

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

**WPLYW PRZEPON POŚREDNICH
NA STATECZNOŚĆ PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCI**

TOM IX . Z

. ROK 1961

SPIS TREŚCI

- | | |
|---|-----|
| 1. Uwagi wstępne | 193 |
| 2. Wyboczenie giętkie pręta ceowego stężonego trzema przeponami | 194 |

1. Uwagi wstępne

Praca niniejsza jest kontynuacją cyklu publikacji autora, mających na celu wyjaśnienie wpływu odkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego na siłę krytyczną. W publikacjach tych, z których zacytujemy [1] i [2], przyjęto jako założenie podstawowe istnienie dwóch przepon poprzecznych na obu końcach pręta, które uniemożliwiały całkowicie zniekształcenie przekrojów skrajnych, podczas gdy odkształcalność wszystkich przekrojów pośrednich była całkowicie swobodna. Założenie to umożliwiało określenie zmienności za pomocą funkcji $\sin(n\pi x/l)$ dla wszystkich niewiadomych geometrycznych oraz $\cos(n\pi x/l)$ dla niewiadomych statycznych (sił ścinających) i rozwinięcie powierzchni ugięcia ścianek pracujących jako płyty w pojedyncze sinusowe szeregi Fouriera; przyjęcia te umożliwiały uzyskanie prostego rozwiązania, ponieważ wszystkie równania problemu były spełnione dla każdego n oddzielnie.

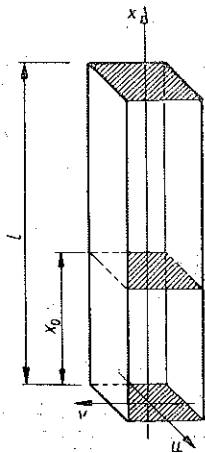
Otrzymane w ten sposób wyniki liczbowe przedstawione w pracach [1] i [2] pozwoliły na wyrobienie pewnego poglądu na istotę zjawiska, przede wszystkim zaś wykazały, że zniekształcenie przekroju może mieć w niektórych przypadkach (szczególnie w prętach krótkich) bardzo duży wpływ na wielkość siły krytycznej, redukując ją niejednokrotnie do ułamka tego obciążenia, które można obliczyć ze wzorów elementarnej teorii prętów cienkościennych, to znaczy ze wzorów Eulera lub Własowa. Wykazano poza tym, że w tych przypadkach, w których wpływ odkształcalności przekroju jest szczególnie duży, mamy do czynienia właściwie z nieomal czystym wybočeniem płytowym, zaś odkształcenia prętowe są wówczas znikome. Fakt ten nasuwa przypuszczenie, że usztywnienie pręta dodatkowymi przeponami poprzecznymi, które w dalszym ciągu będziemy nazywali przeponami pośrednimi, powinno mieć zasadniczy wpływ na wielkość siły krytycznej, ponieważ odkształcenia płytowe ścianek będą wówczas wydatnie zmniejszone.

Praca niniejsza poświęcona jest właśnie rozwiązaniu tego problemu. Założenia będą identyczne z przyjętymi w poprzednich publikacjach autora, mianowicie: materiał sprężysty, osiowe ściskanie, wolne i dopuszczające swobodę spaczenia przekrojów skrajnych podparcie pręta, stała grubość każdej ścianki; poza tym wszystkie założenia klasycznej teorii ustrojów cienkościennych z wyjątkiem założenia nieodkształcalności przekroju poprzecznego. Metoda rozwiązania nie będzie odbiegać w swej koncepcji od stosowanej w pracach [1] i [2], wymaga jedynie pewnych

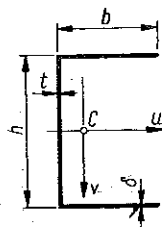
uzupełnień, które sprawiają, jak zobaczymy, że zagadnienie staje się znacznie bardziej skomplikowane pod względem matematycznym i wymaga wprowadzenia nieskończonych układów równań. Zakładając u czytelnika znajomość cytowanych prac przyjmujemy wprost bez szczególnych wyjaśnień niektóre wyprowadzone tam wzory i definicje. Sposób rozwiązania problemu przedstawiony poniżej jest zupełnie ogólny, jednak z powodu bardzo dużych trudności rachunkowych ograniczymy się do szczegółowego rozpatrzenia wyboczenia giętnego przekroju ceowego stężonego jedną dodatkową przeponą pośrednią i do podania jednego przykładu liczbowego, który jednak dobitnie wykazuje dużą doniosłość praktyczną omawianego zagadnienia. Rozwiązanie przeprowadzimy zakładając nieodkształcalność póltek ceownika, co jak wykazano w [1], nie wpływa praktycznie biorąc na wyniki¹. Rozszerzenie metody na inne rodzaje przekroju poprzecznego, inne postaci wyboczenia lub na przypadek dowolnej ilości przepon pośrednich, jak również uwzględnienie odkształcalności wszystkich ścianek nie nastęca żadnych zasadniczych trudności, komplikuje jedynie niezmiernie równania oraz obliczenia, które będą wówczas możliwe do przeprowadzenia tylko przy użyciu maszyn elektronowych.

2. Wyboczenie giętno-pręta ceowego stężonego trzema przeponami

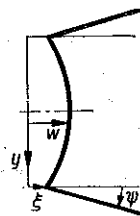
Rozważmy pręt o symetrycznym przekroju ceowym stężony dwoma przeponami na podporach oraz jedną dodatkową przeponą pośrednią umieszczoną w przekroju $x = x_0$ (rys. 1). Przekrój poprzeczny i zasadnicze oznaczenia pokazano na rys. 2, na którym C oznacza środek ciężkości. Wyboczenie giętno cechuje się symetrią odkształceń względem osi u (rys. 3), wobec czego scharakteryzowane jest przez dwie niezależne wielkości geometryczne: przemieszczenie ξ przekroju w kierunku



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

¹ Należy jednak liczyć się z tym, że błędy powodowane przez to założenie będą tym większe, im więcej jest w przecię przepon pośrednich, ponieważ zmuszają one ścianki do pracy płytowej w kierunku podłużnym, tzn. w kierunku osi pręta.

osi u oraz kąt obrotu ψ krawędzi. Równania równowagi odkształconej dolnej półki² przedstawiają się jak następuje (por. [1], [2]):

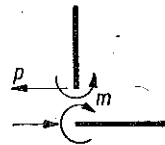
$$(2.1) \quad \begin{cases} EI\xi^{IV} + EA\xi'' - \frac{1}{2}EbS_v^{(1)}\xi^{IV} - p = 0, \\ EA^3 \frac{1}{48}\psi^{IV} + EA \left[\left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{12}\delta^2 \right) k - \frac{\delta^2}{6(1+\nu)} \right] \psi'' - m = 0. \end{cases}$$

Pierwsze z tych równań opisuje zginanie półki w płaszczyźnie równoległej do osi u , zaś drugie — jej skręcanie przy narzuconej osi obrotu pokrywającej się z krawędzią ceownika. W związku z tym p jest obciążeniem rozłożonym, działającym na półkę po przejściu pręta do położenia równowagi statecznej przy wyboczeniu, zaś m — rozłożonym momentem liczonym względem krawędzi ceownika (rys. 4). A jest przekrojem poprzecznym półki, I jej momentem bezwładności,

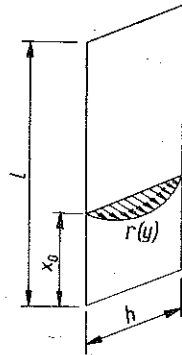
$$A = b\delta, \quad I = \frac{1}{12}\delta b^3,$$

zaś $S_v^{(1)}$ jej momentem statycznym względem osi v . Liczba $k = \sigma/E$ jest bezwymiarowym współczynnikiem przedstawiającym stosunek naprężeń osiowego ściskania σ do modułu sprężystości E .

Odształcony środnik pracuje jako płyta jednokierunkowo ściskana naprężeniami σ , wolnopodparta na przeponach skrajnych $x = 0$, $x = l$ oraz podparta przegubowo³ na przeponie środkowej $x = x_0$, która przemieszcza się wraz z całym przekrojem i oddziałuje na środnik rozłożonym wzdłuż prostej $x = x_0$ liniowym obciążeniem $r(y)$ (rys. 5). Z powodu symetrii odkształceń obciążenie to musi być symetryczne względem osi u , zatem da się przedstawić szeregiem Fouriera zawierającym jedynie wyrazy kosinusowe:



Rys. 4



Rys. 5

$$(2.2) \quad r(y) = E(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y), \quad \beta_m = \frac{2m\pi}{h}.$$

Zatem powierzchnia ugięcia środnika $w(x, y)$ musi spełniać znane równania różniczkowe płyty jednokierunkowo ściskanej naprężeniami $\sigma = kE$ i jednocześnie zginanej obciążeniem $p(x, y)$:

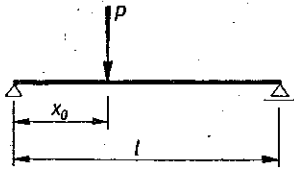
$$(2.3) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} p(x, y).$$

² Ze względu na symetrię odkształceń wystarczy rozpatrywać połowę przekroju poprzecznego.

³ Zakładamy, że wszystkie przepony są wiotkie na zginanie. Sztywność zginania przepon jak również sposób ich połączenia ze ściankami nie mogą mieć większego wpływu na wyniki.

W dalszym ciągu zastosujemy znane formalne rozwinięcie w sinusowy szereg Fouriera siły skupionej P (por. rys. 6):

$$(2.4) \quad P = \frac{2P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}.$$



Rys. 6

Biorąc pod uwagę wzór (2.4) możemy przedstawić obciążenie $p(x, y)$ środnika w postaci

$$p(x, y) = r(y) \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x$$

lub podstawiając (2.2)

$$(2.5) \quad p(x, y) = \frac{2E}{l} \left(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x.$$

Przy wykorzystaniu wzoru (2.5) przepiszemy równanie (2.3) jak następuje:

$$(2.6) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{24(1-\nu^2)}{t^3 l} \left(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x.$$

Przyjmijmy rozwiązanie tego równania w postaci

$$(2.7) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \alpha_n x,$$

która umożliwia spełnienie warunków wolnego podparcia środnika na przeponach skrajnych. Po podstawieniu do (2.6) otrzymamy następującą zależność:

$$(2.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^4 f_n - 2\alpha_n^2 f_n'' + f_n^{IV} - \alpha_n^2 \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} k f_n \right) \sin \alpha_n x =$$

$$= \frac{24(1-\nu^2)}{t^3 l} \left(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y \right) \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x.$$

Skreślając w niej po obu stronach znak sumy i następnie skreślając $\sin \alpha_n x$ otrzymamy dla każdego n jedno równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne o niewiadomej funkcji $f_n(y)$:

$$(2.9) \quad \alpha_n^4 f_n(y) - 2\alpha_n^2 f_n'' + f_n^{IV} - \alpha_n^2 \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} k f_n =$$

$$= \frac{24(1-\nu^2)}{t^3 l} \left(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y \right) \sin \alpha_n x_0.$$

Jego rozwiązanie przyjmijemy w postaci

$$(2.10) \quad f_n(y) = f_n^0(y) + \bar{f}_n(y),$$

gdzie $f_n^0(y)$ przedstawia całkę ogólną równania jednorodnego, zaś $\bar{f}_n(y)$ całkę szczególną równania niejednorodnego. Jak wiadomo (por. np. [3], również [1]), całka ogólna $f_n^0(y)$ wyraża się wzorem⁴:

$$(2.11) \quad \begin{cases} f_n^0(y) = A_n \operatorname{ch} p_n y + B_n \cos q_n y + C_n \operatorname{sh} p_n y + D_n \sin q_n y, \\ p_n = \frac{n\pi}{l} \gamma_{1n}, \quad \gamma_{1n} = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k} + 1}, \\ q_n = \frac{n\pi}{l} \gamma_{2n}, \quad \gamma_{2n} = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k} - 1}. \end{cases}$$

Całkę szczególną $\bar{f}_n(y)$ przyjmijemy w postaci

$$(2.12) \quad \bar{f}_n(y) = F_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \cos \beta_m y.$$

Podstawiając (2.12) do (2.9) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \alpha_n^4 \left(F_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \cos \beta_m y \right) + 2\alpha_n^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \beta_m^2 \cos \beta_m y + \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \beta_m^4 \cos \beta_m y - \\ & - \alpha_n^2 k \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} \left(F_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \cos \beta_m y \right) = \frac{24(1-\nu^2)}{t^2 l} \left(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y \right) \sin \alpha_n x_0. \end{aligned}$$

Sumując odpowiednio wyrazy stałe i współczynniki przy $\cos \beta_m y$ dochodzimy do zależności między współczynnikami R_m oraz F_{nm} :

$$(2.13) \quad F_{n0} = \Gamma_{n0} R_0, \quad F_{nm} = \Gamma_{nm} R_m,$$

gdzie

$$(2.14) \quad \Gamma_{n0} = \frac{2}{l} \frac{\sin \alpha_n x_0}{D^* \alpha_n^4 - \alpha_n^2 t k}, \quad \Gamma_{nm} = \frac{2}{l} \frac{\sin \alpha_n x_0}{D^* (\alpha_n^2 + \beta_m^2) - \alpha_n^2 t k}, \quad D^* = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Mamy zatem ostatecznie po uwzględnieniu (2.13) i odrzuceniu wyrazów antysymetrycznych w równaniu (2.11)

$$(2.15) \quad f_n(y) = A_n \operatorname{ch} p_n y + B_n \cos q_n y + \Gamma_{n0} R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m,$$

zaś wzór ogólny na powierzchnię ugięcia $w(x, y)$ ma postać

$$(2.16) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} p_n y + B_n \cos q_n y + \Gamma_{n0} R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos \beta_m y \right) \sin \alpha_n x.$$

⁴ Rozwiązanie ma postać (2.11), jeżeli $k > [n^2 \pi^2 / 12(1-\nu^2)](t/l)^2$. Inne możliwości zostały rozpatrzone w pracy [1]; nie mają one większego praktycznego znaczenia.

Możemy obecnie wyprowadzić wzory na przemieszczenia brzegowe środnika $\xi(x) = [w]_{y=h/2}$, $\psi(x) = -[\partial w / \partial y]_{y=h/2}$; otrzymamy

$$(2.17) \begin{cases} \xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \bar{p}_n + B_n \cos \bar{q}_n + \Gamma_{n0} R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos m\pi \right) \sin \alpha_n x, \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n p_n \operatorname{sh} \bar{p}_n + B_n q_n \operatorname{sh} \bar{q}_n) \sin \alpha_n x, \end{cases}$$

gdzie

$$\bar{p}_n = \frac{h}{2} p_n = \frac{n\pi h}{2} \gamma_{1n},$$

$$\bar{q}_n = \frac{h}{2} q_n = \frac{n\pi h}{2} \gamma_{n2}.$$

Jak widać, równania (2.17) spełniają warunki brzegowe dla funkcji ξ i ψ , mianowicie $\xi = \xi'' = \psi = 0$ dla $x = 0$ $x = l$.

Podobnie wykorzystując znane zależności

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad r_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right], \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

możemy podstawiając $y = h/2$, wyprowadzić wzory na oddziaływanie brzegowe środnika na półkę, mianowicie na moment rozłożony $m_1 = -[m_y]_{y=h/2}$ oraz obciążenie rozłożone $p_1 = [r_y]_{y=h/2}$; otrzymamy

$$(2.18) \begin{cases} m_1 = D \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \alpha_n^2 (\gamma_{1n}^2 - \nu) \operatorname{ch} \bar{p}_n - B_n \alpha_n^2 (\gamma_{2n}^2 + \nu) \cos \bar{q}_n - \\ \quad - \alpha_n^2 \nu \Gamma_{n0} R_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m (\beta_m^2 + \alpha_n^2 \nu) \cos m\pi] \sin \alpha_n x, \\ p_1 = D \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \alpha_n^3 \gamma_{1n} (\gamma_{2n}^2 + \nu) \operatorname{sh} \bar{p}_n + B_n \alpha_n^3 \gamma_{2n} (\gamma_{1n}^2 - \nu) \sin \bar{q}_n] \sin \alpha_n x. \end{cases}$$

Zarówno m_1 jak i p_1 przedstawiają tylko tę część obciążenia półki, która pochodzi od reakcji środnika. Poza tym na półkę będą oddziaływać obciążenia z przepony pośredniej. Obciążenia te dadzą się sprowadzić do skupionej siły P działającej w płaszczyźnie półki, do skupionej siły H działającej w płaszczyźnie środnika i do skupionego momentu M działającego w płaszczyźnie przepony i liczonego względem krawędzi (por. rys. 7). Z warunku równowagi przepony oraz symetrii odształceń wynika prosta zależność

$$(2.19) \quad P = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} r(y) dy = \frac{E}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \beta_m y \right) dy.$$

Po przeprowadzeniu całkowania okazuje się, że różny od zera pozostaje tylko jeden wyraz, mamy zatem

$$P = \frac{E}{2} h R_0.$$

Rozwijając tę wielkość w sinusowy szereg Fouriera według wzoru (2.4) otrzymamy dodatkowe obciążenie półki

$$(2.20) \quad p_2 = -E \frac{h}{l} R_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x.$$

Składowa H oddziaływania przepony na półkę nie występuje nigdzie w naszych równaniach, natomiast składową M , skupiony moment skręcający, przyjmiemy jako wielkość niewiadomą. Moment ten przedstawimy w postaci rozwinięcia w szereg Fouriera, otrzymując w ten sposób dodatkowe obciążenie półki

$$(2.21) \quad m_2 = E \frac{2M}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n x_0 \sin \alpha_n x.$$

Zatem pełne oddziaływania środniczka na półkę wynoszą

$$(2.22) \quad p = p_1 + p_2, \quad m = m_1 + m_2.$$

Możemy obecnie podstawić wyrażenia na przemieszczenia ξ i ψ według (2.17), obciążenie p i moment m według (2.22) z uwzględnieniem (2.18), (2.20) i (2.21) do równań równowagi (2.1); otrzymamy w ten sposób zależności

$$(2.23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n [\Omega_n \operatorname{ch} \bar{p}_n - D^* \alpha_n^2 \gamma_{1n} (\gamma_{2n}^2 + \nu) \operatorname{sh} \bar{p}_n] + \right. \\ \left. + B_n [\Omega_n \cos \bar{q}_n - D^* \alpha_n^2 \gamma_{2n} (\gamma_{1n}^2 - \nu) \sin \bar{q}_n] + \right. \\ \left. + R_0 \left(\Gamma_{n0} \Omega_n + \frac{h}{l} \sin \alpha_n x_0 \right) + \Omega_n \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos m\pi \right\} \sin \alpha_n x = 0,$$

$$(2.24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -A_n [\Phi p_n \operatorname{sh} \bar{p}_n + D^* \alpha_n^2 (\gamma_{1n}^2 - \nu) \operatorname{ch} \bar{p}_n] + \right. \\ \left. B_n [\Phi q_n \sin \bar{q}_n + D^* \alpha_n^2 (\gamma_{2n}^2 + \nu) \cos \bar{q}_n] + D^* \alpha_n^2 \nu \Gamma_{n0} R_0 + \right. \\ \left. + D^* \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m^2 + \alpha_n^2 \nu) \cos m\pi \Gamma_{nm} R_m + \frac{2}{l} M \sin \alpha_n x_0 \right\} \sin \alpha_n x = 0.$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$(2.25) \quad \begin{cases} \Omega_n = \alpha_n^4 \left(I - \frac{b}{2} S_\nu^{(1)} \right) - \alpha_n^2 A k, \\ \Phi = A \left\{ \frac{1}{48} A^2 \alpha_n^4 - \left[\left(\frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{12} \delta^2 \right) k - \frac{\delta^2}{6(1+\nu)} \right] \alpha_n^2 \right\}. \end{cases}$$

Skreślając znak sumy, a następnie $\sin \alpha_n x$ w równaniach (2.22) i (2.23) otrzymamy dla każdego n dwa równania; w każdym z nich znajdują się dwie niewiadome A_n i B_n , ciąg niewiadomych $R_0, R_1, \dots, R_m, \dots$ oraz — w równaniach otrzymanych z (2.23) — dodatkowo jedna niewiadoma M . Jak widać, ilość niewiadomych będzie zawsze większa niż ilość równań, które zatem nie wystarczą do rozwiązania zagadnienia.

Dodatkowe równania otrzymamy biorąc pod uwagę te warunki geometryczne które narzuca na powierzchnię ugięcia środnika $w(x, y)$ oraz przemieszczenia półki $\xi(x)$, $\psi(x)$ istnienie nieodkształcalnej w swej płaszczyźnie przepony środkowej. Przepona ta powoduje, że przekrój $x = x_0$ jest nieodkształcalny. Wynika stąd, że dla $x = x_0$ musi być $\psi = 0$. Mamy zatem z drugiego równania (2.17)

$$(2.26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (A_n p_n \operatorname{sh} \bar{p}_n - B_n q_n \sin \bar{q}_n) \sin \alpha_n x_0 = 0.$$

Podobnie nieodkształcalność środnika w przekroju $x = x_0$ wymaga spełnienia warunku:

$$(2.27) \quad w(x_0, y) \equiv \xi(x_0),$$

któremu jednak należy nadać odpowiednią formę matematyczną. O ile bowiem równanie (2.26) odpowiada jednej niewiadomej M , to z warunku wyrażonego zależnością (2.27) musimy otrzymać nieskończenie wiele równań odpowiadających nieskończonej ilości niewiadomych $R_0, R_1, \dots, R_m, \dots$.

Według wzoru (2.16) będziemy mieli

$$(2.28) \quad w(x_0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} p_n y + B_n \cos q_n y + \Gamma_{n0} R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos \beta_m y) \sin \alpha_n x_0,$$

zaś według pierwszego ze wzorów (2.17)

$$(2.29) \quad \xi(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \bar{p}_n + B_n \cos \bar{q}_n + \Gamma_{n0} R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos m\pi) \sin \alpha_n x_0.$$

Rozważymy teraz dwie możliwości otrzymania dodatkowych równań w ilości równej ilości niewiadomych.

Rozwinięcie obu stron równania (2.27) w szereg Fouriera. Zarówno wartość stałą znajdującą się po prawej stronie tożsamości (2.27), jak i funkcję zmiennej y po jej lewej stronie można rozwinąć w cosinusowy szereg Fouriera. Wówczas warunkiem spełnienia się tożsamości będzie identyczność odpowiednich współczynników rozwinięcia. Można też postąpić inaczej: przepisać (2.27) w postaci

$$(2.30) \quad \xi(x_0) - w(x_0, y) \equiv 0$$

i rozwinąć lewą stronę tej tożsamości w szereg Fouriera. Każdy współczynnik rozwinięcia powinien być tutaj równy zeru.

Podstawiając do (2.30) wzory (2.28) i (2.29) oraz sumując wyrazy przy współczynnikach A_n , B_n i R_m , będziemy mieli

$$(2.31) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(\operatorname{ch} \bar{p}_n - \operatorname{ch} p_n y) + B_n(\cos \bar{q}_n - \cos q_n y) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m (\cos m\pi - \cos \beta_m y)] \sin \alpha_n x_0 = 0.$$

Przedstawiając lewą stronę równania (2.31) w postaci

$$(2.32) \quad Z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cos \beta_k y, \quad \beta_k = \frac{2k\pi}{h},$$

otrzymamy następujące równania:

$$(2.33) \quad Z_0 = 0, \quad Z_1 = 0, \dots, \quad Z_k = 0, \dots$$

Dla współczynników Z_k otrzymujemy następujące wzory:

$$(2.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left(\operatorname{ch} \bar{p}_n - \frac{2}{h} \frac{1}{p_n} \operatorname{sh} \bar{p}_n \right) + \right. \\ \left. + B_n \left(\cos \bar{q}_n - \frac{2}{h} \frac{1}{q_n} \sin \bar{q}_n \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos m\pi \right] \sin \alpha_n x_0 = 0, \\ Z_k = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \frac{4}{h} \frac{p_n}{p_n^2 + \beta_k^2} \operatorname{sh} \bar{p}_n \cos k\pi + \right. \\ \left. + B_n \frac{2}{h} \left[\frac{\sin(\bar{q}_n + k\pi)}{q_n + \beta_k} + \frac{\sin(\bar{q}_n - k\pi)}{q_n - \beta_k} \right] + \Gamma_{nk} R_k \right\} \sin \alpha_n x_0. \end{array} \right.$$

Jeżeli $k \rightarrow \infty$, to warunek zgodności przemieszczeń środka i przepony jest spełniony ściśle. W praktycznych obliczeniach możemy uwzględnić tylko skończoną ilość wyrazów R , na przykład wyrazy od R_0 do R_m ; wówczas należy ułożyć $m+1$ równań typu (2.33), to znaczy równania od $Z_0 = 0$ do $Z_m = 0$ włącznie. Warunek zgodności przemieszczeń będzie wtedy spełniony w przybliżeniu o dokładności zbliżonej do tej, jaką można uzyskać stosując przybliżenie według metody najmniejszych kwadratów. Stosowanie wprost metody najmniejszych kwadratów prowadziłoby do bardziej skomplikowanych wzorów.

Punktowe spełnienie warunku zgodności przemieszczeń. W praktycznych przypadkach wystarczy zawsze przyjęcie co najwyżej kilku wyrazów R . Wówczas odpowiednią ilość równań można otrzymać wymagając, aby warunek (2.27) spełniał się tylko w poszczególnych punktach $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_r$; otrzymamy wówczas równania typu

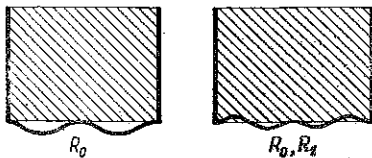
$$(2.35) \quad w(x_0, y_r) = \xi(x_0)$$

lub

$$(2.36) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [A_n (\operatorname{ch} \bar{p}_n - \operatorname{ch} p_n y_r) + B_n (\cos \bar{q}_n - \cos q_n y_r) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m (\cos m\pi - \cos \beta_m y_r)] \sin \alpha_n x_0 = 0.$$

Biorąc tylko wyraz R_0 należy przyjąć $y_1 = 0$; biorąc większą ilość wyrazów R_m należy pamiętać, że wskutek symetrii wystarczy spełnienie warunków (2.35) dla jednej połowy przepony, tzn. np. dla $y > 0$. Charakter otrzymanych przybliżeń odkształcenia środnika przedstawia rys. 8.

Jak widać z powyższych rozważań, dysponujemy w ogólnym przypadku równaniami czterech typów. Równania te zestawiono w tabelicy 1. Równania typu I powstają z równań (2.23) przez skreślenie znaku sumy i funkcji $\sin \alpha_n x$; podobnie równania typu II otrzymujemy z (2.24). Równania typu III są identyczne z (2.26). Równania typu IV przyjmujemy w zależności od stosowanej metody według wzorów (2.33) lub (2.36), otrzymując odpowiednio równania typu IVa lub IVb. Otrzymany układ równań ma charakterystyczną budowę przedstawioną (dla przypadku $n = 3$, $m = 2$ i użycia wzorów IVb) na rys. 9. W przypadku szczególnym, gdy nie ma połączenia



Rys. 8

		A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	M	R_0	R_1	R_2
$n=1$	I	█	█						█	█	█
	II	█	█					█	█	█	█
$n=2$	I			█	█				█	█	█
	II			█	█			█	█	█	█
$n=3$	I					█	█		█	█	█
	II					█	█		█	█	█
	III	█	█								
	IVa	█	█								
	IVa	█	█								
	IVb	█	█								

Rys. 9

między środnikiem i przeponą pośrednią, zatem gdy jest $r(y) \equiv 0$, mamy $R_m = 0$ i pozostają jedynie niewiadome A_n , B_n i M i odpowiadające im równania typu I, II i III. Oczywiście można spodziewać się, [(biorąc zwłaszcza pod uwagę wyniki liczbowe uzyskane w [2]), że połączenie przepony ze środnikiem nie ma istotnego wpływu na wyniki, dlatego ten uproszczony sposób może być zalecony do stosowania.

W przypadku, gdy nie ma przepony pośredniej jest $M = 0$ i odpadają równania typu III, wówczas nieskończony układ równań rozbija się na nieskończoną ilość układów, z których każdy zawiera dwa równania jednorodne. Dla każdego n otrzymamy wtedy jedno równanie typu I i jedno typu II, w których niewiadomymi będą A_n i B_n . Przyrównując do zera wyznacznik drugiego rzędu

Tablica 1

I	$A_n [\mathcal{Q}_n \operatorname{ch} \bar{p}_n - D^* \alpha_n^2 \gamma_{1n} (\gamma_{2n}^2 + \nu) \operatorname{sh} \bar{p}_n] + B_n [\mathcal{Q}_n \cos \bar{q}_n - D^* \alpha_n^2 \gamma_{2n} (\gamma_{1n}^2 - \nu) \sin \bar{q}_n] +$ $+ R_o \left(\Gamma_{no} \mathcal{Q}_n + \frac{h}{l} \sin \alpha_n x_o \right) + \mathcal{Q}_n \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos m\pi = 0$ $n = 1, 2, 3 \dots$
II	$-A_n [\Phi p_n \operatorname{sh} \bar{p}_n + D^* \alpha_n^2 (\gamma_{1n}^2 - \nu) \operatorname{ch} \bar{p}_n] + B_n [\Phi q_n \sin \bar{q}_n + D^* \alpha_n^2 (\gamma_{2n}^2 + \nu) \cos \bar{q}_n] +$ $+ D^* \Gamma_{no} R_o \alpha_n^2 \nu + D^* \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m (\beta_m^2 + \alpha_n^2 \nu) \cos m\pi + \frac{2}{l} M \sin \alpha_n x_o = 0$ $n = 1, 2, 3 \dots$
III	$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n p_n \operatorname{sh} \bar{p}_n - B_n q_n \sin \bar{q}_n) \sin \alpha_n x_o = 0$
IVa	$\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left(\operatorname{ch} \bar{p}_n - \frac{2}{h} \frac{1}{p_n} \operatorname{sh} \bar{p}_n \right) + B_n \left(\cos \bar{q}_n - \frac{2}{h} \frac{1}{q_n} \sin \bar{q}_n \right) + \right.$ $\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m \cos m\pi \right] \sin \alpha_n x_o = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{4}{h} \frac{p_n}{p_n^2 + \beta_k^2} \operatorname{sh} \bar{p}_n \cos k\pi + B_n \frac{2}{h} \left(\frac{\sin(\bar{q}_n + k\pi)}{q_n + \beta_k} + \frac{\sin(\bar{q}_n - k\pi)}{q_n - \beta_k} \right) + \right.$ $\left. + \Gamma_{nk} R_k \right] \sin \alpha_n x_o = 0$ $k = 1, 2, 3 \dots$
IVb	$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n (\operatorname{ch} \bar{p}_n - \operatorname{ch} p_n \gamma_r) + B_n (\cos \bar{q}_n - \cos q_n \gamma_r) +$ $+ \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{nm} R_m (\cos m\pi - \cos \beta_m \gamma_r)] \sin \alpha_n x_o = 0$ $r = 1, 2, 3 \dots$

otrzymamy wówczas równanie przestępne identyczne z podanym w [4] (por. też [1]) i wyprowadzonym przy założeniu istnienia przepon tylko na podporach.

Otrzymane równania są jednorodne ze względu na stałe A_n , B_n , R_m i M i krytyczną wartość współczynnika k można obliczyć rozwiązując równanie przestępne powstałe w wyniku przyrównania do zera wyznacznika układu.

Zwróćmy uwagę, że nie można w obliczeniach przyjmować $n < 2$, ponieważ wówczas równanie (2.26) ogranicza się do jednego wyrazu

$$(A_1 p_1 \operatorname{sh} \bar{p}_1 - B_1 q_1 \sin \bar{q}_1) \sin \alpha_1 x_o = 0,$$

Tablica 2

A_1	B_1	A_3	B_3	M
$Q_1 \operatorname{ch} \bar{p}_1 - D^* \alpha_n^2 \gamma_{11} (\gamma_{21}^2 + \nu) \operatorname{sh} \bar{p}_1$	$Q_1 \cos \bar{q}_1 - D^* \alpha_n^2 \gamma_{21} (\gamma_{11}^2 - \nu) \sin q_1$			
$-\Phi p_1 \operatorname{sh} \bar{p}_1 - D^* \alpha_n^2 (\gamma_{11}^2 - \nu) \operatorname{ch} \bar{p}_1$	$\Phi q_1 \sin \bar{q}_1 + D^* \alpha_n^2 (\gamma_{21}^2 + \nu) \cos \bar{q}_1$			$\frac{2}{l}$
		$Q_3 \operatorname{ch} \bar{p}_3 - D^* \alpha_n^2 \gamma_{13} (\gamma_{23}^2 + \nu) \operatorname{sh} \bar{p}_3$	$Q_3 \cos \bar{q}_3 - D^* \alpha_n^2 \gamma_{23} (\gamma_{13}^2 - \nu) \sin \bar{q}_3$	
		$-\Phi p_3 \operatorname{sh} \bar{p}_3 - D^* \alpha_n^2 (\gamma_{13}^2 - \nu) \operatorname{ch} \bar{p}_3$	$\Phi q_3 \sin \bar{q}_3 + D^* \alpha_n^2 (\gamma_{23}^2 + \nu) \cos \bar{q}_3$	$\frac{2}{l}$
$p_1 \operatorname{sh} \bar{p}_1$	$-q_1 \sin \bar{q}_1$	$-p_3 \operatorname{sh} \bar{p}_3$	$q_3 \sin \bar{q}_3$	

co oznacza spełnienie warunku $\psi = 0$ nie tylko dla $x = x_0$, ale również dla każdej innej wartości x , zatem mamy wówczas przekrój, którego odkształcalność jest ograniczona do płytowej odkształcalności środnika. Podobne ograniczenia odkształcalności przekroju wynikają wówczas również z równań typu IV. Zatem minimalna ilość równań, jaka może być użyta, wynosi 6 dla przypadku połączenia przepony pośredniej ze środnikiem (niewiadome A_1, B_1, A_2, B_2, M i R_0) lub 5 w przypadku braku połączenia.

Jak widać z powyższych rozważań, krzywa wyboczeniowa $\xi(x)$ pręta nie jest nigdy sinusoidą i może być przedstawiona tylko szeregiem Fouriera. Jeżeli przepona pośrednia jest umieszczona w środku długości pręta, tzn. gdy jest $x_0 = l/2$, to krzywa wyboczeniowa musi być symetryczna (rozpatrujemy oczywiście wpływ odkształcalności przekroju na najmniejszą siłę krytyczną Eulera, którą otrzymuje się przy jednej półfali wyboczenia) i należy odrzucić wszystkie wyrazy dla parzystych wartości n . W przypadku dowolnego położenia przepony różne od zera będą wszystkie wyrazy zarówno dla parzystych jak i dla nieparzystych n ; krzywa wyboczeniowa nie będzie wówczas symetryczna.

Przykład. Obliczmy siłę krytyczną dla pręta o wymiarach $l = 500$ cm, $h = b = 50$ cm, $\delta = 3$ cm, $t = 1$ cm, przyjmując $\nu = 0,3$. Przepona pośrednia umieszczona będzie w środku, czyli jest $x_0 = l/2$. Założymy, że nie ma połączenia między środnikiem i przeponą pośrednią. Obliczenie przeprowadzimy przyjmując $n = 3$, tzn. zachowując pięć niewiadomych: A_1, B_1, A_3, B_3 i M , ponieważ $A_2 = B_2 = 0$ ze względu na symetrię odkształconej pręta. Macierz układu równań przedstawiono w tablicy 2, przy czym ostatnie równanie ułożono według schematu IVb. Drogą prób podstawiając rozmaite wartości współczynnika k otrzymano $k = 10,02 \cdot 10^{-3}$. Siła krytyczna dla przekroju nieodkształcalnego obliczona przy pomocy wzoru Eulera $P_{kr} = \pi^2 EI / l^2$ daje współczynnik $k = 10,07 \cdot 10^{-3}$. Natomiast siła krytyczna dla pręta posiadającego jedynie dwie przepony na podporach określona jest współczynnikiem $k = 2,12 \cdot 10^{-3}$ (por. [1]). Jak widać, przepona pośrednia wywiera duży i bardzo korzystny wpływ na wielkość siły krytycznej, ponieważ prawie zupełnie likwiduje wpływ odkształcalności przekroju, który z 79% w przypadku istnienia tylko przepon skrajnych spada wskutek jej działania do 0,5%. Obliczenie przeprowadzone dla $n = 1$, tzn. przy użyciu stałych A_1, B_1 i M , dają taki sam wynik $k = 10,02 \cdot 10^{-3}$. Stąd wniosek, że odkształcalność płytowa półek w kierunku podłużnym ma w rozpatrywanym przykładzie znikomy wpływ na wyniki. Z tego powodu nie obliczono już następnego przybliżenia ($n = 5$).

W pracy [1] wykazano, że duże zmniejszenie siły Eulera powodowane jest zawsze faktem, że utrata stateczności ma wówczas charakter niemal czysto płytowy. Z przytoczonego przykładu wynika zatem, że przepona dodatkowa zmusza ceownik do pracy prętowej redukując odkształcenia płytowe do minimum. Oczywiście w przypadku półek o mniejszej grubości wpływ przepon pośrednich będzie nieco mniejszy, lecz pozostanie niewątpliwie nadal czynnikiem rozstrzygającym o charakterze wyboczenia.

Литература цитована в текście

- [1] А. ЧУДЗИКЕВИЧ, *Ogólna teoria stateczności prętów cienkościennych z uwzględnieniem odkształcalności przekroju poprzecznego. Część I. Pręty o przekrojach prostych*, Rozpr. Inżyn., 3, 8 (1960).
- [2] А. ЧУДЗИКЕВИЧ, *Ogólna teoria stateczności prętów cienkościennych z uwzględnieniem odkształcalności przekroju poprzecznego. Część II. Pręty o przekrojach złożonych*, Rozpr. Inżyn., 4, 8 (1960).
- [3] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.
- [4] А. ЧУДЗИКЕВИЧ, *Giętne i giętno-skrętne wyboczenie pręta ceowego o odkształcalnym przekroju poprzecznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ДИАФРАГМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Работа составляет продолжение предыдущих публикаций автора [1] и [2]. Целью работы является исследование влияния промежуточных диафрагм на устойчивость тонкостенного стержня коробчатого сечения, сжимаемого в осевом направлении. Предполагается полная упругость, свободные опоры стержня, свобода деформации крайних сечений, гибкие на изгиб диафрагмы, постоянная толщина стенок и недеформируемость полков в плоскости поперечного сечения.

Рассматриваются потеря устойчивости при изгибе, описанная функциями $\xi(x)$, $\psi(\xi)$ (рис. 3). Ввиду симметрии составляется уравнение равновесия (2.1) только для одной полки. В этих уравнениях $A = bd$ есть поперечное сечение, $I = db^3/12$ — момент инерции, E — модуль упругости, $S_v^{(1)}$ — статический момент полки по отношению к оси v , p и m представляют полную нагрузку полки, появляющуюся после потери устойчивости (рис. 4), а $k = \sigma/E$, где σ — есть напряжение стержня сжимаемого в осевом направлении. Стенка рассматривается как равномерно сжимаемая и изгибаемая пластинка (2.3), при чем нагрузка линейно распределена вдоль прямой $x = x_0$, реакция $r(y)$ представлена в форме ряда Фурье (2.2), откуда получается общее выражение (2.16) для $w(x, y)$. Принимая $y = h/2$ получены формулы (2.17) для краевых перемещений ξ , ψ , и (2.18) для краевых реакций m_1 и p_1 стенки. Сосредоточенное воздействие P и M серединой диафрагмы (рис. 7) дается формулами (2.20) и (2.21), в виде разложения в ряды Фурье, откуда получается полная нагрузка полки (2.22).

Подставляя (2.22) и (2.17) в (2.1) получаем для каждого n два уравнения, в которых выступают постоянные A_n , B_n , R_m и M .

Допавочное уравнение (2.26) получается из условия $\psi = 0$ для $x = x_0$. Дальнейшие уравнения, соответствующие неизвестным R_m , вытекают из условия согласия (2.27) перемещений стенки и серединой диафрагмы. Рассматриваются две возможности использования этого условия, а именно разложение тождества (2.30) в ряд Фурье (2.32), коэффициенты которого Z_k , выраженные формулами (2.34), должны равняться нулю, а также точное удовлетворение равенству (2.27) приводящее к уравнениям типа (2.36). В результате получается бесконечная система однородных уравнений, структура которой показана на рис. 9. В случае отсутствия соединения между серединой диафрагмой и стенкой балки нет уже неизвестных R_m . Последовательные приближения можно получить, употребляя бесконечное количество выражений но не менее $n = 2$.

В решенном примере получено критическое значение $k = 10,02 \cdot 10^{-3}$, тогда как согласно формуле Эйлера имеем $k = 10,07 \cdot 10^{-3}$. В случае когда существуют только край-

ние диафрагмы получается (согласно [1]) $k = 2,12 \cdot 10^{-3}$. Как из этого следует срединная диафрагма вызывает уменьшение влияния деформируемости сечения с 79% на 0,5% и таким образом ее действие очень выгодно.

Представленный метод можно использовать без существенных изменений для всякого рода поперечных сечений, различных видов потери устойчивости, а также в случае учета деформируемости всех стенок.

S u m m a r y

THE INFLUENCE OF INTERMEDIATE DIAPHRAGMS ON THE STABILITY OF A THIN-WALLED BAR

This is a continuation of the author's former papers, [1] and [2]. The object is to investigate the influence of an intermediate diaphragm on the stability of an axially compressed thin-walled channel. It is assumed that the bar is perfectly elastic, simply supported and its end cross-sections are free to warp. The diaphragms are assumed to be perfectly flexible, the walls are of uniform thickness and the flanges are indeformable in the plane of the cross-section.

The buckling described by the functions $\xi(x)$ and $\psi(x)$ (Fig. 3) is considered. In view of the symmetry the equations are established for one flange only. In these equations $A = b\delta$ is the cross sectional area, $I = \delta b^3/12$ — the moment of inertia of the flange, E — Young's modulus, $S_b^{(1)}$ — the static moment of the flange in relation to the x axis, p and m are the full loads of the flange after the stability loss (Fig. 4) and $k = \sigma/E$, σ being the axial compressive stress. The web is treated as a uniformly compressed and bent plate (2.3) where the load is the reaction $r(y)$ of the intermediate diaphragm (Fig. 5) linearly distributed along the line $x = x_0$. This reaction is represented by the Fourier series (2.2). Hence the general expression (2.16) is obtained for $w(x, y)$. Setting $y = h/2$ the Eqs. (2.17) are obtained for the edge displacements ξ, ψ and (2.18) for the edge reactions m_1 and p_1 of the web. The concentrated reactions P and M of the middle diaphragm (Fig. 7) is represented in the form of a Fourier expansion, Eqs. 2.20 and 2.21, from which the full load of the flange (2.22) is obtained. Substituting (2.22) and (2.17) in (2.1) we obtain, for every n , two equations involving the constants A_n, B_n, R_n and M . The additional equation (2.28) is obtained from the condition $\psi = 0$ for $x = x_0$. Further equations corresponding to the unknowns R_n follow from the compatibility condition (2.27) of the displacements of the web and the diaphragm. Two possibilities of making use of this condition are considered. These are the expansion of the identity (2.30) in a Fourier series (2.32) of which the coefficient Z_k given by the Eqs. (2.34) should be zero or the satisfaction of the equation (2.27) at one point, thus obtaining equations of the type (2.36). As a result, an infinite system of homogeneous equations is obtained with the structure shown at Fig. 9. If there is no joint between the middle surface and the web, the unknowns R_n disappear. Successive approximations may be obtained by taking a finite number ($n = 2$ at least) of terms.

In the numerical example the critical value $k = 10.02 \cdot 10^{-3}$ is obtained while according to Euler's formula $k = 10.07 \cdot 10^{-3}$. If there are the end diaphragms alone, we obtain, according to [1], $k = 2.12 \cdot 10^{-3}$. It is seen that the intermediate diaphragm causes the influence of the deformability of the cross-section to diminish from 79% to 0.5%, its action thus being very advantageous.

The method presented may be used with no essential change for cross-sections of any type and for buckling of any form, any number of intermediate diaphragms and also in the case where the deformability of all the walls is taken into consideration.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1960 r.