

**JAN MADEJSKI**

**ZMĘCZENIE I TLUMIENIE W PRĘTACH PRYZMATYCZNYCH**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXCH**

**TOM IX . ZESZYT 2 . ROK 1961**

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp. Kryterium zniszczenia	211
2. Obliczenie ilości uszkodzeń	212
3. Granica sprężystości i lepkość	214
4. Obliczenie temperatury i tłumienia	216
5. Obliczenie defektu podczas obciążeń zmęczeniowych	221
6. Szczególne przypadki wpływu procesu odbudowy na wzrost defektu	225
7. Obliczanie funkcji $Z_W$ i $Z_D$	227
8. Zmienność naprężeń własnych podczas zmęczenia	231
9. Wymiana ciepła między elementem obciążonym zmęczeniowo a otoczeniem	234
10. Konfrontacja teorii z doświadczeniem	236

## 1. Wstęp. Kryterium zniszczenia

Zniszczenie zmęczeniowe elementu konstrukcyjnego jest rozumiane w niniejszej pracy jako zniszczenie bez zauważalnego całkowitego odkształcenia trwałego w wyniku długotrwałego obciążenia. Z natury rzeczy zjawisko takie jest możliwe w przypadkach obciążeń cyklicznych zmieniających znak (np. rozciąganie, ściskanie, zginanie albo skręcanie raz w jedną, a potem w drugą stronę itd.). Jeśli pręt zachowuje swój pierwotny kształt i przekrój po każdorazowym odciążeniu, a odkształcenia trwałe wywołują zmianę jego długości (przy rozciąganiu lub ścisaniu) lub kształtu włókien (przy skręcaniu prętów o przekroju kołowym lub pierścieniowym), to te przypadki mogą być również analizowane w oparciu o poniższą teorię, mimo iż nie są objęte powyżej podanym określeniem zmęczenia. Do przypadków tych należą tzw. niesymetryczne cykle obciążeń, które można uważać za wypadkową obciążenia stałego oraz symetrycznego obciążenia cyklicznego.

Zniszczenie zmęczeniowe tłumaczymy jako wynik akumulacji uszkodzeń  $\eta$ , które w chwili złomu osiągają wartość graniczną  $\eta_z$ . Ostatnią wielkość traktujemy jako charakterystyczną funkcję materiałową, zależną od temperatury. Bardziej praktyczne znaczenie ma defekt  $D$ , tj. uszkodzenie względne:

$$(1.1) \quad D = \frac{\eta}{\eta_z} \leq 1.$$

Dla momentu zniszczenia będzie zatem  $D = 1$ .

Uszkodzenie powiększa się wskutek działającego obciążenia; jednocześnie w materiale obserwuje się proces odbudowy, polegający na samorzutnej likwidacji uszkodzeń. Prędkość tego procesu, rozumianą jako ilość zlikwidowanych uszkodzeń w jednostce czasu w stosunku do istniejącego uszkodzenia, oznaczymy przez  $h$ . W ten sposób, jeśli ilość powstających wskutek obciążenia uszkodzeń w jednostce czasu wynosi  $\zeta$ , to przyrost uszkodzenia  $d\eta$  w okresie czasu  $dt$  wyniesie

$$d\eta = (\zeta - \eta h) dt,$$

skąd

$$\dot{\eta} + \eta h = \zeta,$$

albo

$$(1.2) \quad \dot{D} + hD = \frac{\zeta}{\eta_z}.$$

Równanie to opisuje proces czasowy wzrostu defektu. Zauważmy, że przy  $\zeta = 0$ , tj. podczas odciążenia elementu, defekt samorzutnie maleje w myśl prawa

$$D = D_0 e^{-ht}.$$

Zjawiska tego typu były obserwowane, mimo iż daleko jeszcze do dokładnego zbadania mechanizmu likwidacji uszkodzeń. FRENKEL ([2], str. 260) podaje dla prędkości procesu odbudowy wzór

$$h = \text{const } e^{-\frac{\Delta U}{RT}},$$

gdzie  $\Delta U$  (w kcal/kmol) oznacza «wysokość bariery potencjalnej charakteryzującej energię stanu metatrwałego atomu»,  $R$  stałą gazową ( $R = 1,986 \text{ kcal/kmol}^\circ\text{K}$ ), a  $T$  temperaturę bezwzględną.

O rzędzie wielkości energii  $\Delta U$  można się zorientować na podstawie prac SZAPOSZNIKOWA i SZASZINA ([1], s. 365), którzy podają, że w przypadku sorbitycznej stali 50 1-godzinny «odpoczynek» w temp.  $150^\circ\text{C}$  miał mniej więcej taki sam rezultat, jak 24-godzinny «odpoczynek» w temp.  $20^\circ\text{C}$ . W drugim zatem przypadku prędkość  $h$  musiała być 24 razy mniejsza, co pozwala na obliczenie  $\Delta U$ , wynoszącej w danym przypadku ok. 6 000 kcal/kmol. W procesach, podczas których zmienia się temperatura, ulega zmianom również prędkość procesu odbudowy, a mianowicie prędkość ta rośnie (bardzo szybko) ze wzrostem temperatury. Jeśli przyrosty temperatur nie są znaczne, a więc wielkości

$$(1.3) \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

niewielkie ( $T_0$  jest temperaturą początkową), to w przybliżeniu

$$(1.4) \quad h = h_0 e^{\frac{\Delta U}{RT_0} \vartheta},$$

przy czym  $h_0 = h(T_0)$ . Wielkość bezwymiarowa  $\Delta U/RT_0$  wynosi dla przykładu ok. 10 dla stali sorbitycznej 50 w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ , jeśli za podstawę przyjąć wzmiankowane doświadczenia SZAPOSZNIKOWA i SZASZINA.

## 2. Obliczenie ilości uszkodzeń

Tak jak w poprzednich pracach autora ([3], [27], [28], [30] i [31]) przyjmujemy, że uszkodzenie stanowi sumę bezwzględnych wartości intensywności odkształceń plastycznych w danym procesie obciążenia elementu konstrukcyjnego. Poszukiwaną wielkość obliczymy korzystając z równań niestacjonarnej teorii plastyczności, podanych przez autora w pracy [3] dla głównych osi naprężeń, a wypisanych poniżej w ogólnej postaci:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_j &= \frac{1}{E} \left( \dot{\sigma}_j - \nu \sum_{k \neq j} \dot{\sigma}_k \right) + \frac{1}{2(1 + \nu_p)\mu} \left[ \sigma_j - \sigma_{j,\infty} - \nu_p \sum_{k \neq j} (\sigma_k - \sigma_{k,\infty}) \right], \\ \dot{\gamma}_{jk} &= \frac{\dot{\tau}_{jk}}{G} + \frac{\tau_{jk} - \tau_{jk,\infty}}{\mu} \quad (j, k = x, y, z). \end{aligned}$$

W równaniach tych  $\varepsilon, \gamma$  oznaczają odkształcenia,  $\sigma, \tau$  naprężenia;  $x, y, z$  prostoliniowe współrzędne prostokątne, zaś  $E$  moduł Younga. Moduł  $G$  określa wzór

$$(2.2) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona dla odkształceń sprężystych. Dynamiczny współczynnik lepkości  $\mu$  wiąże się z czasem relaksacji  $\theta$  i modułami sprężystości w następujący sposób:

$$(2.3) \quad \mu = \frac{E\theta}{2(1+\nu_p)} = G\theta \frac{1+\nu}{1+\nu_p};$$

tutaj  $\nu_p$  jest współczynnikiem Poissona dla odkształceń trwałych. Ogólnie przyjęto, że można założyć  $\nu_p = 1/2$ ; wartość  $\nu$  zalecają ROWINSKI i LUTCAU, [4], przyjmować równą  $1/4$ , tak jak to wynika z teorii Poissona.

Tensor naprężeń stanu równowagi

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x,\infty} & \tau_{xy,\infty} & \tau_{xz,\infty} \\ \cdot & \sigma_{y,\infty} & \tau_{yz,\infty} \\ \cdot & \cdot & \sigma_{z,\infty} \end{vmatrix}$$

ma spełniać warunek Hubera:

$$(2.4) \quad 2\sigma_E^2 = (\sigma_{x,\infty} - \sigma_{y,\infty})^2 + (\sigma_{y,\infty} - \sigma_{z,\infty})^2 + (\sigma_{z,\infty} - \sigma_{x,\infty})^2 + \\ + 6(\tau_{xy,\infty}^2 + \tau_{yz,\infty}^2 + \tau_{zx,\infty}^2),$$

przy czym  $\sigma_E$  oznacza granicę sprężystości.

Równania (2.1) łatwo jest uzupełnić wyrazami odnoszącymi się do naprężeń termicznych. Należy dodać, że podany układ równań dotyczy przypadków, gdy intensywność naprężeń przekracza granicę sprężystości:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} > \sigma_E.$$

W przeciwnym przypadku zagadnienie rozwiązuje się metodą teorii sprężystości.

W zagadnieniach jednowymiarowych równanie stanu (2.1) ma postać

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \alpha E\dot{T} - \frac{\sigma - \sigma_E}{\theta},$$

skąd wynika, że całkowita prędkość odkształceń  $\dot{\varepsilon}$  jest sumą prędkości odkształceń sprężystych  $\dot{\varepsilon}^e$ , termicznych  $\dot{\varepsilon}^T$  i trwałych  $\dot{\varepsilon}^P$  (plastycznych):

$$(2.5) \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^T + \dot{\varepsilon}^P, \quad \dot{\varepsilon}^P = \frac{\sigma - \sigma_E}{2(1+\nu_p)\mu} = \frac{\sigma - \sigma_E}{3\mu}.$$

W ogólnym przypadku wielkości te przedstawiają odpowiednie intensywności odkształceń.

Jeśli cykl obciążenia trwa  $2\pi/\omega$  sekund ( $\omega$  jest prędkością kątową), to podczas pierwszego okresu, w którym działają naprężenia tego samego znaku, np. rozciąg-

gające, powstanie odkształcenie plastyczne  $\varepsilon_+^P > 0$ ; podczas następnego okresu, w którym działają naprężenia o znaku przeciwnym, np. ściskające, powstanie odkształcenie plastyczne  $\varepsilon_-^P < 0$ . W sumie odkształcenia te mogą dać zero, jednak suma ich bezwzględnych wartości będzie dodatnia. Stanowi ona właśnie powstałe w okresie 1 cyklu uszkodzenie.

Jeśli cykle są krótkie (duża prędkość kątowna), to można w przybliżeniu napisać

$$(2.6) \quad \zeta = \frac{\omega}{2\pi} (\varepsilon_+^P + |\varepsilon_-^P|) = \frac{\omega}{2\pi} (\varepsilon_+^P - \varepsilon_-^P).$$

W ten sposób obliczamy wartość  $\zeta$ , która będzie zależała nie tylko od prędkości kątowej, lecz przede wszystkim od wymiarów i kształtu elementu i charakteru obciążenia.

### 3. Granica sprężystości i lepkość

Wielkością, która decyduje w pierwszym rzędzie o wielkości odkształceń plastycznych, jest dynamiczny współczynnik lepkości  $\mu$  (w skrócie lepkość). Jak wiadomo, lepkość jest cechą w zasadzie tylko gazów i cieczy. Jeśli uważać, jak to czyni TAMMANN, za ciało stałe tylko kryształ, to oczywiście musiałoby być dla ciał stałych  $\mu = \infty$ , co oznacza niemożliwość odkształceń trwałych. Jest to jednak tylko sprawa terminologii, gdyż substancja może znajdować się również w stanie stałym w fazie bezpostaciowej, jaką jest szkło. Ta faza posiada skończoną wartość lepkości, a istnienie jej obok faz krystalicznych umożliwia odkształcenia plastyczne. W przypadku metali i ich stopów faza szklista jest nietrwała w neutralnym (odciążonym) stanie materiału i szybko krystalizuje. Faza szklista pojawi się natomiast po obciążeniu, o czym świadczy istnienie granicy sprężystości. Podczas obciążenia musi zatem zachodzić przemiana fazowa odwracalna typu

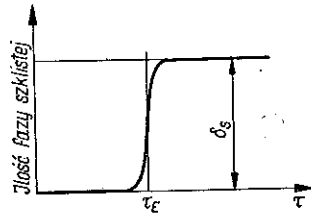
$$(3.1) \quad \text{faza krystaliczna} \rightarrow \text{faza szklista},$$

o charakterze energochłonnym (endotermicznym). Przemianę tę charakteryzuje dość duża (jak przypuszczamy) prędkość. Jeśli jednak prędkość ta jest współmierna z prędkością narastania obciążeń, to muszą wystąpić różnice w mierzonych wartościach granicy sprężystości. Mianowicie, im wyższa prędkość narastania naprężeń, tym wyższa granica sprężystości, a przy dostatecznie gwałtownych obciążeniach typu udarowego może w związku z tym nastąpić zahamowanie procesu odkształceń plastycznych. Fakt ten był wielokrotnie obserwowany przez badaczy m. in. przez CLARKA, [5], i COTTRELLA.

Jak widać, mamy tu do czynienia z drugim z kolei procesem przebiegającym w czasie, który towarzyszy zmęczeniu. Uwzględnienie tego zjawiska, aczkolwiek możliwe (por. np. [29]), spowodowałoby jednak duże kłopoty rachunkowe i zaciemniło analizę, jaką zamierzamy tu przeprowadzić. Z tej przyczyny wprowadzamy uproszczony model kształtowania się granicy sprężystości, słuszny w zasadzie dla znacznie wolniejszych prędkości narastania naprężeń od prędkości reakcji(3.1).

W modelu tym (rys. 1) (izotermicznym) w bliskości naprężenia stycznego  $\tau_E = \sigma_E/\sqrt{3}$  szybko powstaje równowagowa ilość  $\delta_s$  fazy szklistej, umożliwiającej ruch plastyczny. Wskutek bardzo szybkiej zmiany wartość  $\tau_E$  traktujemy jako stałą, a raczej jako funkcję materiałową zależną od temperatury. Jeśli obciążony element materiału wyobrazimy sobie jako płytę o grubości jednostkowej, obciążoną na jej powierzchniach naprężeniami stycznymi  $\tau$ , to dla  $\tau > \tau_E$  można wyobrazić sobie powstanie w płycie warstwy fazy bezpostaciowej o lepkości  $\mu_s$ , przy czym grubość tej warstwy (dla której KISTLER, [16], s. 65, wprowadził termin «cyboma») wynosi  $\delta_s$ . Opory lepkie stawia wyłącznie ta warstwa, a zatem pozorna (wypadkowa) lepkość wyniesie dla naszego modelu

$$\mu = \frac{\mu_s}{\delta_s}$$



Rys. 1

Zjawisko, które opisujemy, nazywa STEWART, ([16], s. 65) terminem «cybotaxis». Ma ono również związek z teorią dyslokacji. Mechanizm tego zjawiska opisał POYNTING, ([16], s. 64), a przed nim POISSON i MAXWELL.

Z fizyki cieczy wiadomo jednak, że

$$\mu_s = \text{const} e^{\frac{U'}{RT}}$$

gdzie  $U'$  oznacza energię aktywacji, równą w danym przypadku różnicy między energiami obu faz w danej temperaturze  $T$ . Wielkość  $U'$  określimy uważając fazę bezpostaciową (szklistą) za ciecz przechłodzoną do temperatury  $T$  od temperatury topnienia  $T_M$ .

Korzystamy następnie z prawa Hessa, w myśl którego przyrost energii  $U'$  może być również otrzymany na drodze podgrzania fazy krystalicznej o ciepło molowym  $c_k$  kcal/kmol $\cdot$ 1 $^\circ$  do temperatury topnienia, stopieniu kryształu, związanym z doprowadzeniem ciepła topnienia  $r_M$  kcal/kmol oraz następnym ochłodzeniu cieczy przechłodzonej, posiadającej ciepło molowe  $c_s$  kcal/kmol $\cdot$ 1 $^\circ$  do temperatury wyjściowej. W związku z tym

$$(3.2) \quad U' = r_M + (c_k - c_s)(T_M - T) \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kmol}} \right]$$

W rezultacie otrzymamy

$$\mu = \frac{\text{const}}{\delta_s} e^{\frac{c_s - c_k}{R} T} e^{\frac{r_M + (c_k - c_s)T_M}{RT}}$$

to jest

$$(3.3) \quad \mu = \text{const} e^{\frac{r_M + (c_k - c_s)T_M}{RT}}$$

Wzór ten pozwala tylko ocenić rząd wielkości energii

$$U = r_M + (c_k - c_s)T_M$$

gdyż wartości  $c_s$  dla metali nie zostały dotąd pomierzone. Uzyskiwano wprawdzie bezpostaciową fazę metaliczną przez zestalenie bardzo szybko chłodzonych par metali, jednak faza ta bardzo szybko krystalizowała (por. [6], s. 815). Pewnych wskazówek dostarczyć mogą dane, dotyczące innych substancji stałych. Tak np. ciepło molowe  $\text{SiO}_2$  w fazie  $\alpha$ -kwarcu wynosi w temperaturze  $1000^\circ\text{K}$   $c_k = 19,34$  kcal/kmol  $\cdot 1^\circ$ , a w temperaturze  $250^\circ\text{K}$   $c_k = 9,20$  kcal/kmol  $\cdot 1^\circ$ .

Dla tych samych temperatur (dane według [7], s. 428)  $\text{SiO}_2$  w fazie szklistej ma  $c_s = 16,97$  oraz  $c_s = 9,10$  kcal/kmol  $\cdot 1^\circ$ . Mamy więc w danym przypadku

$$c_k - c_s = 2,37 \text{ kcal/kmol} \cdot 1^\circ \quad \text{dla} \quad 1000^\circ\text{K},$$

$$c_k - c_s = 0,10 \text{ kcal/kmol} \cdot 1^\circ \quad \text{dla} \quad 250^\circ\text{K}.$$

W tym przypadku mamy zatem  $c_k - c_s > 0$ . W przypadku metali i ich stopów ewentualność ta może zachodzić szczególnie w wyższych temperaturach. Dotyczy to zwłaszcza ferromagnetytów, jak żelazo, stal miękka, nikiel przy temperaturach bliskich punktowi Curie (dla niklu  $350^\circ\text{C}$ ). Należy się zatem liczyć ze zmiennością wielkości  $U$ . Rząd jej można oszacować zaniedbując  $c_k - c_s$ , co jest (jak podejrzewamy) bardziej uzasadnione w niższych temperaturach, zbliżonych do pokojowej. Obliczone w ten sposób wartości  $U/RT$  dla temperatury  $20^\circ\text{C}$  podaje tablica 1.

Tablica 1

Metal	$r_M \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kmol}} \right]$	$T_M [^\circ\text{K}]$	$m = U/RT_0$ dla $T_0 = 20^\circ\text{C}$
Żelazo	3560	1803	6,12
Nikiel	4200	1728	7,23
Aluminium	2550	933	4,39

Jeśli przyrosty temperatury w procesie obciążenia są nieznaczne, to lepkość można wyrazić wzorem

$$(3.4) \quad \mu = \mu_0 e^{-\frac{U}{RT_0} \vartheta},$$

przy czym  $\mu_0$  oznacza lepkość w temperaturze początkowej  $T_0$ , zaś  $\vartheta = (T - T_0)/T_0$ . Zwróćmy jeszcze uwagę, że rząd wielkości  $U/RT_0$  oraz  $\Delta U/RT_0$  jest ten sam.

#### 4. Obliczenie temperatury i tłumienia

Praca naprężeń wzdłuż odkształceń trwałych stanowi pracę tarcia wewnętrznego lub «tłumienie»  $W$ , jeśli odniesiemy ją do jednostki objętości i czasu.

Oznaczmy objętość elementu przez  $V$ , a czas trwania cyklu obciążenia przez  $2\pi/\omega$ . Moc tarcia wynosi

$$\int_V \sigma \dot{\epsilon}^p dV,$$



zaś tłumienie

$$W = \frac{\omega}{2\pi V} \int_{\text{cykl}} dt \int_V dV \sigma \dot{\varepsilon}^p \frac{kp}{m^2 s}.$$

Wprowadzimy bezwymiarową funkcję określoną przez dane geometryczne elementu, charakter obciążenia i stosunek  $S/\sigma_E$ , gdzie  $S$  oznacza naprężenie charakterystyczne:

$$(4.1) \quad Z_W = \frac{\mu\omega}{2\pi V S^2} \int_{\text{cykl}} dt \int_V dV \sigma \dot{\varepsilon}^p.$$

Wtedy

$$(4.2) \quad W = \frac{S^2 Z_W}{\mu} \frac{kp}{m^2 s}.$$

Rozpatrywany element konstrukcyjny jest prętem pryzmatycznym o długości  $l_0$ , powierzchni przekroju  $F$  i jego obwodzie  $\Omega$ ; objętość jego wynosi więc  $V = l_0 F$ . Załóżmy dla uproszczenia, że materiał na tyle dobrze przewodzi ciepło, że jego temperatura nie zależy od miejsca (tautotermia). Początkowa temperatura równa temperaturze otaczającej atmosfery wynosi  $T_0$ , w procesie obciążenia wzrasta ona do wartości  $T = T_0(1 + \vartheta)$ .

Oznaczywszy przez  $\alpha$  współczynnik przyjmowania ciepła w  $kp/(ms \cdot 1^\circ)$  oraz przez  $C$  ciepło właściwe w  $kp/(m^2 \cdot 1^\circ)$  możemy ułożyć bilans energetyczny dla okresu  $dt$ :

$$W dt V = CV dT + \alpha \Omega l_0 (T - T_0) dt.$$

Wprowadzając następnie promień hydrauliczny przekroju pręta

$$(4.3) \quad R_h = \frac{F}{\Omega}$$

oraz wielkości (1.3) i (4.2) otrzymamy po uproszczeniach

$$\frac{S^2 Z_W}{\mu_0} = CT_0 \dot{\vartheta} + \frac{\alpha T_0}{R_h} \vartheta.$$

Jednak  $\mu$  zależy od  $\vartheta$  w myśl wzoru (3.4), wobec czego otrzymujemy równanie

$$(4.4) \quad \frac{S^2 Z_W}{\mu_0} e^{\frac{U}{RT_0} \vartheta} = CT_0 \dot{\vartheta} + \frac{\alpha T_0}{R_h} \vartheta.$$

Nadmienić należy, że bilans ten nie uwzględnia efektów cieplnych jakichkolwiek zmian fazowych, które mogą ewentualnie zachodzić w procesie obciążenia.

Wprowadźmy nową zmienną, proporcjonalną do przyrostu temperatury,

$$(4.5) \quad y = \frac{U}{RT_0} \vartheta = m \vartheta, \quad m = \frac{U}{RT_0}.$$

Wstawiając  $y$  do równania (4.4) możemy następnie rozdzielić zmienne i przeprowadzić całkowanie od  $y = 0$  ( $\vartheta = 0$ ,  $T = T_0$ ) dla chwili początkowej  $t = 0$ ; otrzymamy

$$(4.6) \quad t = \frac{CT_0\mu_0}{mS^2Z_w} \int_0^y \frac{dy}{e^y - My},$$

przy czym

$$(4.7) \quad M = \frac{\alpha T_0\mu_0}{R_h m S^2 Z_w}.$$

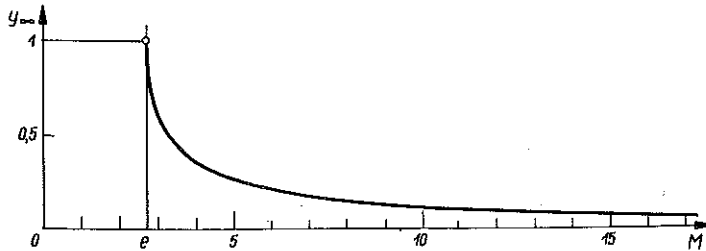
Wartość  $M$  charakteryzuje m.in. warunki wymiany ciepła z otoczeniem; jeśli  $M = 0$  ( $\alpha = 0$ ), to proces jest adiabatyczny; przy  $M = \infty$  ( $\alpha = \infty$ ) proces przebiega izotermicznie ( $\vartheta = 0$ ). W ustalonych warunkach wymiany ciepła parametr  $M$  charakteryzuje wielkość obciążenia za pośrednictwem naprężenia charakterystycznego  $S$ .

W przypadku znikania mianownika wyrażenia podcałkowego we wzorze (4.6) funkcja  $y$  ustala się osiągając wartość  $y_\infty$  przy nieograniczonym wzroście czasu. Oznacza to, że warunek

$$(4.8) \quad e^{y_\infty} - My_\infty = 0$$

postuluje stabilizację temperatury i tłumienia.

Nie trudno zauważyć, że równanie to ma pierwiastki rzeczywiste tylko dla  $M \geq e$ , przy czym dla  $M = e$  mamy  $y_\infty = 1$ . Rysunek 2 przedstawia zależność  $y_\infty(M)$ .



Rys. 2

W ustalonych warunkach wymiany ciepła istnieje zatem pewna największa wartość naprężenia charakterystycznego  $S = S_e$ , związana z wartością  $M = e$ , przy której jeszcze istnieje możliwość stabilizacji tłumienia i temperatury. Wartość ta spełnia równanie

$$(4.9) \quad S_e^2 Z_{we} = \frac{\alpha T_0 \mu_0}{R_h m e}.$$

W przypadku materiału Maxwella ( $\sigma_E = 0$ ) funkcja  $Z_w$  nie zależy od stosunku  $S/\sigma_E$  i wtedy

$$(4.10) \quad S_e = \sqrt{\frac{\alpha T_0 \mu_0}{R_h m e Z_{we}}}.$$

Niektórzy badacze przypuszczają, że naprężenie  $S_e$  można identyfikować z nieograniczoną wytrzymałością zmęczeniową. FREUDENTHAL ([8], s. 255) zwraca jednak uwagę, że byłoby tak tylko w tym przypadku, gdyby zmęczenie uwarunkowane było wyłącznie przez proces wzmocnienia (związany z powstawaniem odkształceń plastycznych), co jednak w rzeczywistości nie zachodzi.

Słuszne to stanowisko potwierdzają wyniki doświadczeń KARPENKI ([9], s. 63), który przeprowadzał badania zmęczeniowe na próbkach stali IIIX-15 w atmosferze powietrza oraz w atmosferze heptanu (cieczy w warunkach normalnych). Ponieważ heptan nie reaguje chemicznie ze stalą i nie wywołuje zatem korozji i związanych z nią mikrokarbów na powierzchni próbki, zaś jako ciecz powoduje znaczny (mniej więcej 100-krotny) wzrost współczynnika  $\alpha$ , przeto wartość  $S_e$  w przypadku chłodzenia heptanem będzie kilkakrotnie wyższa niż w przypadku atmosfery powietrznej. Tymczasem wzrost nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej wyniósł zaledwie 10%. Wielkość  $S_e$  przydaje się w obliczeniach jako parametr pomocniczy, charakterystyczny dla danego materiału i warunków doświadczenia.

Zauważmy, że tłumienie wyraża się wzorem

$$(4.11) \quad W = \frac{S_e^2 Z_w}{\mu_0} e^y.$$

Dla naprężenia  $S_e$  tłumienie początkowe  $W_{e0}$  wynosi

$$W_{e0} = \frac{S_e^2 Z_{we}}{\mu_0},$$

zaś maksymalna (ustabilizowana) jego wartość  $W_{e\infty}$  wynosi

$$W_{e\infty} = \frac{S_e^2 Z_{we}}{\mu_0} e = W_{e0} e = W_{e0} M.$$

Wygodnie jest zatem wprowadzić bezwymiarowe tłumienie  $W^+$

$$(4.12) \quad W^+ = \frac{W}{W_{e\infty}} = \frac{S_e^2 Z_w}{S_e^2 Z_{we}} \frac{e^y}{e} = \frac{e^y}{M}.$$

Tu parametr  $M$  wiąże się z wartością  $S_e^2 Z_w$  za pomocą wzoru

$$(4.13) \quad M = e \frac{S_e^2 Z_{we}}{S_e^2 Z_w}$$

i wyraża pośrednio naprężenie charakterystyczne  $S$ . Wprowadzając ten parametr do wzoru (4.6) otrzymamy

$$(4.14) \quad n^+ = M \int_0^y \frac{dy}{e^y - My},$$

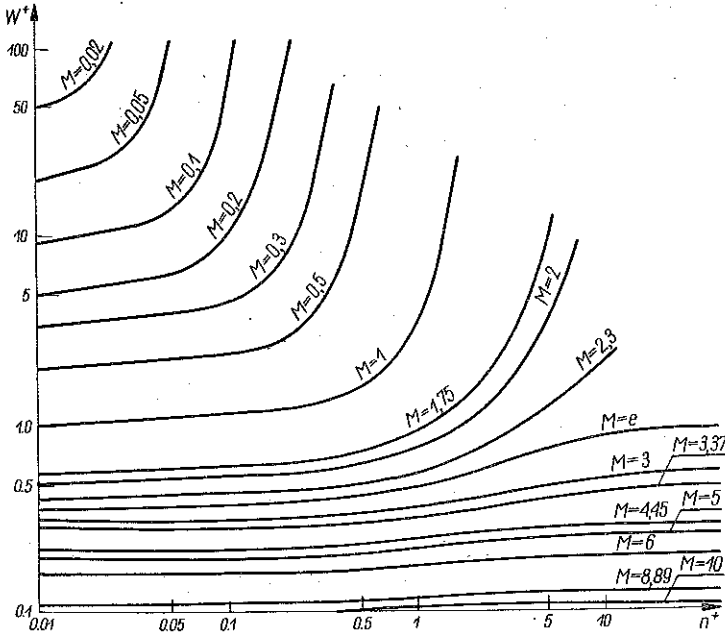
przy czym bezwymiarowa liczba

$$(4.15) \quad n^+ = t \frac{meZ_{we}S_e^2}{CT_0\mu_0}$$

jest wprost proporcjonalna do liczby cykli  $n$ , jako że  $n = \omega t/2\pi$ .  
Mamy więc

$$(4.16) \quad n^+ = \frac{2\pi an}{\omega CR_h}$$

Rugując z równań (4.12) i (4.14) wielkość  $y$  możemy wyznaczyć związek pomiędzy  $W^+$ ,  $n^+$  oraz  $M$ . Zależność ta, przedstawiona jest na rys. 3 i 4, ma charakter uniwersalny w zakresie uczynionych założeń.



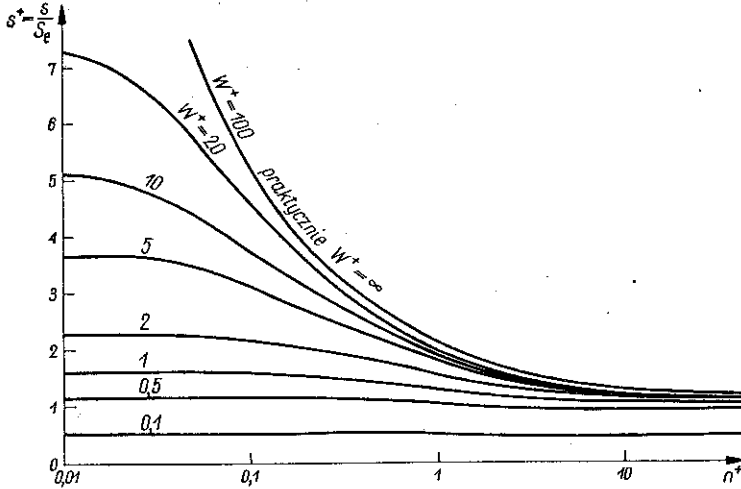
Rys. 3

Wielkość

$$S^+ = \frac{S}{S_e} \sqrt{\frac{Z_w}{Z_{we}}} = \sqrt{\frac{e}{M}}$$

przedstawiona na rys. 4 określa w przypadku materiału Maxwella ( $Z_w = Z_{we}$ ) względną wartość naprężenia charakterystycznego. Wykres na rys. 3 dość dobrze odzwierciedla doświadczalnie otrzymane tego rodzaju wykresy (por. np. [10], s. 69, rys. 45). W niektórych jednak przypadkach ([10], s. 70, rys. 46) otrzymano linie  $M = \text{const}$  tj.  $S = \text{const}$  początkowo wznoszące się w układzie  $W, n$ , później zaś opadające. Fakt ten można wytłumaczyć bądź wzrostem ciepła właściwego  $C$  przy

rosnącym  $n$ , wskutek czego ze wzrostem  $n$  wielkość  $n^+$  maleje (następuje cofanie się po linii  $M = \text{const}$  w układzie  $W^+, n^+$ ) v, bądź też intensyfikacją zmian fazowych typu kryształ  $\rightarrow$  kryształ o charakterze endotermicznym, powodujących niejako wzrost pozornego ciepła właściwego. Zjawisk tych jako zbyt komplikujących przedstawianą teorię nie możemy tutaj rozpatrywać.



Rys. 4

Całka (4.14) da się łatwo obliczyć dla  $M = 0$ ; otrzymujemy mianowicie

$$(4.17) \quad S^+ = \sqrt{\frac{e}{n^+}},$$

co przedstawia linię  $W^+ = \infty$  na rys. 4. Linia ta musi z natury rzeczy ograniczać wszystkie krzywe Wöhlera, można ją więc uważać za najkorzystniejszy przypadek linii Wöhlera.

### 5. Obliczenie defektu podczas obciążeń zmęczeniowych

W obciążeniach zmęczeniowych największe naprężenia występują we włóknach skrajnych tj. powierzchniowych. Dotyczy to zginania, zginania obrotowego i skręcania (co wynika z teorii wytrzymałości materiałów), lecz również słuszne jest dla przemiennego rozciągania i ściskania ze względu na spiętrzenia naprężeń we włóknach powierzchniowych, wywołane przez karby i zgniot powstały w procesie obróbki. Wynika stąd, że maksymalny defekt powstaje zawsze we włóknach powierzchniowych (w warstwie powierzchniowej).

Przyjmijmy jako naprężenie charakterystyczne  $S$  maksymalne naprężenie, jakie działa w warstwie powierzchniowej, obliczone według zasad teorii sprężystości. Naprężenia, występujące w warstwie powierzchniowej, obliczane według tych zasad, oznaczymy przez  $\sigma_0(t)$ . W ten sposób

$$|\sigma_0(t)|_{\max} = S.$$

Na ogół materiał, z którego wykonano dany element konstrukcyjny, nie jest w stanie neutralnym, gdyż wskutek procesów obróbki panuje już tam zwykle pewien rozkład naprężeń własnych<sup>1</sup>  $\sigma_w$ .

Naprężenia wypadkowe należy obliczyć według zasad teorii sprężystości, przy czym w tym przypadku, gdy  $\sigma_0$  i  $\sigma_w$  są naprężeniami normalnymi, otrzymamy wypadkowe naprężenie w postaci sumy  $\sigma_0 + \sigma_w$ . Prócz tego na powierzchni występuje działanie karbów, wywołanych przez własności mikrogeometryczne powierzchni. Oznaczając współczynnik spiętrzenia naprężeń przez  $\alpha_k$ , otrzymamy rzeczywiste naprężenie  $\alpha_k(\sigma_0 + \sigma_w)$ . Nadwyżka naprężenia  $\sigma_0(\alpha_k - 1) + \sigma_w$  nie wpływa na obciążenie zewnętrzne elementu, gdyż występuje ona tylko w cienkiej warstwie powierzchniowej. Wyjątki wystąpią oczywiście w przypadkach bardzo cienkich elementów.

Rozpatrując dalej przypadek naprężeń normalnych, obliczymy prędkość odkształceń plastycznych w warstwie powierzchniowej stosując wzór (2.5); otrzymamy

$$(5.1) \quad \dot{\varepsilon}^P = \frac{\alpha_k(\sigma_0 + \sigma_w) - \sigma_E}{3\mu}$$

$$\text{dla} \quad \alpha_k(\sigma_0 + \sigma_w) > \sigma_E.$$

W okresie rozciągania ( $0 \leq t \leq t'$ ) otrzymamy

$$\varepsilon_+^P = \int_0^{t'} dt \dot{\varepsilon}^P,$$

a podczas następnego ściskania ( $t' \leq t \leq 2\pi/\omega$ ) będzie

$$\varepsilon_-^P = \int_{t'}^{2\pi/\omega} dt \dot{\varepsilon}^P.$$

W obliczeniach tych należy przyjmować dla  $\sigma_E$  taki znak, jaki posiada naprężenie  $\alpha_k(\sigma_0 + \sigma_w)$ . W rezultacie na podstawie wzoru (2.6) mamy

$$\zeta = \frac{\omega}{2\pi} \left( \int_0^{t'} dt \dot{\varepsilon}^P - \int_{t'}^{2\pi/\omega} dt \dot{\varepsilon}^P \right).$$

Wprowadzimy bezwymiarową funkcję określoną przez kształt i wymiary elementu obciążenie, rozkład naprężeń własnych, stosunek  $S/\sigma_E$  i wielkość  $\alpha_k$ :

$$(5.2) \quad Z_D = \frac{\mu\omega}{2\pi S} \left( \int_0^{t'} dt \dot{\varepsilon}^P - \int_{t'}^{2\pi/\omega} dt \dot{\varepsilon}^P \right),$$

<sup>1</sup> Termin ten obejmuje naprężenia zwane odlewniczymi, spawalniczymi, resztkowymi itd. Spotyka się termin «naprężenia wewnętrzne», który autor uważa za niefortunny. Naprężenia własne można określić jako te naprężenia, które równoważą się wewnątrz materiału bez pomocy obciążeń zewnętrznych.

wtedy

$$(5.3) \quad \zeta = \frac{SZ_D}{\mu} \left[ \frac{1}{\text{sek}} \right].$$

Wielkość tę wprowadzamy do równania (1.2); korzystając prócz tego z zależności (1.4) i (3.4) otrzymamy równanie

$$(5.4) \quad \dot{D} + h_0 e^{\frac{\Delta U}{RT_0}} D = \frac{SZ_D}{\eta_z \mu_0} e^{\frac{U}{RT_0}}.$$

Zauważmy, że defekt ustala się w czasie, jeśli dla  $t \rightarrow \infty$  jest  $\dot{D} = 0$ ; wtedy mamy jednak  $y = y_\infty = U\vartheta_\infty/RT_0$ . Oznaczmy odpowiadającą stabilizacji defektu jego wartość przez  $D_\infty$ .

Z równania (5.4) wynika, że

$$(5.5) \quad D_\infty = \frac{SZ_D}{\eta_z \mu_0 h_0} e^{\frac{U - \Delta U}{RT_0}}.$$

Naprężenie charakterystyczne  $S$  równa się wtedy nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej  $S_\infty$  (odpowiada jej funkcja  $Z_{D_\infty}$ ), gdy  $D_\infty = 1$ . Oczywiście dla  $D_\infty < 1$  złom również nie nastąpi nigdy, gdyż ustala się tu równowaga między czasowymi procesami powstawania uszkodzeń i odbudowy.

Mamy więc

$$(5.6) \quad S_\infty Z_{D_\infty} = \eta_z \mu_0 h_0 e^{\frac{\Delta U - U}{RT_0}}.$$

Inaczej możemy napisać

$$(5.7) \quad S_\infty Z_{D_\infty} = \eta_z \mu h,$$

przy czym  $\mu$  oraz  $h$  obliczone są dla temperatury stabilizacji  $T$ . Uwzględniając zależność tych wielkości od temperatury otrzymamy wzór

$$S_\infty Z_{D_\infty} = \text{const } \eta_z e^{\frac{U - \Delta U}{RT}}.$$

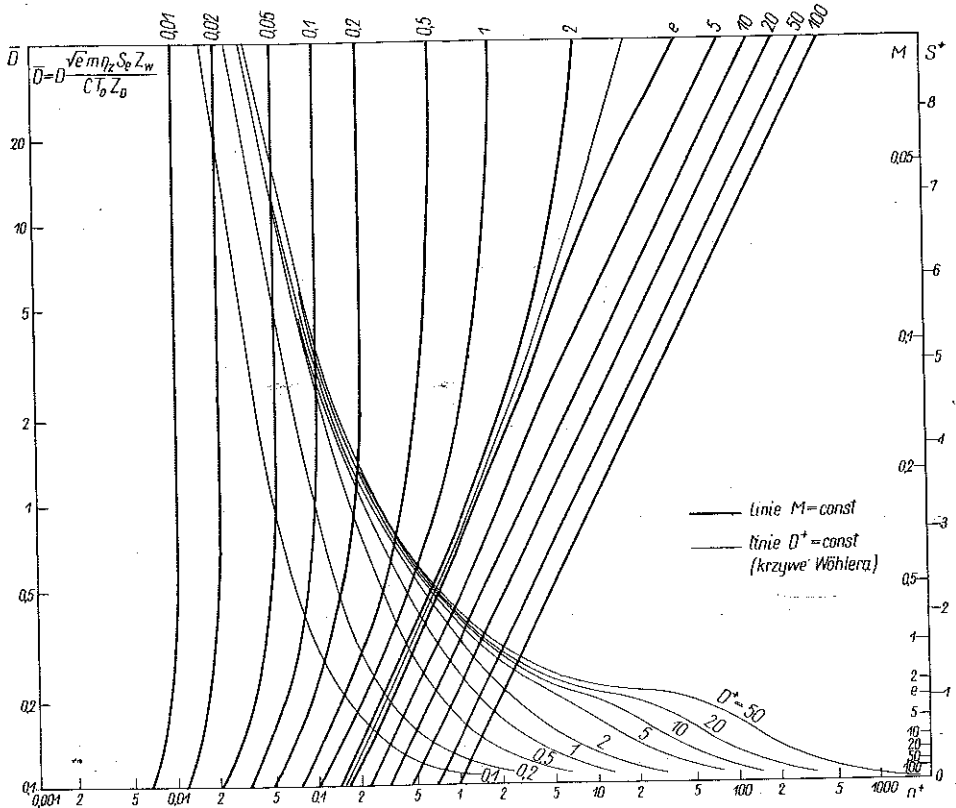
Pomijając na razie wpływ temperatury na  $\sigma_E$  i  $\eta_z$  możemy stwierdzić, że wytrzymałość zmęczeniowa wzrośnie przy podwyższonych temperaturach, o ile  $U < \Delta U$ , zmaleje zaś, o ile  $U > \Delta U$ . Przy  $U = \Delta U$  temperatura nie ma wpływu na wytrzymałość zmęczeniową. Tak jest właśnie w przypadku miękkich stali węglowych w zakresie temperatur od  $0^\circ\text{C}$  do  $200^\circ\text{C}$  oraz dla stali chromowej w zakresie  $150\text{--}400^\circ\text{C}$  (por. [10], s. 122, rys. 110). Wnioskujemy stąd o równości  $U \approx \Delta U$  dla stali węglowych we wzmiankowanym zakresie temperatur.

W ogólnym przypadku równanie (5.4) należy rozwiązać wspólnie z równaniem (4.4), przy czym zmienna  $t$  da się łatwo wyrugować. Otrzymamy w ten sposób rów-

nianie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu względem zmiennej  $D(\vartheta)$ . Rozwiązanie ogólne tego równania jest następujące:

$$(5.8) \quad D = \left[ D_0 + \frac{SZ_D}{\eta_z \mu_0 h_0} \frac{R_h Ch_0}{a} M \int_0^y \frac{e^y}{e^y - My} \exp\left(\frac{R_h Ch_0}{a} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times M \int_0^y \frac{e^{vy} dy}{e^y - My} \right) dy \right] \exp\left(-\frac{R_h Ch_0}{a} M \int_0^y \frac{e^{vy} dy}{e^y - My}\right), \quad v = \frac{\Delta U}{U},$$

jeśli założono, że dla  $y = 0$  (tj.  $\vartheta = 0$ ,  $t = 0$ ) mamy  $D = D_0$ . Dla próbek w stanie neutralnym  $D_0 = 0$ ; podobnie można przyjąć dla obciążeń następujących po długim „wypoczynku” próbki. Zajmiemy się szczególnie przypadkiem  $U = \Delta U$ ,



Rys. 5

odnosząc się do miękkich stali węglowych, a także do niektórych innych materiałów w odpowiednich zakresach temperatur. W tym przypadku, jak wynika ze wzoru (5.5), defekt ustala się w czasie nawet przy nieustaleniu się temperatury i wynosi

$$D_{\infty} = \frac{SZ_D}{\eta_z \mu_0 h_0}.$$



Wygodnie jest zatem wprowadzić względny defekt  $D^+$ , określony wzorem

$$(5.9) \quad D^+ = \frac{D}{D_\infty} = \frac{D\eta_z\mu_0h_0}{SZ_D}.$$

Możemy teraz przedstawić rozwiązanie (5.6) we współrzędnych  $M$ ,  $W^+$ ,  $n^+$  korzystając z zależności (4.12) i (4.14). Rezultat jest następujący:

$$(5.10) \quad D^+ = [D_0^+ + M^+ \int_0^{n^+} W^+ \exp(M^+ \int_0^{n^+} W^+ dn^+) dn^+] \exp(-M^+ \int_0^{n^+} W^+ dn^+),$$

przy czym

$$(5.11) \quad M^+ = \frac{R_h Ch_0}{\alpha} M = \frac{CT_0\mu_0h_0}{mS^2 Z_w}.$$

Przejście do podanego układu współrzędnych jest możliwe w zasadzie w każdym przypadku, również dla  $\nu \neq 1$ , ale tylko dla  $\nu = 1$  w całym zakresie tłumienia mamy  $D_0^+ \leq D^+ \leq 1$ . Znając parametr  $R_h Ch_0/\alpha$  można uzyskać rozwiązanie numeryczne korzystając z wykresu na rys. 3 przez wyznaczenie całki

$$\int_0^{n^+} W^+ dn^+.$$

Wykres tej funkcji podaje rys. 5, na którym wykreślono linie  $M = \text{const}$ .

#### 6. Szczególne przypadki wpływu procesu odbudowy na wzrost defektu

Jeśli parametr  $M^+$  jest mały, co występuje ze szczególną jaskrawością przy dużych naprężeniach  $S$ , to proces odbudowy będzie miał mały wpływ, a w stosownych przypadkach można go pominąć. Rozwiązanie (5.6) przybierze wtedy postać

$$(6.1) \quad D = D_0 + \frac{CT_0 Z_D}{\eta_z m S Z_w} \int_0^{n^+} W^+ dn^+,$$

lub, po wprowadzeniu parametru  $M$  [wzór (4.13)],

$$(6.2) \quad (D - D_0) \frac{\sqrt{e} m \eta_z S_e \sqrt{Z_w Z_{we}}}{CT_0 Z_D} = \sqrt{M} \int_0^{n^+} W^+ dn^+ = \bar{D}.$$

Rysunek 5 zawiera wykres ilustrujący zależność  $M(n^+)$  z liniami o stałym parametrze, figurującym po lewej stronie powyższego równania. Dla materiału Maxwella ( $\sigma_E = 0$ ) funkcje  $Z_w$  i  $Z_D$  nie zależą od wielkości  $S$ , przeto można oś  $M$  zaopatrzyć bezpośrednio w skalę  $S$  lub  $S^+$ ; wspomniane linie przedstawiają zatem bezpośrednio linie stałego defektu lub linie Wöhlera ( $D = 1$ ). Dla tych ostatnich  $n^+ = N^+$ , przy czym przez  $N^+$  oznaczamy liczbę odpowiadającą ilości cykli  $N$  do chwili zniszczenia.

Jeśli  $M$  jest wielkie, to zmienność tłumienia można pominąć; otrzymuje się

$$\bar{D} = \frac{n^+}{\sqrt{M}} = \frac{n^+}{\sqrt{e}} S^+.$$

Dla próbek w stanie neutralnym mamy  $D_0 = 0$ , w związku z czym

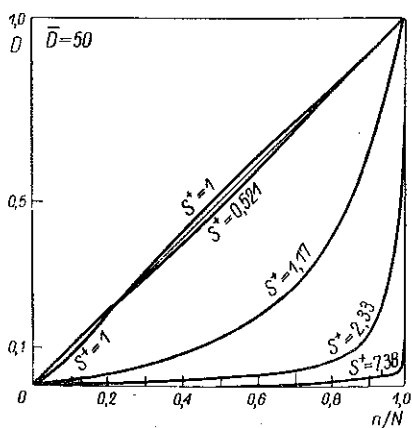
$$(6.3) \quad D = \frac{n^+}{N^+} = \frac{n}{N}.$$

Zależność  $D(n/N)$  ma duże znaczenie przy «stopniowanych» obciążeniach, polegających na kolejno po sobie następującej zaprawie próbki przy różnych wielkościach  $S$ . Jeśli między kolejnymi stopniami zaprawy nie ma «wypoczynku», to defekty można dodawać. Najprostszą zależność  $D(n/N)$ , taką jak podaje wzór (6.3), stwierdzili MINER, [12], LANGER, [13], i inni dla stopów lekkich.

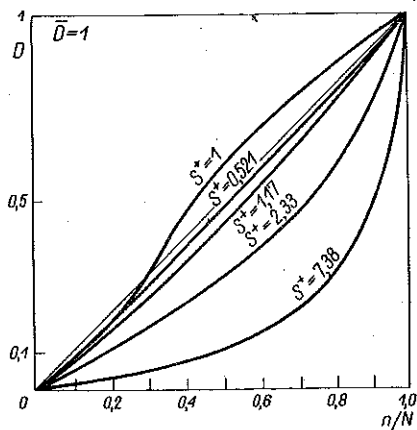
W ogólności dla przypadków ze słabym procesem odbudowy zależność  $D(n/N)$  jest następująca:

$$D = D\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\int_0^{n^+} W^+ dn^+}{\int_0^{N^+} W^+ dn^+} = f(S^+).$$

Na podstawie rys. 5 sporządzono dla przykładu 2 wykresy (rys. 6 i 7): pierwszy z nich dla  $\bar{D} = 50$ , a drugi dla  $\bar{D} = 1$ . Otrzymane linie mają bardzo różnorodny



Rys. 6



Rys. 7

sztalt, co zresztą zostało stwierdzone przez wielu badaczy. Należy dodać, że pierwotnie pojęcie defektu nie było w literaturze ściśle określone i wiązało się wyłącznie z pojęciem zaprawy (por. np. pracę MARCO i STARKEY'A, [14]). Później HENRY, [15], zaproponował teorię defektu jako funkcji naprężeń, a BACHARIEW ([1], s. 364) jako funkcji zapasu liczby cykliów.

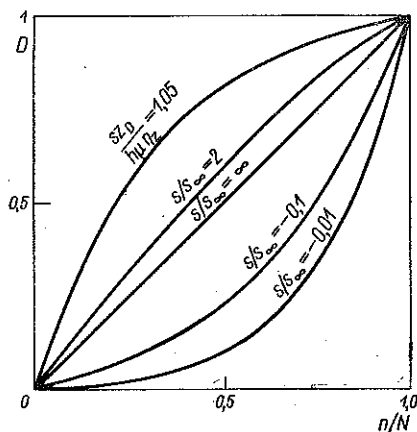
Drugim szczególnym przypadkiem są procesy izotermiczne, dla których  $\mu = \text{const}$  oraz  $h = \text{const}$ . Tu równanie (1.2) ma postać

$$\dot{D} + hD = \frac{SZ_D}{\eta_z \mu},$$

a rozwiązanie jego jest następujące:

$$(6.4) \quad D = \frac{SZ_D}{h\mu\eta_z} (1 - e^{-ht}) = D_\infty (1 - e^{-ht}) = D_\infty (1 - e^{-\frac{2\pi h}{\omega} n})$$

przy przyjętym  $D_0 = 0$ .



Rys. 8

Linie Wöhlera charakteryzuje zależność

$$1 = D_\infty (1 - e^{-\frac{2\pi h}{\omega} N}),$$

stąd

$$(6.5) \quad D = \frac{SZ_D}{h\mu\eta_z} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{h\mu\eta_z}{SZ_D} \right)^{n/N} \right].$$

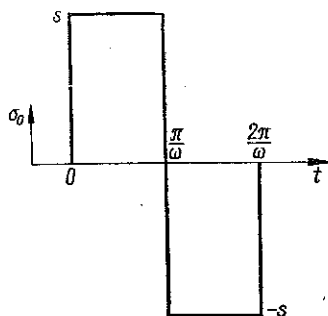
Przykłady linii  $D(n/N)$  dla tego przypadku podano na rys. 8. Uzupełniono je jeszcze liniami o ujemnej wartości  $h$ . Mogą one mieć znaczenie w przypadkach, gdy powierzchnia próbki poddana jest działaniu atmosfery korodującej.

### 7. Obliczanie funkcji $Z_W$ i $Z_D$

W procesach zmęczeniowych wielką rolę odgrywa stan warstwy powierzchniowej, w której (z uwagi na cechy mikrogeometryczne powierzchni) uwidacznia się działanie karbu, tudzież występują naprężenia własne, powstałe w procesie zgniotu (obróbka wiórowa, kulkowanie, rolowanie, przeciąganie itd.) i obróbki termicznej. Jak wykazują pomiary, [17], głębokość warstwy powierzchniowej, w której występuje spię-

trzenie naprężeń własnych, otrzymanych w wyniku zgniotu (kulkowanie) nie przekracza 0,2 mm. Z tego względu oba zjawiska nie mogą mieć wpływu na tłumienie, a w związku z tym na funkcję  $Z_w$ , chyba przy bardzo małych wymiarach przekroju elementu.

Naprężenia własne w elementach metalowych nie mogą w zasadzie przekroczyć granicy sprężystości. Wynika to wskutek stosunkowo krótkich czasów relaksacji dla metali i ich stopów. Inne materiały, jak np. szkło, substancja o lepkości rzędu



Rys. 9

$10^{19}$  kps/m<sup>2</sup> w temperaturze pokojowej ([16], s. 107) mogą dopuścić znacznie wyższe naprężenia w porównaniu z własną granicą sprężystości (kryształu). Wobec dużej lepkości relaksacja naprężeń własnych następuje powoli, a w przypadku materiałów kruchych (małe  $\eta_z$ ) zniszczenie może nastąpić po długim czasie od chwili odjęcia obciążenia zewnętrznego. Autor sam był świadkiem «wybuchu» szlifowanego przedmiotu kryształowego po kilku latach od jego obróbki. Inni autorzy, jak np. KUDRIAWCEW ([17], s. 257) podają fakty «wybuchu» hartowanych kulek stalowych,

w kilka godzin po odciążeniu. Świadczy to o wysokiej lepkości i dużej kruchości martenzytu.

Rozpatrzmy prosty przypadek zmęczeniowego zginania pręta prostokątnego o boku (w płaszczyźnie działania momentu gnącego) równym  $2b$  i szerokości  $a$ . Prawo zmienności naprężeń  $\sigma_0$  przyjęto możliwie najprostsze (rys. 9). Przy założonej płaskości przekrojów zginanych rozkład naprężeń będzie w chwili początkowej również liniowy i wyniesie

$$\sigma_x = S \frac{y}{b},$$

gdzie  $y$  jest odległością od osi obojętnej.

W trakcie trwania półcyklu rozkład ten odchyli się od linii prostej, jeśli przekroje nadal mają pozostać płaskie; fakt ten możemy jednak pominąć, jeśli założymy bardzo krótki czas półcyklu rzędu ułamków sekund. W ten sposób

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_x - \sigma_E}{3\mu},$$

$$(7.1) \quad \frac{1}{V} \int_V \sigma_x \dot{\epsilon}_p dV = \frac{S^2}{9\mu} \left( 1 - \frac{3}{2} \psi + \frac{\psi^3}{2} \right),$$

gdzie

$$(7.2) \quad \psi = \frac{\sigma_E}{S}.$$

Średnia w czasie wyrażenia (7.1) da nam wartość tłumienia  $W$ ; wyrazi się ono w danym przypadku tym samym wzorem (7.1).

W związku z tym [na podstawie definicji (4.1)]

$$(7.3) \quad Z_W = \frac{1}{9} \left( 1 - \frac{3}{2} \psi + \frac{\psi^3}{2} \right).$$

Przystąpmy do obliczenia funkcji  $Z_D$  zakładając, że naprężenia własne  $\sigma_w$  są ścisakające i nie przewyższają granicy sprężystości, w związku z czym

$$(7.4) \quad \psi_w = \frac{\sigma_w}{S} \leq \psi.$$

W okresie rozciągania prędkość odkształceń plastycznych w warstwie powierzchniowej wynosi

$$\dot{\varepsilon}_P = \frac{\alpha_k (S - \sigma_w) - \sigma_E}{3\mu},$$

przy czym musi być spełniony warunek

$$\alpha_k (S - \sigma_w) > \sigma_E,$$

to jest

$$(7.5) \quad \alpha_k (1 - \psi_w) > \psi.$$

Odształcenie plastyczne wyniesie

$$(7.6) \quad \varepsilon_+^P = \frac{\pi}{3\omega\mu} [\alpha_k (S - \sigma_w) - \sigma_E].$$

W okresie ściskania mamy

$$-\dot{\varepsilon}_P = \frac{\alpha_k (S + \sigma_w) - \sigma_E}{3\mu},$$

przy czym wynikający stąd warunek

$$\alpha_k (S + \sigma_w) > \sigma_E$$

jest automatycznie spełniony, jeśli spełniony jest warunek (7.5). Jeśli warunek (7.5) nie sprawdza się, to  $\varepsilon_+^P = 0$ , zaś  $\varepsilon_-^P \neq 0$ , jeśli tylko

$$(7.7) \quad \alpha_k (1 + \psi_w) > \psi.$$

Wtedy zaś

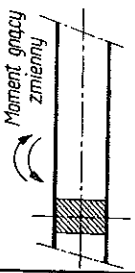
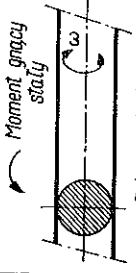
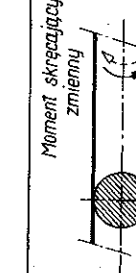
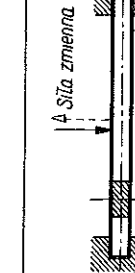
$$(7.8) \quad -\dot{\varepsilon}_-^P = \frac{\pi}{3\omega\mu} [\alpha_k (S + \sigma_w) - \sigma_E].$$

Stosując teraz wzór (5.2) otrzymamy

$$(7.9) \quad \begin{aligned} Z_D &= \frac{1}{3} (\alpha_k - \psi) && \text{dla } \alpha_k (1 - \psi_w) > \psi, \\ Z_D &= \frac{1}{6} [\alpha_k (1 + \psi_w) - \psi] && \text{dla } \alpha_k (1 - \psi_w) \leq \psi. \end{aligned}$$

Wzory na funkcję  $Z_w$  i  $Z_D$  dla niektórych innych przypadków podano w tablicy 2.

Tablica 2

L.p.	Przypadek obciążenia	Zmiennosci naprężeń	$\psi =$	$Z_w =$	$Z_0 =$	Uwagi																							
1	 <p>Moment gnący zmienny</p>	$\sigma_0 = S \sin \omega t$	$\frac{\sigma_E}{S}$	$\frac{1}{9\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arccos \sin \psi - 2\psi \sqrt{1-\psi^2} - \frac{\psi^3}{6} \ln \frac{\psi}{1+\sqrt{1-\psi^2}} \right]$	<p>dla <math>\psi \leq \alpha_K (1-\psi_w)</math>:</p> $Z_0 = \frac{\alpha_K}{3\pi} \left[ \frac{\pi\psi}{\alpha_K} - \left( \frac{\psi}{\alpha_K} + \psi_w \right) \arccos \sin \left( \frac{\psi}{\alpha_K} + \psi_w \right) + \sqrt{\left( \frac{\psi}{\alpha_K} - \psi_w \right)^2} \right]$ <p>x <math>\arccos \sin \left( \frac{\psi}{\alpha_K} - \psi_w \right) + \sqrt{\left( \frac{\psi}{\alpha_K} + \psi_w \right)^2} - \sqrt{\left( \frac{\psi}{\alpha_K} - \psi_w \right)^2}</math></p> <p>dla <math>\psi &gt; \alpha_K (1-\psi_w)</math>:</p> $Z_0 = \frac{\alpha_K}{3\pi} \left[ \psi_w - \frac{\psi}{\alpha_K} \right] \left[ \frac{\pi}{2} - \arccos \sin \left( \frac{\psi}{\alpha_K} - \psi_w \right) \right] + \sqrt{\left( \frac{\psi}{\alpha_K} - \psi_w \right)^2}$	Wzór na $Z_0$ wspólny dla poz. 1 i 2																							
2	 <p>Moment gnący stały Zginanie obrotowe</p>	$\sigma_0 = S \sin \omega t$	$\frac{\sigma_E}{S}$	$\frac{2}{9\pi} \left[ \frac{3\pi}{8} (1-\psi^4) - \psi(1-\psi^2)^{3/2} + \arccos \sin \psi - \frac{\pi}{2} \psi^2 \right]$ $+ \frac{\psi}{2} \sqrt{1-\psi^2} - \frac{\psi^3}{4} \ln \frac{1+\sqrt{1-\psi^2}}{1-\sqrt{1-\psi^2}}$																									
3	 <p>Moment skręcający zmienny</p>	$\tau_0 = S \sin \omega t$	$\frac{\tau_E}{S}$	$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \arccos \sin \psi \right) - \frac{5}{6} \psi \sqrt{1-\psi^2} + \frac{\psi^3}{3} \sqrt{1-\psi^2} \right]$	$\frac{2}{\pi} \left[ -\psi \left( \frac{\pi}{2} - \arccos \sin \psi \right) + \sqrt{1-\psi^2} \right]$	Wzory dla $\alpha_K = 0$ oraz $\psi_w = 0$																							
4	 <p>A Siła zmienna</p>	$\sigma_0 = S \sin \omega t$	$\frac{\sigma_E}{S}$	<table border="1" data-bbox="887 382 1010 982"> <tr> <td><math>\psi</math></td> <td>0</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td>1,0</td> </tr> <tr> <td><math>10^2 Z_w</math></td> <td>11,1</td> <td>7,4</td> <td>4,5</td> <td>2,6</td> <td>1,5</td> <td>0,9</td> <td>0,5</td> <td>0,3</td> <td>0,2</td> <td>0,1</td> <td>0</td> </tr> </table>	$\psi$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$10^2 Z_w$	11,1	7,4	4,5	2,6	1,5	0,9	0,5	0,3	0,2	0,1	0	Jak Lp.1
$\psi$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0																		
$10^2 Z_w$	11,1	7,4	4,5	2,6	1,5	0,9	0,5	0,3	0,2	0,1	0																		

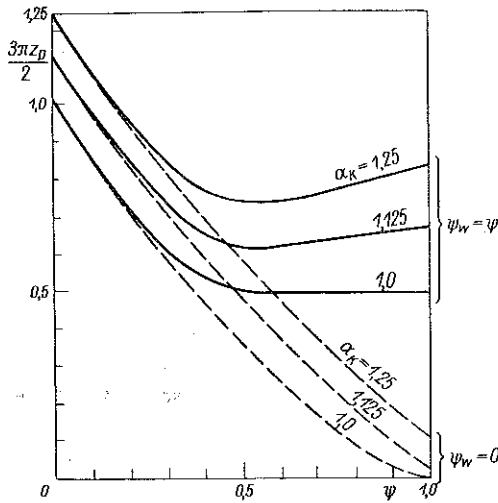
Uwaga: Naprężenia charakterystyczne S są maksymalnymi bezwzględnymi wartościami naprężeń (normalnych lub stycznych), obliczonymi w myśl zasad wytrzymałości materiałów.

Tablica 3 podaje wartości  $\alpha_k$  w zależności od stanu powierzchni, obliczone na podstawie [1], s. 369.

Tablica 3

Powierzchnia obrobiona	$\alpha_k$
Piłnikiem zdzierakiem	1,10-1,13
Piłnikiem gładzikiem	1,05-1,08
Nożem tokarskim	1,06
Papierem ściernym	1,02
Kamieniem szlifierskim	1,01

Na rysunku 10 przedstawiono wpływ współczynników  $\alpha_k$  i  $\psi_w$  na wielkość funkcji  $Z_D$ , obliczonej dla przypadku zginania pręta prostokątnego zmiennym momentem gnącym w myśl prawa  $\sigma_0 = S \sin \omega t$ . Z wykresu tego widać, że zarówno wzrost  $\alpha_k$  jak i wzrost  $\psi_w$  powodują wzrost funkcji  $Z_D$ , a w związku z tym małe wytrzymałości



Rys. 10

zmęczeniowej. Stosowanie zabiegów technologicznych (zgniot) mających na celu zmniejszenie  $\alpha_k$  kosztem wywołania naprężeń własnych wydaje się zatem uzasadnione (jak widać z wykresu na rys. 10) przede wszystkim w przypadkach ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, a ogólnie przy niższych wartościach  $\psi = \sigma_E / S$ .

### 8. Zmienność naprężeń własnych podczas zmęczenia

Podczas obciążeń symetrycznych, tj. właściwych zmęczeniowych w sensie definicji podanej na wstępie, odkształcenie włókien w pobliżu warstwy powierzchniowej (oraz w rdzeniu elementu konstrukcyjnego) powinno być po każdym cyklu równe zero. W samej warstwie powierzchniowej cykl obciążenia nie jest symetryczny

ze względu na istnienie naprężeń własnych. Powodowałoby to stały wzrost odkształcenia trwałego np. przy zginaniu, gdyby nie mająca duże cechy prawdopodobieństwa hipoteza płaskości przekrojów zginanych. Pod warunkiem słuszności tej hipotezy odkształcenia trwale muszą zostać skompensowane przez odkształcenia sprężyste, których rozkład nakłada się na rozkład naprężeń własnych, powodując ich zmienność w procesie zmęczenia.

Założmy, że pierwotnie działające w warstwie powierzchniowej naprężenia własne są ściskające, a ich wartość bezwzględna wynosi  $\sigma_w$ . Przedstawimy następnie funkcję  $Z_D$  w postaci sumy dwóch składników

$$Z_D = \frac{\mu\omega}{2\pi S} (\varepsilon_+^P - \varepsilon_-^P) = Z_{D+} + Z_{D-}.$$

Wypadkowe odkształcenia trwale w warstwie powierzchniowej wynoszą po jednym cyklu

$$\varepsilon_+^P + \varepsilon_-^P = \frac{2\pi S}{\mu\omega} (Z_{D+} - Z_{D-})$$

i muszą być skompensowane sprężystością przez naprężenie

$$-\frac{2\pi SE}{\mu\omega} (Z_{D+} - Z_{D-}),$$

które oznacza zmianę naprężeń własnych po jednym cyklu. Mamy zatem

$$\frac{d\sigma_w}{dn} \approx -\frac{2\pi SE}{\mu\omega} (Z_{D+} - Z_{D-})$$

lub

$$(8.1) \quad \frac{d\psi_w}{dt} = \frac{3}{\theta} (Z_{D+} - Z_{D-}),$$

gdzie  $\theta$  jest czasem relaksacji [por. wzór (2.3)]. Jeśli naprężenia własne są ściskające (jak np. w przypadku obróbki powierzchni przez zgniot), to  $Z_{D-} > Z_{D+}$ ; zatem naprężenia własne maleją w procesie zmęczenia. Wraz ze wzrostem temperatury, zachodzącym w procesach zmęczenia, maleje  $\theta$ , a więc rośnie prędkość zaniku naprężeń własnych. Pojawiają się jednak naprężenia termiczne, wywołane przez większe nagrzewanie się materiału w warstwie powierzchniowej (ogólnie: tam, gdzie są większe naprężenia) niż w rdzeniu elementu. Odkształcenia termiczne związane są ze wzrostem naprężeń o charakterze ściskającym i w związku z tym przeciwdziałają maleniu naprężeń własnych ściskających.

Dla zorientowania się co do wielkości naprężeń termicznych zbadamy rozkład temperatury w zginanym pręcie o przekroju prostokątnym (wysokość  $2b$ ). Rozpatrujemy płaskie zagadnienie adiabatyczne oraz liniowy rozkład naprężeń.

$$\sigma_x = \sigma \frac{y}{b}, \quad \sigma = \text{const},$$

gdzie  $y$  jest odległością od osi obojętnej.



Równanie Fouriera dla tego przypadku jest następujące:

$$(8.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{C} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2}{3\mu C} \frac{y^2}{b^2},$$

przy czym  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła ( $wkp/(s \cdot 1^\circ)$ ).

Uwzględniamy następnie zmienność  $\mu$  z temperaturą:

$$\mu = \mu_0 e^{-ms}, \quad \vartheta = \frac{T-T_0}{T_0}, \quad m = \frac{U}{RT_0}$$

i wprowadzamy bezwymiarowe zmienne

$$(8.3) \quad t^+ = \frac{t\lambda}{Cb^2} = (Fo), \quad y^+ = \frac{y}{b}, \quad u = \frac{3\lambda\mu_0}{\sigma^2 b^2} (T-T_0)$$

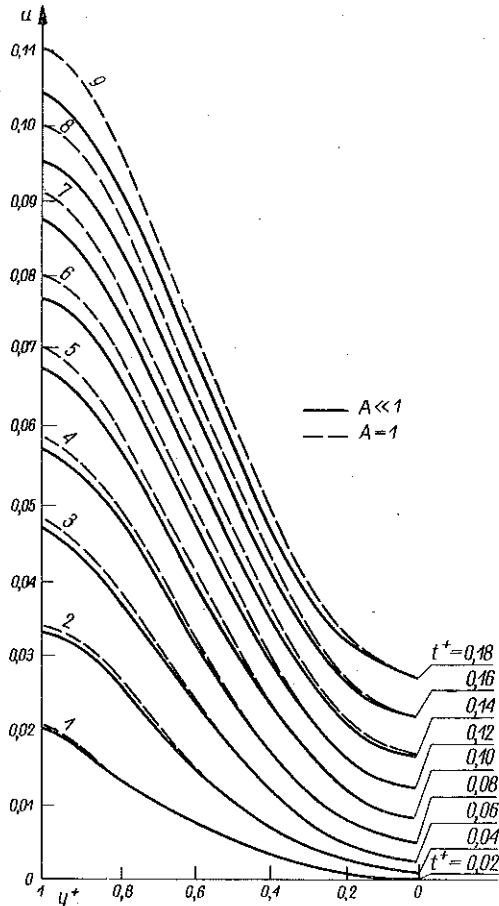
oraz parametr

$$(8.4) \quad A = \frac{m\sigma^2 b^2}{3\lambda\mu_0 T_0}.$$

Otrzymujemy równanie

$$(8.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t^+} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^{+2}} + y^{+2} e^{Au}, \quad u = u(t^+, y^+)$$

z warunkiem początkowym  $u(0, y^+) = 0$  oraz brzegowym  $[\partial u / \partial y^+]_{y^+=1} = 0$ , oznaczającym adiabaticzność elementu. Na rysunku 11 podano rozwiązanie tego równania, uzyskane metodą różnic skończonych. Linie ciągłe dotyczą małych wartości parametru  $A$  ( $A \ll 1$ ), zaś linie kreskowane odnoszą się do przypadku  $A = 1$ . Oba przypadki obejmują bardzo szeroki zakres zmienności, wystarczający dla metali i ich stopów. Okazuje się, że w dużych nadwyżkach średniej temperatury względem otoczenia różnice między temperaturą warstwy powierzchniowej a temperaturą rdzenia elementu mogą być poważne. Ogólnie rzecz biorąc badanie zmienności naprężeń własnych i nakładających się naprężeń termicznych jest możliwe teoretycznie, wydaje się jednak



Rys. 11

być niezwykle trudnym zadaniem. Podane przykłady i uwagi stanowią jedynie ilustrację wpływu tych czynników i analizę jakościową. Niewątpliwie słuszejszym z punktu widzenia praktyki jest pozostawienie tych zagadnień statystyce. Staty-

styka procesu zmęczenia wiąże się więc, zdaniem autora, z niepewnością oszacowania współczynnika  $\psi_w$ . Znając jego zakres ( $0 \leq \psi_w \leq \psi$ ) jesteśmy w stanie określić również granice zmienności funkcji  $Z_D$ , co może być podstawą do dalszych obliczeń o charakterze statystycznym.

#### 9. Wymiana ciepła między elementem obciążonym zmęczeniowo a otoczeniem

Ocena wymienionego ciepła powinna być przeprowadzona w każdym przypadku indywidualnie. Dla przykładu zanalizujemy przypadek próbki wirującej ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , tak jak to ma miejsce w maszynach zmęczeniowych typu Schenck lub radzieckich typu NU ([1], s. 346). Próbkę mocuje się z obu stron w uchwytach łożyskowanych tocznie (2 łożyska stałe i 2 łożyska do przykładania obciążenia). Wskutek tego typu łożyskowania ciepło przewodzone do «panewek» można w ogóle pominąć; inaczej będzie w przypadku łożysk ślizgowych. Cały zestaw próbki z uchwytami można zastąpić przez zestaw trzech walców, z których skrajne stanowią uchwyty o średnicy  $d_1$  (zastępczej) i długości całkowitej obu walców  $l_1$ , zaś środkowy jest przyrządkowaną częścią pomiarową próbki o średnicy  $d_0$  i długości  $l_0$ .

Tylko ta część stanowi źródło energii tarcia wewnętrznego, wskutek czego w rzeczywistości średnia temperatura zestawu będzie maleć w kierunku ku końcom zestawu. Powstały gradient temperatury zależy od przewodnictwa cieplnego  $\lambda$  badanego materiału; w poniższym przykładzie uprościliśmy zagadnienie postulując bardzo wielkie wartości  $\lambda$ , wskutek czego gradient wzdłużny temperatury można pominąć.

Wprowadzony w p. 4 współczynnik  $\alpha$  odnosi się do powierzchni części pomiarowej; jeśli odprowadzone ciepło wynosi  $\dot{Q}$  kcal/s przy spadku temperatury  $\Delta T$ , to

$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{\pi d_0 l_0 \Delta T}.$$

Rzeczywisty współczynnik przejmowania ciepła niechaj wynosi  $\alpha_0$  dla części pomiarowej i  $\alpha_1$  dla uchwytów; wtedy

$$\dot{Q} = \pi \Delta T (\alpha_0 d_0 l_0 + \alpha_1 d_1 l_1),$$

zaś

$$(9.1) \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{d_1}{d_0} \frac{l_1}{l_0}.$$

Dla prętów okrągłych obracających się w chłodzącym ośrodku ustalili ostatnio ETEMAD, [18], następujący wzór kryterialny:

$$(Nu) = 0,11 [(Pr) (0,5(Re)^2 + (Gr))]^{0,35},$$

gdzie  $(Nu)$ ,  $(Pr)$ ,  $(Re)$  i  $(Gr)$  oznaczają liczby Nusselta, Prandtla, Reynoldsa i Grashofa.

Przy dużych liczbach Reynoldsa można praktycznie posłużyć się wzorem

$$(Nu) = 0,076 (Re)^{0,7}$$

słusznym dla powietrza; na wzorze tym oprzemy się w dalszych obliczeniach.

Stosując techniczny układ jednostek  $kp, m, s$  otrzymamy w przypadku powietrza o temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$  następujący szczególny wzór:

$$(9.2) \quad \alpha = 0,478 \frac{w^{0.7}}{d^{0.3}} = 0,478 \omega^{0.7} d^{0.4} \frac{kp}{ms \cdot 1^{\circ}},$$

w którym  $w$  oznacza prędkość obwodową ( $w = d\omega$ ).

Podstawiając wartości  $\alpha_1$  i  $\alpha_0$  do wzoru (9.1) otrzymamy

$$\alpha = 0,478 \omega^{0.7} d_0^{0.4} \left[ 1 + \left( \frac{d_1}{d_0} \right)^{1.4} \frac{l_1}{l_0} \right],$$

lub, wobec  $d_0 = 4R_h$ ,

$$(9.3) \quad \alpha = 0,832 \omega^{0.7} R_h^{0.4} k_u,$$

gdzie współczynnik

$$(9.4) \quad k_u = 1 + \left( \frac{d_1}{d_0} \right)^{1.4} \frac{l_1}{l_0}$$

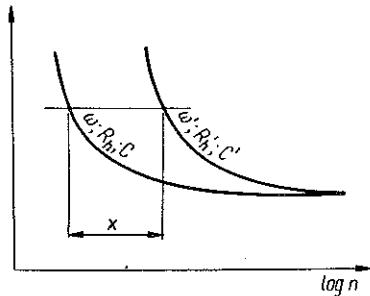
może wynosić np. 12.

Jeśli chodzi o tłumienie, a także złom zmęczeniowy ze słabym procesem odbudowy, to decydującym parametrem czasowym, tj. wielkością proporcjonalną do liczby cykli, jest wielkość  $n^+$  [wzór (4.16)]

$$n^+ = \frac{2\pi an}{\omega CR_h}$$

Podstawienie wartości  $\alpha$  ze wzoru (9.3) daje

$$(9.5) \quad n^+ = \frac{5,23}{C} \frac{n}{\omega^{0.3} R_h^{0.6}} k_u.$$



Rys. 12

W układach o współrzędnej  $n$  te same linie z układu o współrzędnej  $n^+$  będą więc przesunięte wzajemnie o odcinek  $x$  (rys. 12), równy

$$(9.6) \quad x = \log \frac{C'}{C} + 0,3 \log \frac{\omega'}{\omega} + 0,6 \log \frac{R_h'}{R_h}.$$

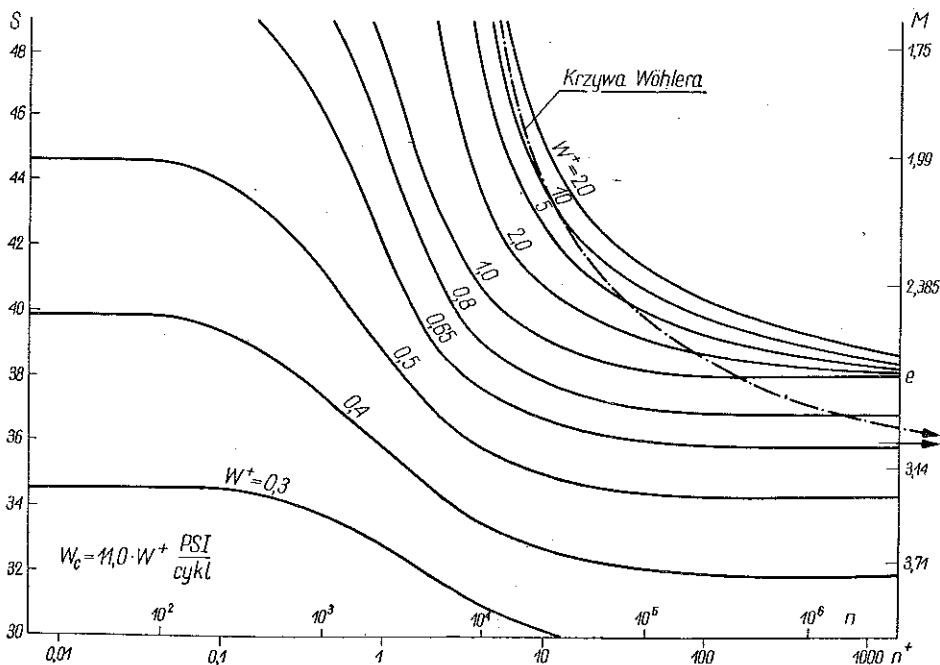
Uwidacznia się tu wpływ liczby obrotów powodujący, że np. krzywe Wöhlera dla wyższych liczb obrotów leżą (w przypadku próbek pryzmatycznych) na prawo od krzywych Wöhlera dla niższych liczb obrotów. Fakt ten potwierdzają doświadczenia (por. np. [19], s. 368, rys. 6; także [9] s. 153, rys. 96 i inne). O podobnym wpływie rozmiarów próbki (efekt skali) na krzywe Wöhlera nie należy wnioskować zbyt pochopnie na podstawie wzoru (9.6) (słusznego w zasadzie wyłącznie dla zjawisk tłumienia), bowiem ze wzrostem  $R_h$  maleje naprężenie  $S_e$ , które zgodnie ze wzorami (4.9) i (9.3) wyraża się formułą

$$(9.7) \quad S_e = 0,554 \frac{\omega^{0.35}}{R_h^{0.3}} \sqrt{\frac{k_u T_0 \mu_0}{m Z_{we}}};$$

napężenie to pod wpływem wzrostu  $\omega$  rośnie, zaś pod wpływem wzrostu  $R_n$  — maleje, a to zjawisko odbija się niekorzystnie na odporności materiału. Nadmienić trzeba, że istotny wpływ na efekt skali może mieć sprawa nierównomierności rozkładu temperatur, poruszona w p 8. Nadwyżki temperatur, jak wynika ze wzoru (8.3), proporcjonalne są bowiem do kwadratu wymiaru liniowego przekroju.

### 10. Konfrontacja teorii z doświadczeniem

Sprawdzenie przedstawionej teorii z doświadczeniem umożliwiły wyniki pomiarów tłumienia i jego historii w miękkiej stali węglowej podczas obciążeń zmęczeniowych, przeprowadzone przez LAZANA i współpracowników [20] i [21]. Reprodukcję wy-



Rys. 13

kresu  $S, n$  z liniami  $W = \text{const}$ , otrzymanego przez LAZANA w przypadku stali miękkiej, zamieszczamy na rys. 14. Rysunek 13 zawiera wykres teoretyczny, oparty na rys. 3, przy czym przyjęte stałe wynoszą

$$\sigma_B = 10 \text{ tys. PSI} = 0,7 \text{ tys. at.}$$

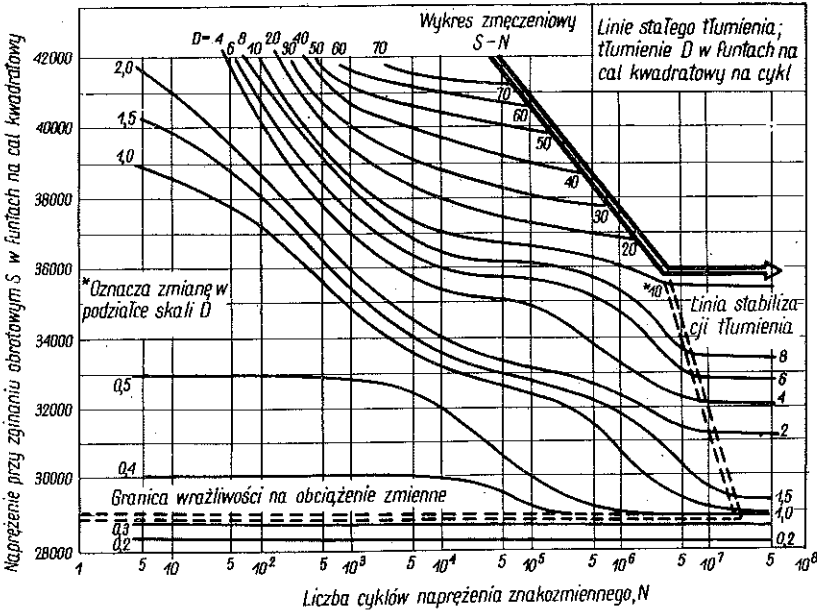
$$m = 6,11,$$

$$\mu_0 = 0,466 \cdot 10^9 \text{ kps/m}^2.$$

Przyjęto dla stali  $C = 3,72 \cdot 10^5 \text{ kp}/(\text{m}^2 \cdot 1^\circ)$  oraz  $T_0 = 293^\circ\text{K}$ .

Rząd wielkości otrzymanej wartości lepkości można porównać z rezultatami pomiarów tzw. właściwej pojemności tłumienia (specific damping capacity).

Ta ostatnia wielkość jest proporcjonalna do logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań. HAGEL i CLARK, [34], badali przypadek rezonansu belek prostokątnych o przekroju  $0,125'' \times 0,3''$  i długości  $20''$ , obustronnie sztywno zamocowanych wykonanych ze stali stopowej (najniższa prędkość kątowna drgań własnych<sup>2</sup>  $\omega =$



Rys. 14

$= 277^1/\text{sek}$ ) oraz niklu ( $\omega = 257^1/\text{sek}$ ). Mierzono dekrement logarytmiczny  $\delta$  uwzględniający tarcie wewnętrzne jak i zewnętrzne. Gdyby to ostatnie było pomijalne, to

$$\delta = \frac{\text{praca tłumienia w okresie jednego cyklu}}{2 \times (\text{energia sprężysta elementu})}$$

Pracę tłumienia określa wyrażenie

$$\frac{2\pi W}{\omega} \frac{kp}{m^2 \cdot \text{cykl}}$$

zaś energia sprężysta (odniesiona do jednostki objętości) wynosi w danym przypadku

$$\frac{S^2}{30E} \frac{kp}{m^2}$$

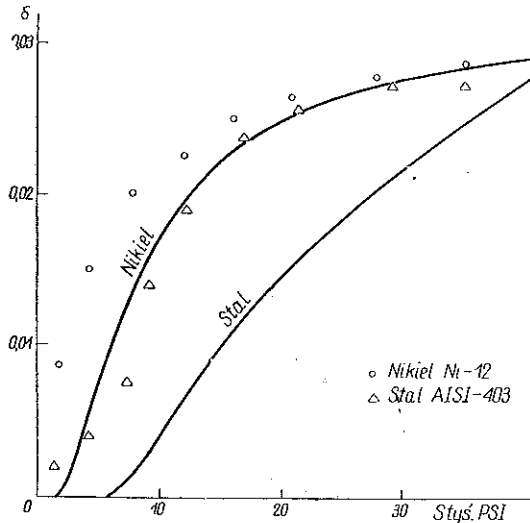
Tak więc

$$(10.1) \quad \delta = \frac{\pi W}{\omega S^2 / 30E} = \frac{30\pi E Z_w}{\omega \mu}$$

<sup>2</sup> Prędkość tę obliczono według podręcznika *Dubbel's Taschenbuch für den Maschinenbau*, t. 1, 1956, s. 270.

Zależność funkcji  $Z_w$  od  $\psi = \sigma_E/S$  podana jest w tablicy 2, poz. 4. Na rysunku 15 podano zależność teoretyczną (10.1) dekrementu od naprężenia dla przypadku pręta bez wzdłużnego obciążenia rozciągającego. Przyjęto  $\mu = 1,7 \cdot 10^9 \text{kps/m}^2$  oraz  $\sigma_E = 5 \text{ tys. PSI}$  w przypadku stali oraz  $\mu = 2,6 \cdot 10^9 \text{kps/m}^2$  i  $\sigma_E = 1,5 \text{ tys. PSI}$  dla niklu.

Obok linii naniesiono punkty doświadczalne, z których położenia wynika, że rząd wielkości przyjętej lepkości zgadza się. Rozbieżności należy tłumaczyć nie tylko niedoskonałością teorii, lecz także trudnością oddzielenia tłumienia wewnętrznego od zewnętrznego. Wielkość tego ostatniego trudno w ogóle ocenić. HAGEL i CLARK wykonali również badania z przyłożeniem do próbki wzdłużnej siły rozciągającej. Po przyłożeniu naprężenia 5,6 tys. PSI, tj. 400 at dekrement logarytmiczny zma-



Rys. 15

łał dwukrotnie w tych samych poza tym warunkach. Podwojenie obciążenia spowodowało dalsze zmniejszenie dekrementu o połowę. Ponieważ jednak dodatkowe naprężenia rozciągające podwyższają częstość drgań własnych, przeto wynika stąd bardzo ważny wniosek, że dekrement logarytmiczny tłumienia drgań *zależy w dużym stopniu od częstości*. Jest to pogląd, który panował powszechnie do lat dwudziestych tego stulecia. Pogląd ten został zwyciężony przez prace O. FÖPPLA, który badał, [32] i [33], tłumienie podczas drgań skrętnych za pomocą pomiarów temperatury. FÖPPL, [33], stwierdził niezależność powierzchni pętli histeretycznej od czasu trwania cyklu, a wprowadzony przez niego parametr, tzw. właściwa pojemność tłumienia  $p$ ,

$$p = \frac{\text{praca tłumienia w okresie jednego cyklu}}{\text{energia sprężysta w odniesieniu do największego naprężenia}}$$

pomierzył dla stali i miedzi otrzymując wartości leżące między 0,18 i 0,23.

Właściwa pojemność tłumienia wyraża się wzorem

$$(10.2) \quad p = \frac{4\pi EZ_w}{\omega\mu}$$

dla naprężeń normalnych, zaś dla naprężeń stycznych — wzorem

$$(10.3) \quad p = \frac{4\pi GZ_w}{\omega\mu}$$

MAJORS, [25], mierzył tłumienie podczas powolnego zmieniającego znak skręcania prętów okrągłych z miękkiej stali węglowej. Z podanych przez niego pętli histerycznych ([19], rys. 29, 378) wynika właściwa pojemność tłumienia, wynosząca ponad 100. Czas trwania cyklu wynosił przy tym 10 minut. Stoi to oczywiście w sprzeczności z twierdzeniem FÖPPLA. MAJORS nie wyciągnął jednak takich wniosków, w związku z czym rys. 34 pracy [19], przedstawiający porównanie wielkości  $p$  dla różnych materiałów, może służyć tylko dla uzyskania względnych wartości lepkości. Tak więc, jeśli lepkość (w temperaturze pokojowej) dla miękkiej stali węglowej S.A.E. 1020 przyjąć za jedność, to orientacyjne wartości lepkości względnej w przybliżeniu wyniosą:

dla stali węglowej S.A.E. 4130	5
dla żeliwa szarego	0,2
dla żeliwa sferoidalnego (nodular cast iron)	2
dla stopu aluminiowego 17 ST	3.

Wyniki doświadczeń MAJORSA, [25], pozwalają na ustalenie dla stali miękkiej wielkości  $\eta_z$ . Tablica 4 zawiera zestawienie danych ze wszystkich trzech serii zmieniającego znak skręcania prętów o długości 12'' i średnicy 0,505''.

Tablica 4

L.p.	Liczba cykliów do złamania	Czas trwania cyklu [minuty]	Kąt przekręcenia [°]	$\gamma$	Gradient przemieszczenia	Suma bezwzgl. wartości gradientów przemieszczeń
1	8	10	$\pm 720$	0,263	0,299	4,78
2	41	5	$\pm 180$	0,0658	0,0658	5,39
3	332		$\pm 23$	0,0084	0,0084	5,56

W obliczeniu sumy w ostatniej rubryce tablicy 4 pominięto odkształcenia sprężyste, wskutek czego dla serii 2 i 3 otrzymano wyższe wartości, co może mieć zresztą związek z zaawansowanym procesem odbudowy. W przypadku serii 1 zastosowano kryterium maksymalnego gradientu przemieszczenia ze względu na duże odkształcenie; dla małych odkształceń kryterium to jest identyczne z kryterium maksymalnego odkształcenia.

W ten sposób można ocenić wartość  $\eta_z$ ; przyjmując mianowicie

$$\sum |\gamma^p| = 4,78,$$

otrzymamy

$$\eta_z = \sum |\varepsilon_i^p| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum |\gamma^p| = 2,76$$

dla miękkiej stali węglowej. Opierając się na tej wartości wykreślono na rys. 13 krzywą Wöhlera, dla której dodatkowo przyjęto  $h_0 = 2,08 \cdot 10^{-8}$  oraz  $\nu = 1,3$  opierając się na wyznaczonej przez LAZANA (rys. 13a) wytrzymałości zmęczeniowej.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] H. A. ШАПОШНИКОВ, *Механические испытания металлов*, Машгиз, Москва 1951.
- [2] J. FRENKEL, *Wstęp do teorii metali*, PWT Warszawa 1955.
- [3] J. MADEJSKI, *Theory of Non-Stationary Plasticity*, Arch Mech Stos., w druku.
- [4] B. M. ROWINSKI i W. G. LUTCAU, Izv. AN SSSR, OTN, 10, 1953, 1471.
- [5] D. S. CLARK, *Metal Progress*, 5, 64 (1953), s. 67.
- [6] A. EUCKEN, *Lehrbuch der chemischen Physik*, 2. wvd. t. 2, Leipzig 1944.
- [7] *Kalendarz chemiczny*, Cz. I, PWT Warszawa 1954.
- [8] A. M. FREUDENTHAL, *Inelastisches Verhalten von Werkstoffen*, VEB-Verlag, Berlin 1955.
- [9] Г. В. КАРПЕНКО, *Влияние активных окислительных сред на выносливость стали*, Киев 1953.
- [10] Н. А. ОДИНГ, *Допускаемые напряжения в машиностроении*, Москва 1947.
- [11] W. MOSZYŃSKI, *Wytrzymałość zmęczeniowa części maszynowych*, PWT Warszawa 1954
- [12] M. A. MINER, *Cumulative Damage in Fatigue*, Trans. ASME, 67, 1945, s. A-159.
- [13] B. F. LANGER, *Fatigue Failure from Stress Cycles of Varying Amplitude*, Trans. ASME, 59, (1957), s. A-160.
- [14] S. M. MARCO, W. L. STARKEY, *A Concept of Fatigue Damage*, Trans. ASME, 76 (1954), s. 627.
- [15] D. L. HENRY, *A Theory of Fatigue-Damage Accumulation in Steel*, Trans. ASME, 77 (1955), s. 913.
- [16] *First Report on Viscosity and Plasticity*, 2nd Ed., Amsterdam 1939.
- [17] И. В. КУДРЯВЦЕВ, *Внутренние напряжения, как резерв прочности в машиностроении*, Москва 1951.
- [18] G. A. ETEMAD, *Free Convection Heat Transfer from a Rotating Horizontal Cylinder to Ambient Air with Interferometric Study of Flow*, Trans. ASME, 77 (1955), s. 1283.
- [19] HARRY MAJORS Jr., *Dynamic Properties of Modular Cast Iron, Part 1*, Trans. ASME, 74 (1952), s. 365.
- [20] B. J. LAZAN i T. WU, *Damping, Elasticity and Dynamic Stress-Strain Properties of Mild Steel*, Proc. ASTM, 51 (1951).
- [21] B. J. LAZAN i DEMER, *Damping, Elasticity and Fatigue Properties of Temperature Resistant Materials*, Proc. ASTM, 51 (1951).
- [22] R. I. SINNOTT, I. A. ROHRIG, J. W. FREEMAN i A. J. RUSH, *Carbon-Molybdenum Steel Steam Pipe After 100,000 Hours of Service*, Trans. ASME, 77 (1955), s. 779.
- [23] F. R. LARSON i J. MILLER, *A Time-Temperature Relationship for Rupture and Creep Stresses*, Trans. ASME, 74 (1952), s. 765.
- [24] L. F. COFFIN, *A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal*, Trans. ASME, 76 (1954), s. 931.
- [25] HARRY MAJORS, *Unpublished Report on Torsional Fatigue under a Low Number of Stress Reversals*, Engineering Experiment Station, University of Alabama, University, Ala.; dane z tego sprawozdania przytoczył jego autor w dyskusji nad pracą [19].



[26] J. MADEJSKI, *Pewne podstawowe zagadnienia dynamicznej teorii plastyczności*, ref. na Zjeździe ZMOC IPPT PAN, 1954.

[27] J. MADEJSKI, *O pelzaniu i pelzarce*, Rozpr. Inżyn., 1, 4 (1956).

[28] J. MADEJSKI, *Wyboczenie pręta przyrmatycznego jako zagadnienie dynamicznej teorii plastyczności*, Rozpr. Inżyn., 3, 4 (1956).

[29] J. MADEJSKI, *Zaprawa, opóźnienie sprężyste i naprężenia resztkowe w ujęciu dynamicznej teorii plastyczności*, Rozpr. Inżyn., 4, 5 (1957).

[30] J. MADEJSKI, *Teoria podobieństwa zjawisk termoelastoplastycznych*, Rozpr. Inżyn., 4, 5 (1957).

[31] J. MADEJSKI, *Dynamiczna teoria plastyczności jako pomost między teorią sprężystości a teorią plastyczności*, Rozpr. Inżyn., 1, 6 (1958).

[32] O. FÖPPL, *The Practical Importance of the Damping Capacity of Metals, Especially Steels*, J. Iron Steel Inst., vol. 134, 1936, 393.

[33] O. FÖPPL, *Die Dämpfung, die bei der Schwingungsbeanspruchung von Metallen auftritt, in Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit*, Verhandlungen des 2. Int. Kongresses für Techn. Mechanik, Zürich 1926, 382.

[34] W.C. HAGEL, i J.W. CLARK, *The Specific Damping Energy of Fixed Beam Specimens*, Trans. ASME, vol. 79, 1953, 426.

### Резюме

#### УСТАЛОСТЬ И ДЕМПФИРОВАНИЕ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ

Обсуждаются основные понятия, т. е. критерии разрушения, механизм возникновения повреждений и механизм восстановления с учетом влияния температуры. Далее, дается способ расчета демпфирования и его истории, связанной с изменениями температуры в процессе нагрузки при усталости.

В особенности определяется наибольшая допустимая нагрузка, при которой наступает еще стабилизация демпфирования. В дальнейшей части работы приводится способ определения дефекта, т. е. относительного повреждения и его зависимость от условий нагрузки. На этом основании можно сделать графики  $D = D(n/N)$ , где  $D$  обозначает дефект,  $n$  — данное число циклов и  $N$  — число циклов в момент разрушения. Затем подвергается анализу влияние собственных напряжений (предварительных) и рассматривается изменчивость их распределений во время усталостных процессов, связанную также с возникновением термических процессов при нагреве материала вследствие внутреннего трения. Далее анализируются условия теплообмена с окружающей средой, имеющие место во время испытаний на усталость.

Результаты сравниваются с экспериментами, полученными Майрсом, Феплем, Гегелем и Клерком.

Работа является улучшением и развитием тезисов, представленных автором на Съезде Отдела Сплошных Сред Института Основных Проблем Техники ПАН в 1954 г.

### S u m m a r y

#### FATIGUE AND DAMPING IN PRISMATIC RODS

The fatigue failure is understood in this paper as a failure without any perceptible total permanent strain resulting from a durable load. A failure occurs after an accumulation of damages  $\eta$ . At the moment of failure we have  $\eta = \eta_z$ .

The latter property is a material function. Instead of  $\eta$  the specific damage, or the defect,  $D = \eta/\eta_z \leq 1$  may be used. The defect grows in the course of the process of loading; at the same time the process of «recovery», consisting in spontaneous suppression of damages, occurs in the

material. Denoting by  $h$  the rate of that process, Eq. (1.2) is obtained from the balance of the existing damages. The theoretical formula for velocity  $h$  is given on page 212; from the scarce experimental data the value  $AU \approx 6000$  cal/mole is obtained for certain types of carbon steel. The injuries, caused by the load per unit time,  $\zeta$ , are to be evaluated as the sum of absolute values of significant permanent strains, according to the proposal of the author [3]. The material may be treated theoretically as a Bingham material with the elastic limit  $\sigma_E$  and viscosity  $\mu$ .

The Eq. (2.5) is the equation of state for such a material in one-dimensional problems. If the load cycles are short, the value of  $\zeta$  may be evaluated from Eq. (2.6). Permanent strains  $\varepsilon_p$  depend on the viscosity, which is a characteristic property of fluids. As crystals are not viscous, it is evident that the flow of a solid is caused by the growth of new amorphous phase, which accompanies the crystalline phase. This process may be treated as an endothermic process proceeding at a certain rate. If the latter is commensurable with the rate of growth of the external loads, conspicuous growth of the elastic limit  $\sigma_E$  may be expected.

In this paper it is assumed that the speed of growth of the external loads is small enough (in relation to the velocity of the reaction mentioned) to neglect the changes of  $\sigma_E$ . The viscosity of the conglomerate of crystalline and amorphous phases is given by Eq. (3.3). The proper value of the activation energy is evaluated from the Hess Law, as the difference between the internal energies of both phases. The process of damping, treated in Sec. 4, is strictly connected with the increase of the temperature of the specimen. Damping is defined as the work of internal friction (the work of the stresses on permanent strains) attached to unit volume and time. Eq. (4.4) follows from the heat and energy balance where  $\vartheta$  is the reduced temperature difference and  $S$  the characteristic stress. There are two cases of damping curves (Fig. 3); if the dimensionless number  $M$  defined by the Eq. (4.7) exceeds  $e$  (the basis of natural logarithms), damping stabilizes in the course of the loading process. In other cases damping grows infinitely in a finite period of time.

To evaluate the defect (Sec. 5), we must take into consideration the surface fibres of the specimen (the surface layer), because of the influence of micronotches and «self-equilibrant» stresses, caused by machining and heat treatment of various kinds. These influences are taken into account by means of a special function  $Z_D$ ; examples of such functions together with the «damping function»  $Z_W$  are given in Sec. 7. Thus, the property  $\zeta$  is defined by Eq. (5.3) whereas Eq. (5.4) describes the dependency of the defect  $D$  on time and temperature. This equation should be solved together with Eq. (4.4). The result are the lines  $D = \text{const}$  and the Wöhler curve ( $D = 1$ ). Special cases are analysed in Sec. 6; the results enable us to construct the  $D-(n/N)$ -diagrams, which are particularly useful for sequential loads. The «self-equilibrated» stresses vary with time in the course of the process of loading. The analysis of this very complicated phenomenon is given in Sec. 8. The results are rather of a qualitative character. Since fatigue and damping processes are very much influenced by heat transfer phenomena, this problem is investigated in Sec. 9.

Sec. 10 deals with the confrontation of the theory with the experiments. Fig. 13a gives an experimental  $S-N$  diagram with constant of lines damping for mild carbon steel, obtained by LAZAN and WU (Ref. [20], [21]).

Fig. 13 shows the theoretical curves computed by the author. The theory is also confronted with other experiments, which deal with damping properties of various materials. Several important physical data for metals and alloys are obtained on this ground. These investigations show (in agreement with the experiments) that the specific damping capacity depends on the frequency.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 października 1960 r.*