz φ_{nr}^0 . Wartość oporu wynosi

$$R_{nr}^s = \frac{l_{nr}}{2EJ_{nr}},$$

czyli zgodnie ze wzorem (2.7)

$$(3.5) \quad R_{nr}^s = 3r_{nr}.$$

Przy antysymetrycznym rodzaju odkształcenia (w ogólnym przypadku należy wziąć pod uwagę również kąt θ np. w belce podanej na rys. 19b) mamy $\varphi_r = \varphi_n$ oraz $\mathcal{R}_{rn} = -\mathcal{R}_{nr}$.

Uwzględniając ostatnie zależności we wzorze (1.3) otrzymamy

$$M_{nr} = \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}} (3\varphi_n - 3\theta_{nr}) - \frac{2EJ_{nr}}{l_{nr}} \cdot 3\varphi_{nr}^0.$$

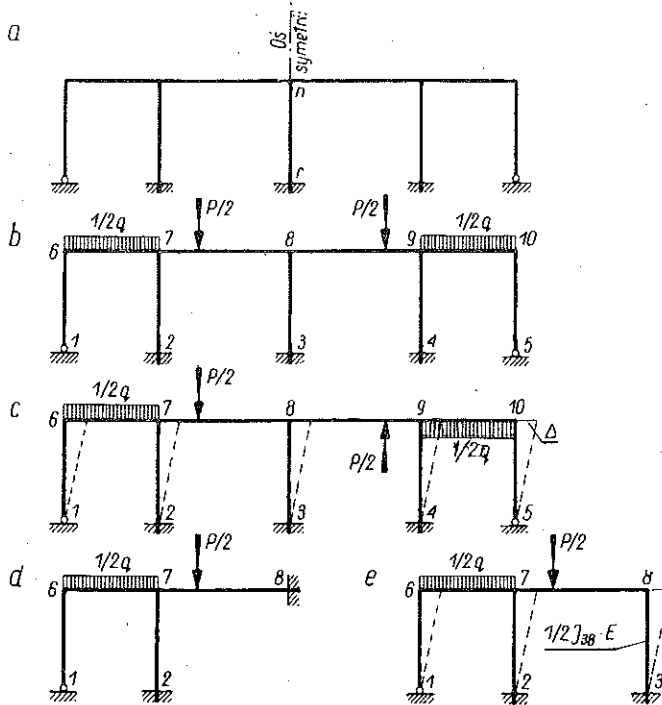
Analog elektryczny pręta $n-r$ przy antysymetrycznym odkształceniu przedstawiony został (z uwzględnieniem znaków) na rysunku 20b.

Opór dołączony do obwodu

$$(3.6) \quad R_{nr}^a = \frac{l_{nr}}{6EJ_{nr}} = r_{nr},$$

gdzie r_{nr} określone zostało wcześniej zależnością (2.7).

Rozpatrzmy z kolei ramę przedstawioną na rys. 21a, w której oś symetrii przechodzi przez słup środkowy. Przy symetrycznym obciążeniu (rys. 21b) otrzymamy



Rys. 21

z warunku symetrii odkształcenia $\varphi_6 = -\varphi_{10}$, $\varphi_7 = -\varphi_9$, $\varphi_8 = 0$ oraz $\Delta = 0$. Uwzględniając powyższe równości pozostają do wyznaczenia tylko dwa kąty obrotu np. φ_6 i φ_7 . Wystarczy zatem rozważyć schemat ramy ograniczonej węzłami 1, 2, 6, 7 i 8 przy uwzględnieniu warunku brzegowego $\varphi_8 = 0$. Statyczny schemat układu podany został na rys. 21d.

W przypadku antysymetrycznego obciążenia (rys. 21c) zachodzą związki $\varphi_6 = \varphi_{10}$ oraz $\varphi_7 = \varphi_9$. Uwzględniając je będziemy mieli ostatecznie do wyznaczenia φ_6 ,

φ_7, φ_8 oraz przesuw poziomy Δ . Wystarczy wówczas rozważyć ramę ograniczoną węzłami 1, 2, 3, 6, 7 i 8 z tym, że sztywność słupa $r-n$ przeciętego osią symetrii rzeczywistego schematu ramy (rys. 21a) należy przyjąć równą $J_{nr}E/2$. Zastępczy schemat ramy podany został na rys. 21e.

Widzimy zatem, że stosowanie symetrii i antysymetrii odkształcenia układu pozwala na znaczne uproszczenie schematu i prowadzi do podobnych korzyści, które zostały powszechnie zastosowane przy obliczeniach statycznych.

Na zakończenie podamy w jakich przypadkach stosowanie elektrycznych układów analogowych powinno okazać się korzystniejsze od tradycyjnych obliczeń statycznych.

Ze względu na konieczność posiadania odpowiedniej aparatury oraz przeszkolenia w obsłudze inżyniera statyka, stosowanie elektrycznych układów analogowych opłaci się przede wszystkim tam, gdzie mamy wykonać znaczną ilość obliczeń statycznych. Po zorganizowaniu na terenie biura projektów specjalnej pracowni operującej analogami elektrycznymi można będzie stwierdzić praktyczną jej przydatność.

W przypadku obliczenia na analogu otrzymujemy wyniki, które trzeba by sprawdzać również za pomocą analogu lub wykonać odpowiednie obliczenia kontrolne. W danym przypadku wystarczy wypisać warunki równowagi przy metodzie odkształceń lub równania kanoniczne przy metodzie sił. Wypisanie a następnie sprawdzenie równań przez projektanta (przy podstawieniu wielkości pomierzonych na analogu) będzie całkowicie wystarczającą dokumentacją, że rozwiązanie jest właściwe. Pozwoliłoby to zarazem na przeprowadzenie weryfikacji obliczeń już tylko na papierze.

Drugie zastosowanie analogów to kontrola wykonanych już obliczeń statycznych. Weryfikator mający do dyspozycji analog, musiałby zestawić odpowiedni układ ramy oraz pomierzyć odpowiednie wielkości napięć lub prądów. Przy użyciu analogu weryfikator zamiast sprawdzać wszystkie kolejne fazy obliczenia musiałby porównać wartości uzyskane z analogu z wynikami uzyskanymi przez projektanta. W przypadku zgodności (z wystarczającą praktycznie dokładnością) obliczenie weryfikowane posiada prawidłowe rozwiązanie.

Analog elektryczny (układu przedstawionego w niniejszej pracy) posiada tę ważną cechę, że służyć może zarówno do kontroli obliczeń, gdzie występują odkształcenia, jak i w przypadku gdzie występują momenty.

Kontrola wykonana na analogu posiadałaby nawet pewną wyższość nad tradycyjną kontrolą działań arytmetycznych, gdyż błąd popełniony przez projektanta często może zostać niezauważony przy kontroli etapowej przez kontrolera. W danym przypadku użyta zostałaby zupełnie inna metoda, która wyklucza taką możliwość.

Trzecie zastosowanie analogów, to łatwa możliwość rozwiązania szeregu wariantów danej konstrukcji przy kolejnej zmianie parametrów. Przy obliczeniowym rozwiązaniu ramownicy zmiana np. sztywności lub długości prętów powoduje konieczność powtórznego ułożenia równań i ich rozwiązania. Na drodze natomiast

analogii elektrycznej w przypadku już zestawionego analogu cała operacja sprowadzi się do pokręcenia np. galek potencjometrów i ponownego pomiaru prądów lub napięć. W ten sposób rozwiązanie szeregu rozwiązań i wybranie w konsekwencji możliwie najlepszego może być uzyskane za pomocą analogu wielokrotnie szybciej niż przy użyciu tradycyjnych metod obliczeniowych.

Zagadnienie ostatnie, tzw. formowanie (kształtowanie) schematu statycznego konstrukcji, rozważył autor w pracy [3].

Literatura cytowana w tekście

[1] К. К. КЕРОПЯН, ред., *Электрическое моделирование стержневых систем*, Госстройиздат 1958.

[2] A. LISOWSKI, *Obliczanie ram przestrzennych*, Bud. Arch., 1954.

[3] A. LISOWSKI, *Zastosowanie elektrycznych układów analogowych do formowania schematu statycznego konstrukcji*, Inż. Budown. (w druku).

[4] I. MAŁECKI, *Nowe zastosowania metody analogii*, Arch. Mech. Stos., 4 (1952).

Резюме

АНАЛОГИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ КОЛЬТРИ И ГУЛЬДАНА

Между электрическими и механическими явлениями существует большое подобие. В особенности много статических систем можно на основании аналогии рассматривать с помощью электрических систем. В работе рассматриваются аналогические системы электрической цепи при использовании их для решения стержневых систем рам (ферм) и балок. Автор основывает свои рассуждения на работе И. МАЛЫЦКОГО, [4], и советских ученых, [1].

В работе сводятся уравнения потенциалов Колтри, применяемые при расчетах электрической сети (2.2), к идентичному виду с формой уравнения равновесия узлов, применяемого в методе деформаций при решении рам предложенном ГУЛЬДАНОМ (1.16). Это дает возможность легко определить электрическую аналогию данной статической системы и проверить уравнение равновесия узлов рассматриваемой рамы.

Далее рассматриваются крайние условия опоры стержня как напр. шарнирная опора, полное и упругое защемление и действие момента приложенного к узлу с наружной стороны. В качестве примера может служить узел, показанный на рис. 15.

В применении к плоским рамам рассматриваются рамы с неподвижными и подвижными узлами. При рассмотрении этих последних используется двухэтапный способ всеобщее применяемый в методе Кросса. В случае симметрических рам обсуждаются выгоды, вытекающие из применения симметрической и асимметрической нагрузки системы.

В заключение даются примеры, в которых применение электрических аналогических систем по сравнению с традиционными статическими расчетами должно оказаться более выгодным. Здесь можно привести, между прочим, определение линий влияния, проверку расчетов, решение системы при переменных параметрах (изменение длины, жесткости и количества стержней), что приведет к рациональному проектированию статической системы конструкций.

Summary

AN ANALOGY BETWEEN THE COLTRI AND GULDAN EQUATIONS

There are far reaching analogies between electric and mechanical phenomena enabling many mechanical systems to be studied by means of electric layouts. The present paper is devoted to the

application of electric network analogues to the solution of problems of bar structures. The considerations are based on Prof. MAŁECKI [4] and Soviet scientists.

The Coltri potential equation for the solution of electric networks (2.2) are reduced to the same form as the equilibrium equations of nodes of the Guldan deformation method (1.16). This enables the simple determination of an electric analog for a mechanical system and the verification of the equilibrium equations of the nodes of a frame.

Various support conditions are considered such as those of hinged, rigidly and elastically clamped support as well as the action of a moment acting on a node. As an example the node of Fig. 15 may be quoted.

In the case of plane frames, fixed and moving nodes are considered. For the latter the two-stage procedure is used as usually with the Cross method.

In the case of symmetric frames the advantages of applying symmetric and antisymmetric load are discussed.

In conclusion, examples are given, in which the application of electric analog systems should prove more advantageous, than that of traditional computation methods. The solution for variable parameters (length, rigidity and number of bars) should be mentioned, enabling rational design of a structure, the determination of influence lines, the verification of computations, etc.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 stycznia 1961 r.