

J. BIAREZ i J. HEURTAUX

**MASYWY PÓLPRZESTRZENNE W STANIE RÓWNOWAGI
GRANICZNEJ**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXXIX**

TOM IX . ZESZYT 2 . ROK 1961

SPIS TREŚCI

Wstęp	173
1. Wyprowadzenie równań	174
2. Równania parametryczne charakterystyk	176
3. Rozwiązanie prostego przypadku metodą Mohra	178
4. Rozwiązanie Mohra w przypadku obciążenia	180

Wstęp

W niniejszej pracy postawiliśmy sobie za zadanie przedstawić teorię płaskiego stanu równowagi ważkiego jednorodnego masywu ograniczonego nieskończoną prostą (nachyloną pod kątem ε względem poziomu), obciążonego wzdłuż tej prostej równomiernym obciążeniem w ogólnym przypadku skośnym.

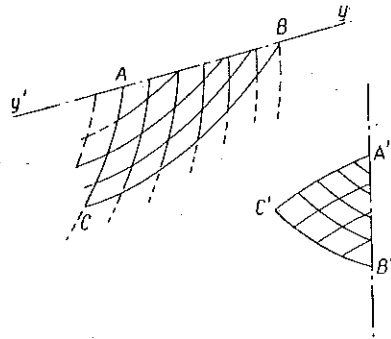
Przyjmujemy, że masyw znajduje się w stanie równowagi granicznej (przynajmniej w obszarze przylegającym do krawędzi) określonej przez klasyczne związki Coulomba.

Według naszych wiadomości najbardziej pełną analizę odpowiednich zagadnień brzegowych podał W. W. SOKOŁOWSKI, [1]. Podał on w zamkniętej postaci rozkład naprężeń w gruncie, co jest w większym lub mniejszym stopniu problemem klasycznym, oraz sprowadził do kwadratur wyznaczenie teoretycznych linii poślizgu (do tego tematu jeszcze powrócimy). Linie te, jak wiadomo, pokrywają się z siatką charakterystyk hiperbolicznego układu równań różniczkowych cząstkowych, określających rozpatrywane zagadnienie i w każdym punkcie są nachylone pod kątem $(\pi/4) - (\varrho/2)$ (ϱ jest kątem tarcia) względem większego z naprężeń głównych.

Praca W.W. SOKOŁOWSKIEGO jest mało znana i z tego względu uważaliśmy za celowe przedstawić przede wszystkim jej krótkie streszczenie, uzupełnione przez nas podaniem parametrycznych równań linii poślizgu w postaci skończonej.

Tak więc rozpatrywane zagadnienie zostało całkowicie rozwiązane z teoretycznego punktu widzenia. Jednakże z uwagi na bardzo skomplikowaną budowę otrzymanych wzorów wskazaliśmy na elementarną interpretację wykreślną (za pomocą kół Mohra) teorii Sokołowskiego, która umożliwia praktykom szybkie przedyskutowanie pewnych własności badanych stanów równowagi.

Ponadto należy przypomnieć, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego jest całkowicie określone w otoczeniu odcinka krawędzi przez dane warunki brzegowe. W wielu zastosowaniach rozpatruje się masyw ograniczony przez odcinki prostej obciążone równomiernie. Rozwiązanie podane niżej będzie więc lokalnie ważne dla wielu konkretnych przypadków, co naszym zdaniem zwiększa celowość niniejszej pracy.



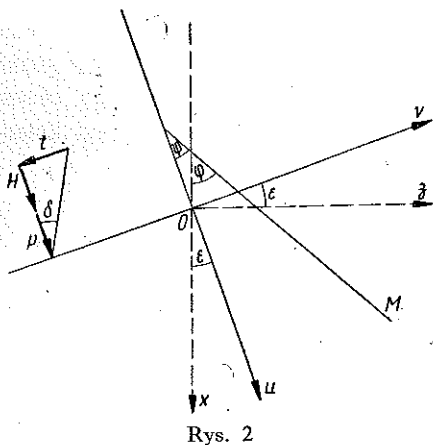
Rys. 1

Przy danej siatce charakterystyk, wykreślonej na podstawie danych brzegowych wzdłuż yy' (rys. 1), rozwiązanie w obszarze ABC jest całkowicie określone przez warunki wzdłuż AB . Dane brzegowe wzdłuż odcinka (prostoliniowego) AB są regularne. Można więc będzie zastosować wyniki dalszych rozważań do ograniczonych obszarów masywu nieskończonego lub skończonego, byleby tylko inne linie brzegowe masywu, jak $A'B'$ i dane brzegowe sformułowane dla nich, nie określały rozwiązania w obszarze $A'B'C'$ zachodzącym na obszar badany (w tym przypadku pojawia się linia, na której pewne składowe naprężeń są nieciągłe). Ten rodzaj zagadnienia występuje w szczególności w przypadku ścian oporowych.

Gdy badany maszyn osiąga stan płynięcia plastycznego, nie jest całkowicie pewne, że fizyczne linie poślizgu pokrywają się z charakterystykami. Istnieje wiele przypadków, gdy obserwacja gruntu pozwala tak sądzić, znane są skądinąd niezbite przykłady przeciwne (np. odkształcanie się przewodów walcowych).

1. Wyprowadzenie równań

Niech będzie dany maszyn o gęstości γ , nachylony względem poziomu pod kątem ε (rys. 2), o kącie tarcia ϱ , kohezji $c = H \operatorname{tg} \varrho$, obciążony na krawędzi równomiernym ukośnym ciśnieniem.



Rys. 2

Układ osi pokazano na rys. 2; Ox jest pionową skierowaną w dół, Ov jest krawędzią masywu.

Oznaczmy przez p ($p = \text{const}$) normalną składową tego ciśnienia na jednostkę długości i przez $-t = -(p+H) \operatorname{tg} \delta$ jego składową styczną ($t = \text{const}$).

Równania równowagi zapiszemy w zwykłej używanej notacji

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} = \gamma \cos \varepsilon, \\ \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} + \frac{\partial \sigma_v}{\partial v} = -\gamma \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Wiadomo ([1], s. 23), że można uwzględnić warunki Coulomba wyrażając niewiadome $\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}$ za pośrednictwem dwóch niewiadomych σ i ψ :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \sigma_u = \sigma(1 + \sin \varrho \cos 2\psi) - H, \\ \sigma_v = \sigma(1 - \sin \varrho \cos 2\psi) - H, \\ \tau_{uv} = \sigma \sin \varrho \sin 2\psi, \end{cases}$$

gdzie ψ jest kątem, jaki tworzy w punkcie M większe naprężenie głównie z kierunkiem Ou , a σ jest fikcyjnym naprężeniem średnim,

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_u + \sigma_v + 2H).$$

Warunki brzegowe i siły objętościowe powtarzają się przy przesuwanie się wzdłuż krawędzi. Poszukiwać więc będziemy takiego rozwiązania, w którym naprężenia są funkcją wyłącznie u . Jeżeli takie rozwiązanie istnieje i spełnia warunki brzegowe, to zgodnie z zasadą jednoznaczności jest ono rzeczywistym rozwiązaniem zagadnienia.

Przy tej hipotezie równania (1) upraszczają się:

$$(1.3) \quad \frac{d\sigma_u}{du} = \gamma \cos \varepsilon, \quad \frac{d\tau_{uv}}{du} = -\gamma \sin \varepsilon.$$

Wynikają stąd, po uwzględnieniu warunków brzegowych, zależności

$$(1.4) \quad \begin{cases} \sigma_u = u\gamma \cos \varepsilon + p, \\ \tau_{uv} = -u\gamma \sin \varepsilon - t. \end{cases}$$

Do wyznaczenia wartości (1.4) naprężeń σ_u i τ_{uv} wykorzystaliśmy tylko równania (1.1) oraz hipotezę, że σ_u i τ_{uv} są niezależne od v . Jedynie do wyznaczenia σ_v niezbędne jest wprowadzenie dodatkowej hipotezy, a mianowicie równowagi granicznej (prawa Coulomba), to jest wykorzystanie równań (1.2), które dają po wyprowadzeniu wyrażenia (1.4) na σ_u :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{u\gamma \cos \varepsilon + p + H}{1 + \sin \varrho \cos 2\psi}, \\ \sigma_v = \frac{u\gamma \cos \varepsilon + p + H}{1 + \sin \varrho \cos 2\psi} (1 - \sin \varrho \cos 2\psi) - H. \end{cases}$$

Równania (1.2₃) i (1.4₂) pozwalają napisać:

$$(1.6) \quad \tau_{uv} = -(\gamma u \sin \varepsilon + t) = \frac{u\gamma \cos \varepsilon + p + H}{1 + \sin \varrho \cos 2\psi} \sin \varrho \sin 2\psi.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(1.7) \quad \begin{cases} a = \frac{t}{\gamma \sin \varepsilon} = \frac{(p+H) \operatorname{tg} \delta}{\gamma \sin \varepsilon}, \\ b = a \frac{\sin \varrho}{\sin \Delta} \frac{\sin (\varepsilon - \Delta)}{\sin (\varepsilon - \varrho)} \end{cases}$$

wynika następujący związek pomiędzy u i ψ :

$$(1.8) \quad u + a = -b \sin (\varepsilon - \varrho) \frac{\sin 2\psi}{\sin \varepsilon + \sin \varrho \sin (2\psi + \varepsilon)}.$$

Wiadomo, że nachylenie charakterystyk, które przecinają się w dowolnym punkcie (u , v), jest określone zależnościami

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} (\varphi \pm \mu), \quad \text{gdzie } \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}.$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia w dowolnym punkcie M odległym o u_0 od powierzchni, nie jest konieczne rozwiązywanie równań charakterystyk. Należy

tylko poszukać takiej wartości ψ , ażeby wychodząc z (1.7) otrzymać $u = u_0$. Podstawiając następnie tę wartość ψ do (1.4) i (1.5) otrzymuje się stan naprężenia w punkcie M .

Jeżeli jednak chcemy aby wyniki te można było stosować w przypadku, gdy stan naprężenia jest określony tylko na części $\nu\nu'$ (np. $O\nu$ lub, co na jedno wychodzi, OA) konieczne jest zbadanie, w jakim obszarze masywu rozwiązanie jest zupełnie określone. W tym celu niezbędna jest umiejętność wykreślenia łuków charakterystyk wychodzących z O i A .

2. Równania parametryczne charakterystyk

Z równań różniczkowych charakterystyk wynika

$$dv = \operatorname{tg}(\varphi + \chi\mu) \frac{du}{d\psi} d\psi, \text{ gdzie } \chi = \pm 1.$$

Równanie $\chi = +1$ określa pierwszą rodzinę, a równanie $\chi = -1$ określa rodzinę drugą.

Uwzględniając (1.8) otrzymujemy

$$(2.1) \quad dv = A \frac{\sin 2\psi + \chi \cos \varrho}{[\sin \varepsilon + \sin \varrho \sin (2\psi + \varepsilon)]^2} d\psi,$$

gdzie wprowadzono podstawienie $A = -2b \sin(\varepsilon - \varrho) \sin \varepsilon$.

Zależność $u = u(\psi)$ jest znana na podstawie (1.8). Z (2.1) otrzymuje się zależność $v = v(\psi)$ w postaci całki. Ostatecznie charakterystyki będą dane w postaci parametrycznej ze zmienną niezależną ψ . W pracy dokonano całkowania równania (2.1). Rachunki (choćby elementarne, ale bardzo żmudne) nie zostały tu podane.

Podajemy wyniki, odpowiadające różnym możliwym przypadkom. Przypominamy, że we wszystkich przypadkach $u(\psi)$ jest określone przez (1.8),

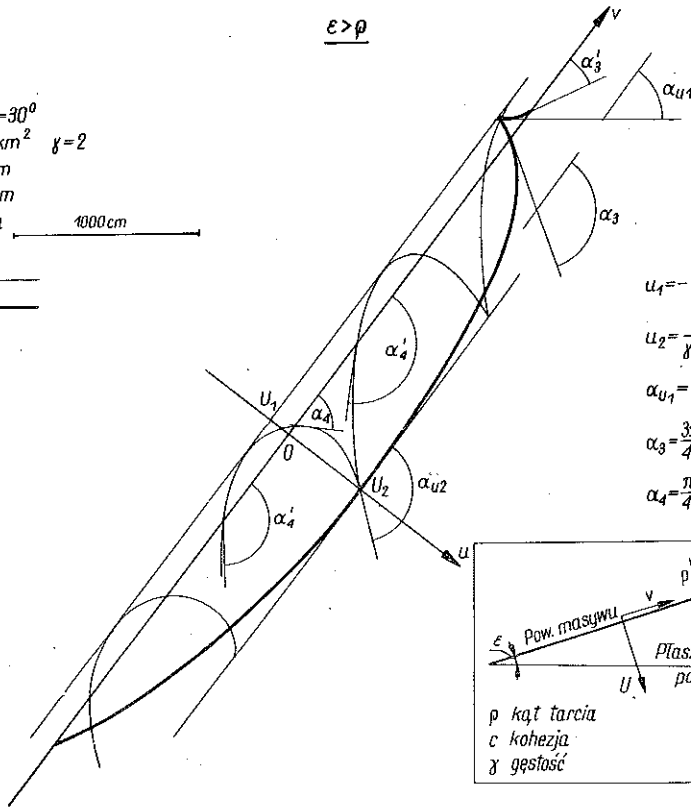
$$\begin{aligned} \text{a) } p < \varepsilon \quad v - \text{const} &= \frac{A}{\sin^2 \varepsilon (1 - \sin \varrho)^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \left(i + \frac{k}{l^2} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{l} - \frac{1}{2(l^2 + x^2)} \left[j + \left(i - \frac{k}{l^2} \right) x \right] \right\}, \\ \text{b) } p = \varepsilon \quad v - \text{const} &= \frac{2a \sin(\varrho - \delta)}{\sin \delta (1 - \sin \varrho)^2} \left(\frac{i}{x} + \frac{j}{2x^2} + \frac{k}{3x^3} \right), \\ \text{c) } p > \varepsilon \quad v - \text{const} &= \frac{A}{\sin^2 \varepsilon (1 - \sin \varrho)^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{4l} \log \left| \frac{l+x}{l-x} \right| \left(\frac{k}{l^2} - i \right) + \frac{1}{2(l^2 - x^2)} \left[j + x \left(i + \frac{k}{l^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Dane:

$\rho = t = 0$
 $\varepsilon = 45^\circ$ $\varphi = 30^\circ$
 $c = 288 \text{ g/cm}^2$ $\gamma = 2$
 $u_1 = 129 \text{ cm}$
 $u_2 = 484 \text{ cm}$
 Podziałka $\overline{\hspace{2cm}} 1000 \text{ cm}$

$\% = 1$ ———
 $\% = -1$ ———

$\varepsilon > \rho$



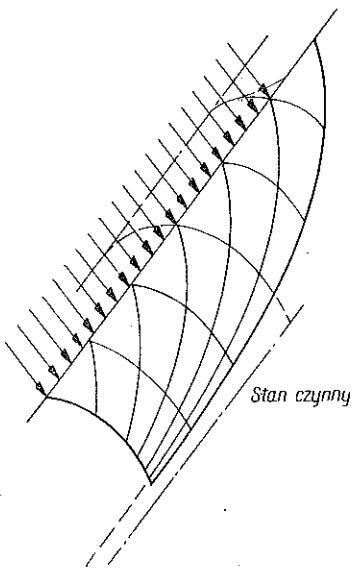
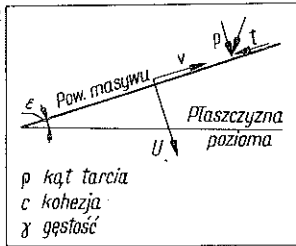
$$u_1 = -\frac{c}{\gamma \cos \varepsilon (\operatorname{tge} + \operatorname{tg} \varphi)}$$

$$u_2 = \frac{c}{\gamma \cos \varepsilon (\operatorname{tge} - \operatorname{tg} \varphi)}$$

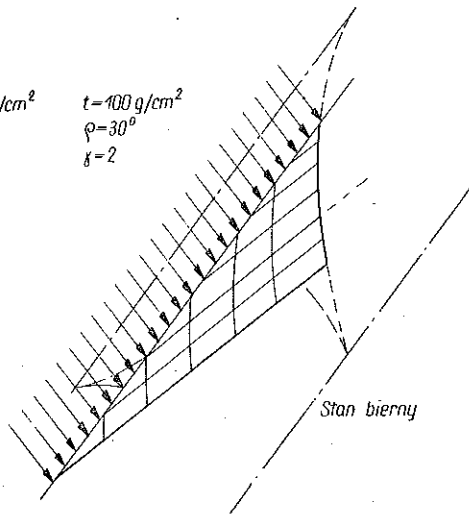
$$\alpha_{u1} = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \alpha_{u2} = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\alpha_3 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

$$\alpha_4' = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_3' = \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$



$\rho = 500 \text{ g/cm}^2$ $t = 100 \text{ g/cm}^2$
 $\varepsilon = 45^\circ$ $\varphi = 30^\circ$
 $c = 0$ $\gamma = 2$



Rys. 3

We wzorach powyższych wprowadzono następujące oznaczenia:

$$x = \operatorname{tg} \psi + \frac{\sin \varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon (1 - \sin \varrho)}$$

[w przypadku (a), wielkość ta zmienia znak w przypadku (c)],

$$l^2 = \frac{1 - \frac{\sin^2 \varrho}{\sin^2 \varepsilon}}{(1 - \sin \varrho)^2}, \quad i = \chi \cos \varrho,$$

$$j = 2 \left[1 - \frac{\sin \varrho \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon (1 - \sin \varrho)} \chi \cos \varrho \right],$$

$$k = \chi \cos \varrho \left[1 + \frac{\sin^2 \varrho \cos^2 \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon (1 - \sin \varrho)^2} \right] - \frac{2 \sin \varrho \cos \varepsilon}{(1 - \sin \varrho) \sin \varepsilon}.$$

Wartość u jest określona jednoznacznie jako funkcja ψ , podczas gdy v jest określona z dokładnością do pewnej stałej. Rodziny krzywych otrzymuje się przez przesunięcie wzdłuż krawędzi masywu.

Te krzywe o okresie π mają dwie obwiednie w postaci prostych równoległych do krawędzi masywu. Jeżeli $\varepsilon < \varrho$, krzywe charakterystyk leżą na zewnątrz tych prostych, jeżeli $\varepsilon > \varrho$, krzywe te leżą wewnątrz, jeżeli $\varepsilon = \varrho$ jedna z prostych leży w nieskończoności.

Dla każdej z dwóch wartości χ otrzymuje się jedną krzywą. Każda krzywa składa się z dwóch części, które odpowiadają parciu czynnemu i biernemu. Rozdzielenie krzywej na te części następuje na obwiedni, gdzie charakterystyki mają punkt styczności lub doznają zwrotu. Jedna z tych części jest rzeczywista, tzn. leży wewnątrz masywu.

Istnieje płaszczyzna szczególna, równoległa do powierzchni masywu, gdzie naprężenia są normalne. Płaszczyzna ta jest określona przez zależność

$$u = -\frac{t}{\gamma \sin \varepsilon}.$$

Powyższe równania równowagi pozwalają wykreślić charakterystyki we wszystkich przypadkach obciążenia równomiernego. Kilka z nich podajemy na rys. 3.

3. Rozwiązanie prostego przypadku metodą Mohra

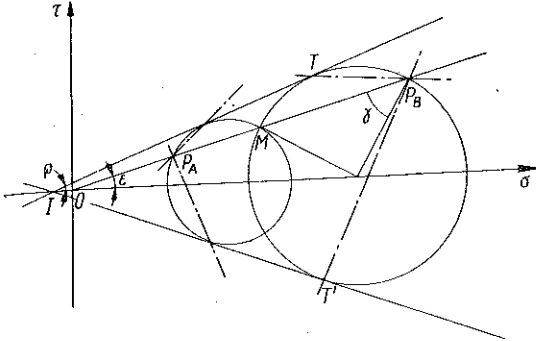
W przypadku $p = t = 0$ ze względu na dodatkową symetrię względem kierunku pionowego naprężenia we wszystkich punktach płaszczyzny równoległej do powierzchni są prostopadłe i mają znaną wartość. Można więc wykreślić punkt odwzorujący M na płaszczyźnie Mohra; linia OM jest nachylona pod kątem ε do osi,

$$OM = \gamma z \cos \varepsilon,$$

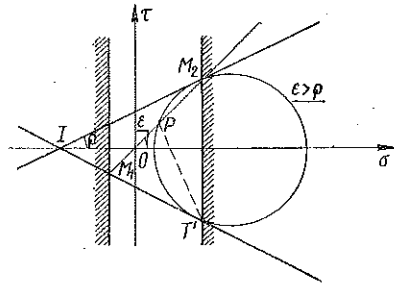
gdzie z jest głębokością.

Istnieją dwa koła styczne do krzywej granicznej, co odpowiada dwom granicznym stanom naprężenia, czynnemu i biernemu.

Otrzymuje się krzywe obwiednie uwzględniając, że punkt M powinien znajdować się na krzywej granicznej. Istnieją dwa punkty graniczne M_1 i M_2 (rys. 3, 4, 5 i 6),



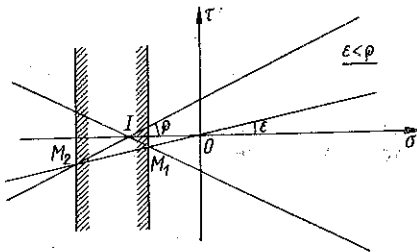
Rys. 4



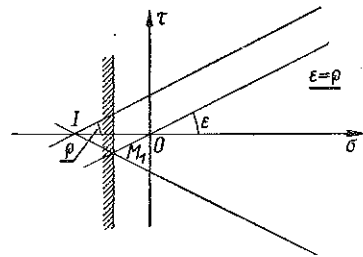
Rys. 5

które pozwalają, przez prosty rachunek geometryczny, otrzymać proste obwiednie charakterystyk

$$z_1 = -\frac{c}{\gamma \cos^2 \varepsilon (\operatorname{tg} \varrho + \operatorname{tg} \varepsilon)}, \quad z_2 = -\frac{c}{\gamma \cos^2 \varepsilon (\operatorname{tg} \varrho - \operatorname{tg} \varepsilon)}$$



Rys. 6



Rys. 7

Posługując się biegunem P koła, otrzymujemy styczne do charakterystyk PM_2 , równoległe do powierzchni gruntu oraz PT' nachylone pod kątem $\pi/2 + \varrho$ względem PM_2 . Wartości te są niezależne od kohezji.

W ten sam sposób otrzymuje się styczne do charakterystyk w każdym punkcie.

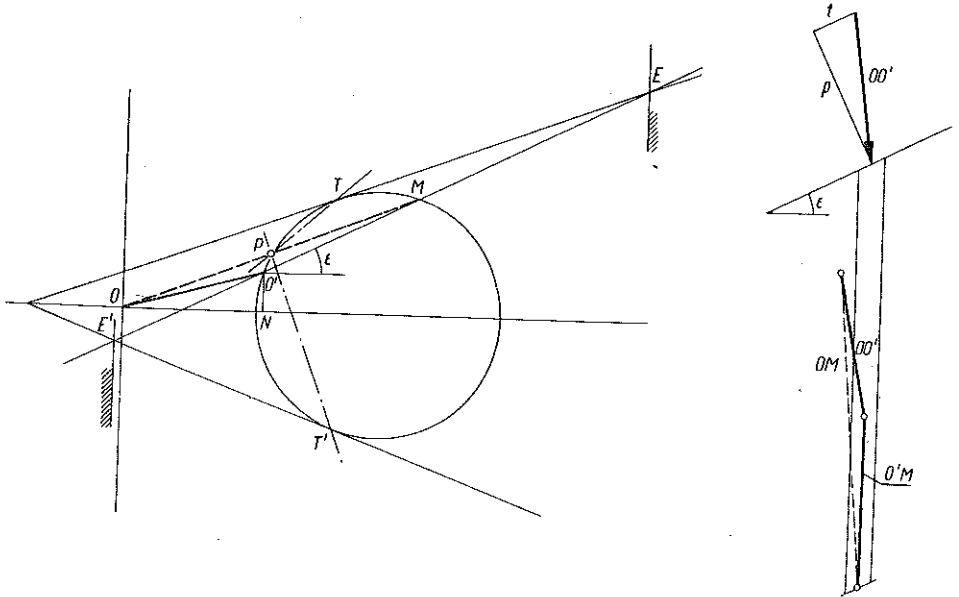
Środkiem homotetii dla kół jest I a dla biegunów O . Styczne TP i $T'P'$ (rys. 3) do charakterystyk obracają się więc z wyjątkiem przypadku, gdy kohezja równa się zeru. Skądinąd jeżeli koła są bardzo oddalone, O i I są względnie bliskie i kierunek TP stycznej pokrywa się z kierunkiem dla gruntu bez kohezji, skąd wynikają nachylenia asymptoty w przypadku parcia $(\pi/4) - (\varrho/2) - (\gamma/2) + (\varepsilon/2)$ oraz $(\pi/4) - (\varrho/2) + (\gamma/2) - (\varepsilon/2)$ na powierzchni gruntu, jeżeli $\sin \gamma = \sin \varepsilon / \sin \varrho$.

4. Rozwiązanie Mohra w przypadku obciążenia

Na początku pracy założyliśmy następujące związki, dające naprężenia na elemencie płaszczyzny równoległej do powierzchni i leżącej na głębokości z :

$$\sigma_u = \gamma z \cos^2 \varepsilon + p, \quad \tau_{uv} = -\gamma z \sin \varepsilon \cos \varepsilon - t.$$

Naprężenie OM na głębokości z w płaszczyźnie Mohra otrzymuje się więc przyjmując $ON = p$, następnie $NO' = t$. Punkt O' jest stały. Wystarczy następnie postępować jak poprzednio skierowując prostą $O'M$ pod kątem ε i tak, aby $O'M = \gamma z \cos \varepsilon$. Pozwoli to wyznaczyć koła Mohra dające stany naprężenia



Rys. 8

w każdym punkcie masywu, jak również styczne PT i PT' do charakterystyk asymptoty oraz obwiednie.

Wyrażamy podziękowanie Profesorowi KRAVTCZENKO za udzieloną nam pomoc. W szczególności wykorzystaliśmy jego wykłady na Wydziale Nauk Ścisłych w Grenoble, w których znajduje się komentarz prac W.W. SOKOŁOWSKIEGO.

Literatura cytowana w tekście

[1] В.В. СОКОЛОВСКИЙ, *Статика сыпучей среды*, Изд. Тех. Теор. Лит., Москва 1954, 47-58.

Резюме

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ МАССИВОВ

В настоящей работе авторы представляют теорию плоского равновесного состояния весомого однородного массива, ограниченного бесконечной прямой, (наклоненной к массиву под углом ε по отношению к горизонтали, находящегося под действием равномерной нагрузки в общем косом случае. Эта нагрузка действует вдоль прямой.

Принимается, что массив находится в предельном равновесном состоянии (по меньшей мере в области прилегающей к краю), определенным классическими зависимостями Кулопа.

По сведениям авторов, наиболее полный анализ соответствующих краевых задач представил В. В. Соколовский, [1]. Он привел в замкнутом виде распределение напряжений в грунте, что является в большей или меньшей степени классической проблемой, а также свел к квадратуре определение теоретических линий скольжения (этот вопрос будет рассматриваться позже).

Эти линии, как известно, совпадают с сеткой характеристик гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих рассматриваемую задачу и в каждой точке наклонены под углом $\pi/4 - \varrho/2$ (где ϱ - угол трения) по отношению к главному напряжению.

Работа В. В. Соколовского мало известна и поэтому авторы считают целесообразным представить прежде всего ее краткое резюме. Это резюме авторы дополнили параметрическими уравнениями линий скольжения в конечном виде.

Таким образом рассматриваемый вопрос с теоретической точки зрения полностью разрешен. Однако в виду очень сложной структуры полученных формул, авторы обращают внимание на элементарную графическую интерпретацию (с помощью кругов Мора) теории Соколовского, которая дает возможность практикам быстро продискутировать некоторые свойства исследуемых равновесных состояний. Кроме того следует припомнить, что решение задачи Коши полностью определено, в окрестности отрезка края — данными краевыми условиями. Во многих применениях рассматривается массив, ограниченный отрезками прямой, находящимися под действием равномерной нагрузки. Приведенное решение будет таким образом локально важным для многих конкретных случаев, что по мнению авторов повышает целесообразность настоящей работы.

1. При данной сетке характеристик, построенных на основании краевых данных вдоль $u'v$ (рис. 1) — решение в области ABC — полностью определено условиями вдоль AB . Краевые данные вдоль прямолинейного отрезка AB — регулярны. Можно будет, таким образом, применить результаты дальнейших рассуждений к ограниченным областям бесконечного или конечного массива, при условии чтобы только другие краевые линии массива как $A'B'$ и сформулированные для них краевые данные, не определяли решения в области $A'B'C'$ заходящей на исследуемую область (в данном случае появляется линия, на которой известные составляющие напряжений являются разрывными). Проблема этого рода выступает в особенности в случае опорных стенок.

2. Когда исследуемый массив переходит в состояние пластического течения нет абсолютной уверенности в том, что физические линии скольжения совпадают с характеристиками. Существует много случаев, когда наблюдения грунта позволяет прийти к таким заключениям. Однако известны еще неоспоримые противоположные примеры (напр. деформации цилиндрических проводов).

R é s u m é

ETUDE DES MASSIFS SEMI-INDEFINIS EN EQUILIBRE LIMITE

Dans ce travail, nous nous proposons d'exposer la théorie de l'équilibre plan d'un massif pesant, homogène, limité par une droite indéfinie (incliné de l'angle ε sur l'horizon) et soumis le long de celle-ci à une charge uniforme (généralement oblique).

Nous admettons que le massif est à l'état d'équilibre limite (tout au moins dans la zone avoisinant sa frontière), caractérisé par la relation classique de Coulomb.

A notre connaissance, l'étude la plus complète du problème aux limites correspondant est due à V.V. Sokolovsky, [1]. Cet auteur donne, sous forme finie, la répartition des contraintes dans le sol, ce qui est plus ou moins classique, et réduit ensuite aux quadratures la détermination des lignes de glissement théoriques (point sur lequel nous reviendrons). On sait que celles-ci coïncident avec le réseau des caractéristiques du système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles du problème et sont inclinées en chaque point de $(\pi/4) - (\rho/2)$ (ρ étant l'angle de frottement) sur la direction locale de la contrainte principale majeure.

Le travail de V.V. SOKOLOVSKY étant peu connu nous avons cru faire oeuvre utile en présentant d'abord un résumé rapide: nous l'avons complété sur un point, en donnant les équations paramétriques des lignes de glissement sous forme finie.

Ainsi donc, le problème traité est complètement résolu au point de vue théorique, mais les formules résolutive étant fort compliquées, nous indiquons quelques interprétations graphiques élémentaires (au moyen des cercles de Mohr) de la théorie de Sokolovsky, qui permettent au technicien de discuter rapidement certaines propriétés des états d'équilibre étudiés.

Au surplus, il convient de rappeler que la solution du problème de Cauchy est entièrement déterminée, dans le voisinage d'une portion de la frontière, par les données que celle-ci porte. Or, dans beaucoup d'applications, on a à considérer les massifs limités par des segments de droite portant des charges uniformes. La solution ci-après sera donc encore localement valable dans beaucoup de cas concrets, ce qui nous semble accroître l'intérêt de notre étude.

1. Etant donné un réseau de caractéristiques tracées à partir de données frontières sur $y'y$, la solution dans ABC est donc totalement déterminée par les conditions sur AB . Les données frontières le long du segment (rectiligne) AB sont régulières. On pourra donc appliquer les résultats de l'étude qui suit à des régions limitées d'un massif, lui-même limité ou non, pourvu que les autres frontières du massif, tel $A'B'$, et les données sur ces frontières, ne définissent pas la solution dans une région $A'B'C'$ qui empiéterait sur la zone étudiée. (Dans ce cas apparaît dans le massif une ligne sur laquelle certaines composantes des contraintes sont discontinues). Ce genre de problème se pose en particulier dans le cas des murs de soutènement.

2. Quand le massif étudié atteint la phase de l'écoulement plastique, on n'est pas du tout assuré que les lignes de glissement physique coïncident avec les caractéristiques. S'il existe de nombreux cas où l'observation sur le terrain peut le faire penser, on connaît, par ailleurs, des contre-exemples irréfutables (dilatation d'une conduite cylindrique en particulier).

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DES FLUIDES

Praca została złożona w redakcji dnia 10 lutego 1960 r.