WŁODZIMIERZ DERSKI

STAN NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W GRUBEJ PŁYCIE KOŁOWEJ, WYWOŁANY DZIAŁANIEM NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
CLXXXI
TOM IX · ZESZYT 1 · ROK 1961

SPIS TREŚCI

Niniejsza publikacja jest dalszym ciągiem pracy [7]. W wymienionej pracy podane są rozwiązania, które przedstawione są za pomocą szeregów pojedynczych i podwójnych. Te ostatnie, szczególnie w przypadku warstw powierzchniowych płyty i małych czasów, są wolno zbieżne. W takich przypadkach ogrzania, jakie są rozważane w wymienionej pracy, szczególnie interesujące są pierwsze sekundy po przyłożeniu źródła ciepła. W tych pierwszych sekundach naprężenia w warstwach powierzchniowych są największe. Wraz z upływem czasu naprężenia maleją i dążą do stanu ustalonego, a dwie ze składowych — mianowicie składowa normalna σ_{zz} i składowa styczna σ_{rz} — dążą do zera. W pierwszych sekundach procesu nagrzewania, kiedy właśnie zmiany naprężeń w warstwach powierzchniowych są najbardziej interesujące, sumowanie szeregów ze względu na wolną ich zbieżność jest bardzo kłopotliwe.

W pracy niniejszej podane są wzory asymptotyczne, które z praktycznie wystarczającą dokładnością pozwalają opisać przebieg zmian naprężeń w warstwach powierzchniowych w pierwszych sekundach procesu nagrzewania. Obliczenia numeryczne są bez porównania prostsze niż w przypadku wzorów podanych w wymienionej pracy. Podobnie jak poprzednio warunki mechaniczne na powierzchniach $z = \pm h$ będą spełnione dokładnie, a na powierzchni $r = b$ w sposób całkowy.

Wykaz ważniejszych oznaczeń nie objaśnionych w tekście

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx \text{ — funkcja błędu Gaussa},$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2}\,dx \text{ — funkcja błędu Gaussa},$$

$$i \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty \operatorname{erfc}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc}(x),$$

$$i^2 \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i \operatorname{erfc}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{4}[\operatorname{erfc}(x) - 2x\, i \operatorname{erfc}(x)],$$

$\fallingdotseq$ — symbol transformacji odwrotnej,

$J_n(x)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju, rzędu n,

$\eta(x)$ — funkcja Heaviside'a.

1. Pole temperatury

Przypadek 1a. Ograniczymy się jedynie do przypadków $\tau = 0$, ponieważ wtedy szeregi są najwolniej zbieżne. Oprócz tego z rozwiązania dla $\tau = 0$ posługując się całką Duhamela można otrzymać praktycznie każdą charakterystykę ogrzania.

Rozwiązanie równania przewodnictwa

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{1.1}$$

oprócz warunku początkowego

$$T(r, z, 0) = 0, \tag{1.2}$$

musi spełniać warunki brzegowe

$$\begin{cases} T(r, \pm h, t) = f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a, \\ T(r, \pm th, t) = 0, & \text{jeśli } a < r < b, \\ T(b, z, t) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

gdzie $2a$ jest średnicą koła, na którym przyłożone jest źródło ciepła określone funkcją $f(r)$, a $2b$ oznacza średnicę płyty.

Po zastosowaniu transformacji Laplace'a, określonej całką $T_L = \int\limits_0^\infty Te^{-pt}\,dt$, równanie (1.1) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_L}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} - q^2 T_L = 0; \qquad q^2 = \frac{p}{\varkappa}, \tag{1.4}$$

a warunki brzegowe (1.3) po przetransformowaniu wyrażają się następująco:

$$\begin{cases} T_L(r, \pm h, p) = f(r)/p, & \text{jeśli } 0 < r < a, \\ T_L(r, \pm h, p) = 0, & \text{jeśli } a < r < b, \\ T_L(b, z, p) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Rozwiązanie równania (1.4) można przyjąć w postaci szeregu Fouriera-Bessela

$$T_L(r, z, p) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nL} \frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} J_0(\alpha_n r),$$

gdzie A_{nL} jest współczynnikiem rozkładu w szereg Fouriera-Bessela funkcji temperatury określonej na brzegach $z = \pm h$, a liczby α_n są pierwiastkami równania

$$J_0(\alpha_n b) = 0, \tag{1.6}$$

natomiast liczby λ określone są związkiem

$$\lambda^2 = \alpha^2 + q^2.$$

W celu określenia poszukiwanej funkcji temperatury wystarcza wykonać transformację odwrotną, określoną całką

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} T_L(r, z, p) e^{pt}\, dp.$$

Zanim zajmiemy się całkowaniem, przedstawimy funkcję podcałkową w postaci, w której wydzielimy część zależną od parametru transformacji p. Posługując się znanymi wzorami znajdujemy:

$$A_{nL} = \frac{2}{p b^2 J_1^2(\alpha_n b)} \int_0^a r f(r) J_0(\alpha_n r)\, dr = A_n \frac{1}{p}. \tag{1.7}$$

Obecnie transformatę rozwiązania można przedstawić w postaci

$$T_L(r, z, p) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) F_{nL}(z, p), \qquad F_{nL}(z, p) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)}.$$

Ze wzoru tego widać, że transformacja odwrotna sprowadza się do wyliczenia całki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma=i\infty} F_{nL}(z, p) e^{pt}\, dp.$$

Jak wiadomo z podstaw rachunku operatorowego, dużym wartościom parametru p odpowiadają małe wartości czasu. Mając to na uwadze posłużymy się wyrażeniem asymptotycznym $\operatorname{ch} x$. Dla dużych argumentów x można napisać, [1],

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx \frac{e^{|x|}}{2}.$$

Tak więc

$$F_{nL}(z, p) = \frac{e^{-\lambda(h-|z|)}}{p},$$

a po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się

$$F_n(z, t) = \eta(t) \frac{1}{2} \left[e^{-\alpha_n (h-|z|)} \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \sqrt{\varkappa \alpha_n^2 t} \right) + \right.$$
$$\left. + e^{\alpha_n (h-|z|)} \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \sqrt{\varkappa \alpha_n^2 t} \right) \right]. \tag{1.8}$$

Tak więc poszukiwane rozwiązywanie asymptotyczne dla małych czasów wyraża się wzorem

$$T(r, z, t) = \eta(t) \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) F_n(z, t). \tag{1.9}$$

W przypadku szczególnym, gdy $f(r) = T_0$, otrzymujemy

$$A_n = \frac{2T_0 a J_1(\alpha_n a)}{\alpha_n b^2 J_1^2(\alpha_n b)},$$

a po podstawieniu do wzoru (1.9)

$$T(r, z, t) = \eta(t)\frac{T_0 a}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_n a)}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n b)}J_0(\alpha_n r)F_n(z, t).$$

Przypadek 2a. Pole temperatury określone jest tutaj równaniem przewodnictwa (1.1), warunkiem brzegowym (1.2) i warunkami brzegowymi:

$$(1.10)\qquad \begin{cases} T(r, \pm h, t) = \mathrm{sgn}(h)f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a,\\ T(r, \pm h, t) = 0, & \text{jeśli } a < r < b,\\ T(b, z, t) = 0. \end{cases}$$

W tym przypadku transformatę rozwiązania ze względu na zmianę znaku w pierwszym warunku brzegowym w zależności od z należy przyjąć w postaci

$$T(r, z, p) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)\frac{1}{p}\frac{\mathrm{sh}(\lambda z)}{\mathrm{sh}(\lambda h)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)H_{nL}(z, p).$$

Podobnie jak poprzednio transformacja odwrotna dotyczy jedynie funkcji $H_{nL}(z, p)$. Dla dużych argumentów

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \mathrm{sgn}(x)\frac{e^{|x|}}{2},$$

a stąd wynika, że

$$H_{nL}(z, p) \approx \mathrm{sgn}(z)\frac{e^{-\lambda(h-|z|)}}{p}.$$

Na podstawie powyższego wzoru można napisać, że

$$H_{nL}(z, p) = F_{nL}(z, p)\,\mathrm{sgn}(z),$$

a co za tym idzie, rozwiązanie asymptotyczne w tym przypadku ma budowę podobną do (1.9) z tą jednak różnicą, że zmienia znak wraz ze zmianą znaku argumentu z:

$$(1.11)\qquad T(r, z, t) = \eta(t)\,\mathrm{sgn}(z)\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)F_n(z, t).$$

Przypadek 3a. Pole temperatury określone jest równaniem (1.1), warunkiem początkowym (1.2) i następującymi warunkami brzegowymi:

$$(1.12)\qquad \begin{cases} T(r, h, t) = f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a,\\ T(r, h, t) = 0, & \text{jeśli } a < r < b,\\ T(r, -h, t) = 0, & \\ T(b, z, t) = 0. & \end{cases}$$

Jak wynika z porównania warunków brzegowych, rozwiązanie tego przypadku jest superpozycją obu poprzednich i da się zapisać za pomocą funkcji HEAVISIDE'A $\eta(z)$ w następującej postaci:

$$T(r, z, t) = \eta(t)\eta(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) F_n(z, t). \tag{1.13}$$

Zajmiemy się obecnie takimi przypadkami, w których $b \to \infty$. Ostatni z każdej grupy warunków brzegowych trzeba napisać następująco:

$$T(b, z, t) \to 0, \text{ gdy } b \to \infty.$$

Taka postać warunku brzegowego pozwala zastosować transformację HANKELA, określoną całką

$$T_{LH} = \int_0^\infty T_L r J_0(\alpha r) dr.$$

Przypadek 1b. Przypadek ten odpowiada przypadkowi 1a z tą różnicą, że tutaj $b \to \infty$. Zastosowanie transformacji HANKELA do równania (1.4) prowadzi do zwyczajnego równania różniczkowego

$$\frac{d^2 T_{LH}}{dz^2} = (q^2 + \alpha^2) T_{LH}, \tag{1.14}$$

którego rozwiązanie musi spełniać przetransformowany warunek (1.3)

$$T_{LH}(\alpha, \pm h, p) = \frac{1}{p} A(\alpha),$$

gdzie, jak wiadomo,

$$A(\alpha) = \int_0^\infty r f(r) J_0(\alpha r) dr.$$

Jak wynika z warunku brzegowego, rozwiązanie jest symetryczne względem z i ma postać

$$T_{LH} = A(\alpha) \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{ch}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})}.$$

Transformacja odwrotna określona jest całką podwójną

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} dp \int_0^\infty T_{LH} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha,$$

skąd wynika, że

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty A(\alpha) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{ch}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})} e^{pt} dp.$$

Posługując się przedstawieniem asymptotycznym, jak to miało miejsce w przypadku 1a, otrzymujemy

$$F_L(\alpha, z, p) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{ch}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})} \approx \frac{1}{p} \exp.[-(h - |z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}].$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się

$$(1.15) \qquad T(r, z, t) = \eta(t) \int_0^\infty A(\alpha)\alpha J_0(\alpha r) F(\alpha, z, t)\, d\alpha,$$

gdzie

$$(1.16) \qquad F(\alpha, z, t) = \frac{1}{2}\left[e^{-\alpha(h-|z|)} \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \sqrt{\varkappa \alpha^2 t}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{\alpha(h-|z|)} \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \sqrt{\varkappa \alpha^2 t}\right)\right].$$

W przypadku szczególnym, gdy $f(r) = T_0$, mamy

$$A(\alpha) = T_0 \frac{a}{\alpha} J_1(\alpha a),$$

a wzór na temperaturę przyjmuje postać

$$T(r, z, t) = \eta(t)\, T_0 a \int_0^\infty J_1(\alpha a)\, J_0(\alpha r)\, F(\alpha, z, t)\, d\alpha.$$

Przypadek 2b. Przez analogię do przypadku 2a, (ponieważ pierwsze warunki brzegowe są takie same) od razu można napisać rozwiązanie

$$(1.17) \qquad T(r, z, t) = \eta(t) \operatorname{sgn}(z) \int_0^\infty A(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, F(\alpha, z, t)\, d\alpha,$$

gdzie $F(\alpha, z, t)$ określone jest wzorem (1.16).

Przypadek 3b Przypadek ten jest analogiczny do przypadku 3a z tą różnicą, że inny jest jedynie ostatni z warunków brzegowych. Jest on oczywiście superpozycją dwóch poprzednich przypadków i wyraża się wzorem

$$(1.18) \qquad T(r, z, t) = \eta(t)\eta(z) \int_0^\infty A(\alpha)\, \alpha J_0(\alpha r)\, F(\alpha, z, t)\, d\alpha.$$

2. Stan naprężenia i przemieszczenia

W celu wyznaczenia stanu naprężenia posłużymy się tutaj nieco inną metodą od tej, którą posługiwaliśmy się w poprzedniej pracy. Wyznaczymy transformaty LAPLACE'A składowych stanu naprężenia oraz przemieszczenia i dopiero wtedy wykonamy transformację odwrotną. Transformata składowych przemieszczenia wyraża się przez transformatę potencjału termosprężystego przemieszczenia przy pomocy znanych wzorów

$$(2.1) \qquad \bar{u}_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial r} \quad \text{oraz} \quad \bar{w}_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial z},$$

gdzie $\Phi_L\,(r, z, p)$ jest transformatą LAPLACE'A funkcji potencjału termosprężystego przemieszczenia, a $\bar{u}_L$ i $\bar{w}_L$ są transformatami przemieszczenia radialnego i osiowego.

Po uwzględnieniu wzorów (2.1) transformaty równań przemieszczeniowych teorii sprężystości, [5], sprowadzają się do jednego równania

$$\frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_L}{\partial r}+\frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial z^2}=\vartheta T_L, \qquad \vartheta=\alpha_T\frac{1+\nu}{1-\nu}, \tag{2.2}$$

gdzie ν oznacza współczynnik POISSONA, a α_T — liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Podobnie jak w poprzedniej pracy poszukiwać będziemy takich rozwiązań szczególnych równania (2.2), które spełnią dwa warunki: $\Phi_L\ (r, \pm h, p)=0$ oraz $\Phi_L(b, z, p)=0$.

Przypadek 1a. Przypadek ten odpowiada temperaturze określonej wzorem (1.9). Poszukiwanym rozwiązaniem szczególnym równania (2.2) jest tutaj funkcja

$$\Phi_L=\varkappa\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0(\alpha_n r)\, Z_{nL}(z, p), \tag{2.3}$$

gdzie

$$Z_L(z, p)=\frac{1}{p^2}\left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)}-\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\right].$$

Składowe stanu naprężenia określone potencjałem uzyskuje się ze znanych związków, [5],

$$(\bar{\sigma}_{ij})_L=2G[(\Phi_L)_{,ij}-(\Phi_L), ll],$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem KRONNECKERA.

Wypisane kolejno składowe naprężenia mają postać

$$\left\{\begin{aligned}
(\bar{\sigma}_{rr})_L &= 2G\left(\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial r^2}-\nabla^2\Phi\right)=-2G\varkappa\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}A_n\Big[J_0(\alpha_n r)Z''_{nL}(z,p)-\\
&\qquad -\frac{\alpha_n}{r}J_1(\alpha_n r)Z_{nL}(z,p)\Big],\\
(\bar{\sigma}_{rz})_L &= 2G\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial r\,\partial z}=-2G\varkappa\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}A_n\alpha_n J_1(\alpha_n r)Z'_{nL}(z,p),\\
(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi})_L &= 2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_L}{\partial r}-\nabla^2\Phi_L\right)=-2G\varkappa\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}A_n\Big\{J_0(\alpha_n r)Z''_{nL}(z,p)-\\
&\qquad -\alpha_n^2\left[J_0(\alpha_n r)-\frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right]Z_{nL}(z,p)\Big\},\\
(\bar{\sigma}_{zz})_L &= 2G\left(\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial z^2}-\nabla^2\Phi_L\right)=2G\varkappa\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}A_n\alpha_n^2 J_0(\alpha_n r)Z_{nL}(z,p),\\
(\bar{\sigma}_{r\varphi})_L &= 0,
\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

gdzie

$$Z'_L(z,p) = \frac{1}{p^2}\left[\lambda\frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} - \alpha_n\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\right],$$

$$Z''_L(z,p) = \frac{1}{p^2}\left[\lambda^2\frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} - \alpha_n^2\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\right].$$

Korzystając ze związków (2.1) wypisujemy składowe stanu przemieszczenia:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \bar{u}_L = -\varkappa\vartheta\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\alpha_n J_1(\alpha_n r) Z_{nL}(z,p), \\ \bar{w}_L = \varkappa\vartheta\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0((\alpha_n r) Z'_{nL}(z_n,p). \end{cases}$$

Stan naprężenia powinien spełniać na powierzchniach $z = \pm h$ dwa warunki brzegowe

$$(2.6)\qquad [\sigma_{zz}(r,\pm h,p)]_L = 0, \qquad [\sigma_{rz}(r,\pm h,p)]_L = 0.$$

Składowe naprężenia określone potencjałem spełniają jedynie pierwszy z tych warunków. W celu spełnienia drugiego dodamy stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})_L$, który określa funkcja Love'a spełniająca jak wiadomo równanie biharmoniczne, [3],

$$(2.7)\qquad \nabla^2\nabla^2\varphi = 0.$$

Składowe stanu naprężenia określone przez tę funkcję wyrażają się związkami [3]:

$$(2.8)\qquad \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right), & \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\varphi - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], & \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], \end{cases}$$

a składowe stanu przemieszczenia

$$(2.9)\qquad \bar{\bar{u}} = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}, \qquad \bar{\bar{w}} = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].$$

Funkcję φ należy również uważać za transformatę Laplace'a względem czasu, co w dalszym ciągu oznaczać będziemy indeksem L.

Rozwiązanie równania (2.7) przyjmiemy w postaci

$$(2.10)\qquad \varphi_L(r,z,p) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{nL}(z,p) J_0(\alpha_n r),$$

gdzie

$$M_{nL}(z,p) = B_{nL}\operatorname{sh}(\alpha_n z) + C_{nL}\alpha_n z\operatorname{ch}(\alpha_n z).$$

Współczynniki B_{nL} i C_{nL} wyznaczamy z warunków brzegowych (2.6), które obecnie zapiszemy w postaci następującej:

$$[\bar{\bar{\sigma}}_{zz}(r,\pm h,p)]_L = 0 \quad \text{oraz} \quad [\bar{\sigma}_{rz}(r,\pm h,p)]_L + [\bar{\bar{\sigma}}_{rz}(r,\pm h,p)]_L = 0.$$

W wyniku otrzymuje się:

$$(2.11)\quad \begin{cases} B_{nL} = [(1-2\nu)-\alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)]C_{nL}, \\ C_{nL} = \dfrac{(1-2\nu)\varkappa\vartheta A_n}{\alpha_n^2\{\alpha_n h+[1-\alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)]\operatorname{tgh}(\alpha_n h)\}\operatorname{ch}(\alpha_n h)} K_{nL}(p), \end{cases}$$

gdzie

$$(2.12)\quad K_{nL}(p) = \frac{1}{p^2}[\lambda \operatorname{tgh}(\lambda h)-\alpha_n \operatorname{tgh}(\alpha_n h)].$$

Mając na uwadze transformację odwrotną stałe całkowania będziemy zawsze przedstawiać w postaci iloczynu

$$B_{nL} = B_n K_{nL}(p), \qquad C_{nL} = C_n K_{nL}(p).$$

Podobnie będziemy przedstawiać funkcję $M_{nL}(z,p)$:

$$(2.13)\quad M_{nL}(z,p) = M_n(z)K_{nL}(p).$$

Ponieważ wyrażenia na składowe naprężenia nie dadzą się przedstawić w postaci krótkich wzorów, zadowolimy się wypisaniem ich w postaci symbolicznej. Korzystając ze wzorów (2.8) można napisać:

$$(2.14)\quad \begin{cases} (\bar{\bar{\sigma}}_{rr})_L = \dfrac{2G}{1-2\nu}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\nu J_0(\alpha_n r)P_n(z)+\alpha_n^2\left[J_0(\alpha_n r)-\frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right]M_n'(z)\right\}K_{nL}(p), \\ (\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi})_L = \dfrac{2G}{1-2\nu}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{\nu J_0(\alpha_n r)P_n(z)+\frac{\alpha_n}{r}J_1(\alpha_n r)M_n'(z)\}K_{nL}(p), \\ (\bar{\bar{\sigma}}_{zz})_L = \dfrac{2G}{1-2\nu}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{(2-\nu)P_n(z)-M_n'''(z)\}J_0(\alpha_n r)K_{nL}(p), \\ (\bar{\bar{\sigma}}_{rz})_L = \dfrac{-2G}{1-2\nu}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{(1-\nu)Q_n(z)-M_n''(z)\}\alpha_n J_1(\alpha_n r)K_{nL}(p), \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M_n'(z) &= (B_n+C_n)\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n z)+C_n\alpha_n^2 z \operatorname{sh}(\alpha_n z), \\ M_n''(z) &= (B_n+2C_n)\alpha_n^2 \operatorname{sh}(\alpha_n z)+C_n\alpha_n^3 z \operatorname{ch}(\alpha_n z), \\ M_n'''(z) &= (B_n+3C_n)\alpha_n^3 \operatorname{ch}(\alpha_n z)+C_n\alpha_n^4 z \operatorname{sh}(\alpha_n z), \\ P_n(z) &= M_n'''(z)-\alpha_n^2 M_n'(z) = 2C_n\alpha_n^3 \operatorname{ch}(\alpha_n z), \\ Q_n(z) &= M_n''(z)-\alpha_n^2 M_n(z) = 2C_n\alpha_n^2 \operatorname{sh}(\alpha_n z). \end{aligned}$$

Składowe przemieszczenia określone funkcją φ_L i wzorami (2.9) mają postać

$$(2.15)\quad \begin{cases} \bar{\bar{u}}_L = \dfrac{1}{1-2\nu}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n J_1(\alpha_n r)M_n'(z)K_{nL}(p), \\ \bar{\bar{w}}_L = \dfrac{1}{1-2\nu}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{2(1-\nu)Q_n(z)-M_n''(z)\}J_0(\alpha_n r)K_{nL}(p). \end{cases}$$

Stan naprężenia spełniający warunki na powierzchniach $z = \pm h$ otrzymuje się przez odpowiednie dodanie wzorów (2.4) i (2.14), a stan przemieszczenia przez dodanie wzorów (2.5) i (2.15). Tak otrzymany stan naprężenia nie spełnia warunku na brzegu $r = b$

$$[\sigma_{rr}(b\,,z\,,p)]_L = 0\,. \tag{2.16}$$

Warunek ten spełnimy całkowo. Składowa naprężenia $(\sigma_{rr}'')_L$ będąca sumą funkcji (2.4) i (2.14), jest na brzegu $r = b$ jedynie funkcją zmiennej z. Funkcja ta jest symetryczną względem zmiennej z i ma wypadkową równą

$$N_L = \int\limits_{-h}^{h} \{[\bar{\sigma}_{rr}(b, z, p)]_L + [\bar{\bar{\sigma}}_{rr}(b, z, p)]_L\}\, dz = 4G\varkappa\vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{b\alpha_n} J_1(\alpha_n b) L_{nL}(p), \tag{2.17}$$

gdzie

$$L_{nL}(p) = \frac{1}{p^2}\left\{\operatorname{tgh}(\lambda h)\frac{(\alpha_n^2+\lambda^2)D_n - 2\nu\lambda^2 \operatorname{tgh}(\alpha_n h)}{\lambda D_n} - 2\alpha_n \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\frac{D_n - \nu \operatorname{tgh}(\alpha_n h)}{D_n}\right\},$$

$$D_n = \alpha_n h + [(1-\alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)] \operatorname{tgh}(\alpha_n h).$$

Przyjmujemy, że siła N_L, działająca na jednostkę obwodu płyty, rozłożona jest równomiernie na całej jej grubości. Jak wiadomo, [4], stan naprężenia odpowiadający przeciwnemu zwrotowi tej siły wyraża się wzorami:

$$(\sigma_{rr}')_L = -\frac{N_L}{2h}, \qquad (\sigma_{\varphi\varphi}')_L = -\frac{N_L}{2h}, \qquad (\sigma_{zz}')_L = (\sigma_{rz}')_L = (\sigma_{r\varphi}')_L = 0, \tag{2.18}$$

a stan przemieszczenia:

$$u_L' = -\frac{1-\nu}{2G(1+\nu)}\frac{rN_L}{2h}, \qquad w_L' = \frac{\nu z N_L}{2G(1+\nu)h}\,.$$

Suma składowych stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})_L + (\bar{\bar{\sigma}}_{ij})_L + (\sigma_{ij}')_L = (\sigma_{ij})_L$ daje poszukiwaną transformatę stanu naprężenia. Podobnie $\bar{u}_L + \bar{\bar{u}}_L + u_L' = u_L$ oraz $\bar{w}_L + \bar{\bar{w}}_L + w_L' = w_L$ są poszukiwanymi składowymi stanu przemieszczenia.

W celu znalezienia rzeczywistego stanu naprężenia i przemieszczenia wystarczy wykonać transformację odwrotną. We wszystkich wzorach została wydzielona część zależna od parametru transformacji p; są to funkcje: $Z_{nL}(z, p)$, $Z_{nL}'(z, p)$, $Z_{nL}''(z, p)$, $K_{nL}(p)$ oraz $L_{nL}(p)$. Podstawienie na miejsce tych transformat ich funkcji da nam poszukiwane rozwiązanie. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku temperatury, ograniczymy się przy odwracaniu transformacji jedynie do małych czasów. Tak więc występujące w wymienionych funkcjach kombinacje funkcji hiperbolicznych, gdy $p \to \infty$, redukują się do postaci:

$$\frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \to e^{-\lambda(h-|z|)}\,, \qquad \frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{sh}(\lambda h)} \to \operatorname{sgn}(z)\, e^{-\lambda(h-|z|)}, \qquad \operatorname{tgh}(\lambda h) \to 1\,,$$

Wypiszemy obecnie transformaty wymienionych funkcji dla małych czasów:

$$
(2.19)\quad \left\{
\begin{aligned}
Z_{nL}(z,p) &\approx \frac{1}{p^2}\left[e^{-\lambda(h-|z|)} - \frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\right] \doteqdot 2t\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. -\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha_n(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right] - t\,\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)},\\
Z'_{nL}(z,p) &\approx \frac{1}{p^2}\left[\operatorname{sgn}(z)\, e^{-\lambda(h-|z|)} - \alpha_n\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\right] \doteqdot -\alpha_n t\,\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} +\\
&\qquad + \operatorname{sgn}(z)\frac{1}{2\varkappa\alpha_n}\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)}\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha_n(h-|z|)}\,\times\right.\\
&\qquad \left.\times\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right] + \operatorname{sgn}(z)2\alpha_n t\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. -\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha_n(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right],\\
Z''_{nL}(z,p) &\approx \frac{1}{p^2}\left[\lambda^2 e^{-\lambda(h-|z|)} - \alpha_n^2\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\right] \doteqdot 2\alpha_n^2 t\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. -\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right] + e^{\alpha_n(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) +\\
&\qquad + \frac{1}{2\varkappa}\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)}\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha_n(h-|z|)}\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. +\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right] - \alpha_n^2 t\,\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)},\\
K_{nL}(p) &\approx \frac{1}{p^2}[\lambda - \alpha_n\operatorname{tgh}(\alpha_n h)] \doteqdot \alpha_n t[\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t}) - \operatorname{tgh}(\alpha_n h)] +\\
&\qquad + \frac{1}{2\varkappa\alpha_n}\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t}) + \sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\, e^{-\varkappa\alpha_n^2 t},\\
L_{nL}(p) &\approx \frac{1}{p^2}\left[\frac{(\alpha_n^2+\lambda^2)D_n - 2\nu\lambda^2\operatorname{tgh}(\alpha_n h)}{\lambda D_n} - 2\alpha_n\operatorname{tgh}(\alpha_n h)\,\frac{D_n - \nu\operatorname{tgh}(\alpha_n h)}{D_n}\right] \doteqdot\\
&\doteqdot \frac{D_n - \nu\operatorname{tgh}(\alpha_n h)}{D_n}\, 2\alpha_n t[\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t}) - \operatorname{tgh}(\alpha_n h)] + \sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\, e^{-\varkappa\alpha_n^2 t} -\\
&\qquad - \frac{\nu\operatorname{tgh}(\alpha_n h)}{D_n\varkappa\alpha_n}\left[\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t}) + \alpha_n\sqrt{\frac{\varkappa t}{\pi}}\, e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Ze względu na brak miejsca nie będziemy tutaj wypisywać przetransformowanych wzorów na naprężenia i przemieszczenia. Aby wzory te otrzymać wystarczy w (2.4), (2.5), (2.14), (2.15) i (2.17) zamiast transformat podstawić ich same funkcje, określone wzorami (2.19).

Podobnie jak w poprzedniej pracy na ten sam temat, w odróżnieniu od przypadku stacjonarnego otrzymuje się, że naprężenia σ_{zz} i σ_{rz} różnią się od zera.

Przypadek 2a. Podobnie jak w przypadku temperatury funkcja potencjału będzie mieć taką samą budowę jak w przypadku 1a. Różnić się będzie jedynie funkcją zależną od z i p. Aby otrzymać funkcję, potencjału wystarczy we wzorze (2.3) zamiast $Z_{nL}(z, p)$ wstawić funkcję

$$S_{nL}(z, p) = \frac{1}{p^2}\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right]. \tag{2.20}$$

Obie funkcje różnią się jedynie tym, że zamiast $\operatorname{ch}(x)$ występuje $\operatorname{sh}(x)$. Tak więc składowe naprężenia określone potencjałem $(\bar{\sigma}_{ij})_L$ będą przedstawione wzorami (2.4), w których zamiast $Z_{nL}(z, p)$ i jej pochodnych podstawia się funkcję $S_{nL}(z, p)$ i odpowiednie jej pochodne lub też dokonuje się następujące podstawienia:

$$\begin{array}{ll} \text{występuje} & \text{powinno być} \\ \left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}(\omega z) \\ \operatorname{ch}(\omega h) \\ \operatorname{sh}(\omega z) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \operatorname{sh}(\omega z), \\ \operatorname{sh}(\omega h), \\ \operatorname{ch}(\omega z), \end{array} \end{array} \tag{2.21}$$

gdzie $\omega = \lambda, \alpha_n$.

Tę samą zamianę należy przeprowadzić we wzorach na przemieszczenia (2.5).

W podobnie prosty sposób można napisać funkcję LOVE'A. Funkcja ta wyraża się wzorem (2.10), w którym zamiast $M_{nL}(z, p)$ należy podstawić funkcję

$$N_{nL}(z, p) = B_{nL} \operatorname{ch}(\alpha_n z) + C_{nL} \alpha_n z \operatorname{sh}(\alpha_n z) \tag{2.22}$$

lub dokonać zamiany:

$$\begin{array}{ll} \text{występuje} & \text{powinno być} \\ \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sh}(\alpha_n z) \\ \operatorname{ch}(\alpha_n z) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \operatorname{ch}(\alpha_n z), \\ \operatorname{sh}(\alpha_n z). \end{array} \end{array} \tag{2.23}$$

Stałe całkowania wyznaczone z warunków brzegowych na powierzchniach $z = \pm h$ dadzą się również przedstawić wzorami z poprzedniego przypadku (2.11), w których należy wykonać podstawienia

$$\begin{array}{ll} \text{występuje} & \text{powinno być} \\ \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tgh}(\alpha_n h) \\ \operatorname{ch}(\alpha_n h) \\ K_{nL}(p) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \operatorname{ctgh}(\alpha_n h), \\ \operatorname{sh}(\alpha_n h), \\ O_{nL}(p) = [\lambda \operatorname{ctgh}(\lambda h) - \alpha_n \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]/p. \end{array} \end{array} \tag{2.24}$$

Składowe naprężenia określone funkcją LOVE'A będą się wyrażać wzorami (2.14), w których należy wykonać podstawienia określone wzorami (2.23) i (2.24). Po wykonaniu tych samych podstawień we wzorach (2.15) otrzyma się składowe przemieszczenia.

Tak wyznaczone składowe naprężenia nie spełniają warunku brzegowego (2.16.) Naprężenia $(\sigma_{rr})_L$ mają na brzegu $r=b$ wypadkową równą zeru, ale dają moment równy

$$(2.25)\quad M_L = \int_{-h}^{h} \{[\bar{\sigma}_{rr}(b,z,p,)]_L + [\bar{\sigma}_{rr}(b,z,p)]_L\} z\,dz = 4G\varkappa\vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{b} J_1(\alpha_n b)\alpha_n L_{nL}(p),$$

gdzie

$$L_{nL}(p) = \operatorname{ctgh}(\lambda h) \frac{\alpha_n^3 h + \alpha_n h \lambda^2 E_n + 2\nu\lambda^2[1-\alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]}{p^2 \lambda \alpha_n^3 E_n} +$$

$$+ \frac{\alpha_n^2 - \lambda^2}{p^2\lambda^2\alpha_n^2} - \operatorname{ctgh}(\alpha_n h) \frac{\alpha_n h E_n + 2\nu[1-\alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]}{p^2 \alpha_n^3 E_n},$$

$$E_n = \alpha_n h + [1-\alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)] \operatorname{ctgh}(\alpha_n h).$$

Składowe naprężenia wywołane momentem o przeciwnym znaku wyrażają się wzorami, [6]:

$$(2.26)\quad (\sigma'_{rr})_L = (\sigma'_{\varphi\varphi})_L = -\frac{3zM_L}{2h^3}, \quad (\sigma'_{zz})_L = (\sigma'_{rz})_L = (\sigma'_{r\varphi})_L = 0$$

oraz przemieszczenia

$$(2.27)\quad u'_L = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{3zrM_L}{4Gh^3}, \quad w'_L = \frac{3M_L}{4h^3}\frac{2\nu z^2 + (1-\nu)r^2}{2G(1+\nu)}.$$

Pozostaje obecnie wykonać transformację odwrotną dla małych czasów. W funkcjach podlegających transformacji występują funkcje hiperboliczne i ich kombinacje, które dla małych czasów, gdy $p\to\infty$ redukuje się do postaci:

$$\frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{sh}(\lambda h)} \to \operatorname{sgn}(z) e^{-\lambda(h-|z|)}, \quad \frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \to e^{-\lambda(h-|z|)}, \quad \operatorname{ctgh}(\lambda h) \to 1..$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczania transformacji odwrotnych występujących w tym przypadku funkcji:

$$\begin{cases} S_{nL}(z,p) \approx \frac{1}{p^2}\left[\operatorname{sgn}(z) e^{-\lambda(h-|z|)} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right] \doteq -t\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)} + \\ \quad + \operatorname{sgn}(z)\, 2t\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)} i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) + \right. \\ \quad \left. + e^{+\alpha_n(h-|z|)} i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right], \\ S'_{nL}(z,p) \approx \frac{1}{p^2}\left[\lambda e^{-\lambda(h-|z|)} - \alpha_n\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right] \doteq 2\varkappa\alpha_n\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)} \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \right.\right. \\ \quad \left. - \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha_n(h-|z|)} \operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right) - \alpha_n t\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)} + \end{cases}$$

$$
(2.28)\left\{
\begin{aligned}
&+2\alpha_n t\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)} i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)+\right.\\
&\left.+e^{\alpha_n(h-|z|)} i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right],\\
&S''_{nL}(z,p)\approx\frac{1}{p^2}\left[\lambda^2\operatorname{sgn}(z)e^{-\lambda(h-|z|)}-\alpha_n^2\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right]\doteq-\alpha_n^2 t\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}+\\
&+\operatorname{sgn}(z)2\alpha_n^2 t\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)} i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)+\right.\\
&\left.+e^{\alpha_n(h-|z|)} i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right]+\frac{\operatorname{sgn}(z)}{2\varkappa}\left[e^{-\alpha_n(h-|z|)}\times\right.\\
&\left.\times\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)+e^{\alpha_n(h-|z|)}\operatorname{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha_n\sqrt{\varkappa t}\right)\right],\\
&O_{nL}(p)\approx\frac{1}{p^2}[\lambda-\alpha_n\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]\doteq\alpha_n t[\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t})-\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]+\\
&+\frac{1}{2\varkappa\alpha_n}\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t})+\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t},\\
&L_{nL}(p)\approx\frac{\alpha_n^3 k+\alpha_n h\lambda^2 E_n+2\nu\lambda^2[1-\alpha_n h\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]}{p^2\lambda\alpha_n^3 E_n}+\frac{\alpha_n^2-\lambda^2}{p^2\lambda^2\alpha_n^2}\operatorname{cthg}(\alpha_n h)\times\\
&\times\frac{\alpha_n hE_n+2\nu[1-\alpha_n h\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]}{p^2\alpha_n^2 E_n}\doteq\frac{1}{\varkappa\alpha_n^4}e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}+\\
&+\frac{2\nu[1-\alpha_n h\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]}{\alpha_n^3 E_n}\left[\alpha_n t\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t})+\frac{1}{2\varkappa\alpha_n}\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t})-\right.\\
&\left.-2\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\right]-t\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\frac{\alpha_n hE_n+2\nu[1-\alpha_n h\operatorname{ctgh}(\alpha_n h)]}{\alpha_n^2 E_n}+\\
&+h\frac{\sqrt{\pi}(1+E_n)+2E_n}{2\varkappa\alpha_n^3 E_n}\operatorname{erf}(\alpha_n\sqrt{\varkappa t})-2h\frac{1+E_n}{\alpha_n^2 E_n}\sqrt{\frac{t}{\varkappa}}\,e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Przypadek 3a. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku temperatury, poszukiwane wzory na naprężenia i przemieszczenia są superpozycją wzorów z dwóch poprzednich przypadków. Dla ilustracji omówimy proces otrzymywania składowej naprężenia σ_{rr}:

1. We wzorze (2.4) zastępujemy $Z_{nL}^{(n)}(z,p)$ przez odpowiednią retransformatę, określoną wzorami (2.19).

2. Wykorzystujemy ten sam wzór (2.4) i zamiast retransformat $Z_{nL}^{(n)}(z,p)$ podstawiamy odpowiednie retransformatory $S_{nL}^{(n)}(z,p)$.

3. Dodajemy do siebie wzory określone w punktach 1 i 2 i dzielimy je przez 2. Otrzymana suma odpowiada tej części wzoru na temperaturę, którą określa funkcja potencjału termosprężystego przemieszczenia.

4. W taki sam sposób postępujemy przy otrzymywaniu pozostałych części składowej σ_{rr}, a więc $\overline{\overline{\sigma}}_{rr}$ i σ'_{rr}.

Nie będziemy tutaj wypisywać tych wzorów. Wydaje się, że zainteresowany czytelnik może je otrzymać bez trudu.

Przypadek 1b. Przypadek ten odpowiada temperaturze określonej wzorem (1.15). Rozwiązanie równania (2.2) przyjmiemy tutaj w następującej postaci:

$$\Phi_L(z,r,p) = \varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha J_0(\alpha r) Z_L(z,\alpha,p)\,d\alpha, \tag{2.29}$$

gdzie

$$Z_L(z,\alpha,p) = \frac{1}{p^2}\left[\frac{\operatorname{ch}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{ch}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})} - \frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}\right].$$

Transformaty składowych naprężenia określone funkcją potencjału (2.29) mają postać:

$$\left\{\begin{aligned}
(\overline{\sigma}_{rr})_L &= -2G\varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha\left[J_0(\alpha r)Z_L''(z,\alpha,p) - \frac{\alpha}{r}J_1(\alpha r)Z_L(z,\alpha,p)\right]d\alpha,\\
(\overline{\sigma}_{rz})_L &= -2G\varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha^2 J_1(\alpha r)Z_L'(z,\alpha,p)\,d\alpha,\\
(\overline{\sigma}_{zz})_L &= 2G\varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha^3 J_1(\alpha r)Z_L(z,\alpha,p)\,d\alpha,\\
(\overline{\sigma}_{\varphi\varphi})_L &= -2G\varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha\left\{J_0(\alpha r)Z_L''(z,\alpha,p) - \alpha^2\left[J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right]Z_L(z,\alpha,p)\right\}d\alpha,\\
(\overline{\sigma}_{r\varphi})_L &= 0;
\end{aligned}\right. \tag{2.30}$$

gdzie

$$Z_L'(z,\alpha,p) = \frac{1}{p^2}\left[\sqrt{q^2+\alpha^2}\,\frac{\operatorname{sh}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{ch}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})} - \alpha\frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}\right],$$

$$Z_L''(z,\alpha,p) = \frac{1}{p^2}\left[(q^2+\alpha^2)\frac{\operatorname{ch}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{ch}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})} - \alpha^2\frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}\right].$$

Zgodnie ze wzorami (2.1) składowe przemieszczenia można napisać jak następuje:

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{u}_L &= -\varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha^2 J_1(\alpha r)Z_L(z,\alpha,p)\,d\alpha,\\
\overline{w}_L &= \varkappa\vartheta \int_0^\infty A(\alpha)\alpha J_0(\alpha r)Z_L'(z,\alpha,p)\,d\alpha.
\end{aligned}\right. \tag{2.31}$$

Stan naprężenia powinien spełniać na powierzchniach $z = \pm h$ warunki (2.6). Składowe naprężenia wyrażone wzorami (2.30) tych warunków nie spełniają. W celu ich spełnienia trzeba skorzystać z funkcji LOVE'A, określonej równaniem (2.7). Rozwiązanie tego równania przyjmiemy w postaci

$$\varphi_L(z, r, p) = \int_0^\infty M_L(z, \alpha, p) J_0(\alpha r)\, d\alpha, \tag{2.32}$$

gdzie

$$M_L(z, \alpha, p) = B_L \operatorname{sh}(\alpha z) + C_L \alpha z \operatorname{ch}(\alpha z).$$

Współczynniki B_L i C_L wyznaczamy z warunków brzegowych (2.6). Można je napisać, jak następuje:

$$\left\{\begin{aligned} B_L &= B_0 K_L(\alpha, p) = [(1-2\nu) - \alpha h \operatorname{tgh}(\alpha h)]\, C_0 K_L(\alpha, p), \\ C_L &= C_0 K_L(\alpha, p) = \frac{(1-2\nu)\varkappa\vartheta A(\alpha)}{\alpha\{\alpha h + [1 - h\alpha \operatorname{tgh}(\alpha h)] \operatorname{tgh}(\alpha h)\} \operatorname{ch}(\alpha h)} K_L(\alpha, p), \end{aligned}\right. \tag{2.33}$$

gdzie

$$K_L(\alpha, p) = \frac{1}{p^2}\left[\sqrt{q^2+\alpha^2} \operatorname{tgh}(h\sqrt{q^2+\alpha^2}) - \alpha \operatorname{tgh}(\alpha h)\right].$$

Z uwagi na transformację odwrotną stałe całkowania przedstawiliśmy w postaci iloczynu części zależnej jedynie od α i części zależnej od α i od parametru transformacji p. Podobnie zapiszemy funkcję $M_L(z, \alpha, p)$:

$$M_L(z, \alpha, p) = M_0(\alpha, z) K_L(\alpha, p). \tag{2.34}$$

Korzystając ze wzorów (2.8) wypiszemy składowe naprężenia określone funkcją LOVE'A φ_L:

$$\left\{\begin{aligned} (\bar{\bar{\sigma}}_{rr})_L &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \left\{\nu J_0(\alpha r) P_0(z) + \alpha^2 \left[J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] M_0'(z)\right\} K_L(\alpha, p)\, d\alpha, \\ (\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi})_L &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \left\{\nu J_0(\alpha r) P_0(z) + \frac{\alpha}{r} J_1(\alpha r) M_0'(z)\right\} K_L(\alpha, p)\, d\alpha, \\ (\bar{\bar{\sigma}}_{zz})_L &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \{(2-\nu) P_0(z) - M_0'''(z)\} J_0(\alpha r) K_L(\alpha, p)\, d\alpha, \\ (\bar{\bar{\sigma}}_{rz})_L &= \frac{-2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \{(1-\nu) Q_0(z) - M_0''(z)\}\, \alpha J_1(\alpha r) K_L(\alpha, p)\, d\alpha, \end{aligned}\right. \tag{2.35}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M_0'(z) &= (B_0 + C_0)\alpha \operatorname{ch}(\alpha z) + C_0 \alpha^2 z \operatorname{sh}(\alpha z), \\ M_0''(z) &= (B_0 + 2C_0)\alpha^2 \operatorname{sh}(\alpha z) + C_0 \alpha^3 z \operatorname{ch}(\alpha z), \\ M_0'''(z) &= (B_0 + 3C_0)\alpha^3 \operatorname{ch}(\alpha z) + C_0 \alpha^4 z \operatorname{sh}(\alpha z), \\ P_0(z) &= M_0'''(z) - \alpha^2 M_0'(z) = 2C_0 \alpha^3 \operatorname{ch}(\alpha z), \\ Q_0(z) &= M_0''(z) - \alpha^2 M_0(z) = 2C_0 \alpha^2 \operatorname{sh}(\alpha z). \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (2.9) składowe przemieszczenia wyrażona przez funkcję φ_L mają postać:

$$
(2.36)\qquad
\begin{cases}
\bar{\bar{u}}_L = \dfrac{1}{1-2\nu}\displaystyle\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) M_0(z) K_L(\alpha,p)\,d\alpha, \\[2ex]
\bar{\bar{w}}_L = \dfrac{1}{1-2\nu}\displaystyle\int_0^\infty \{2(1-\nu)Q_0(z) - M_0''(z)\} J_0(\alpha r) K_L(\alpha,p)\,d\alpha.
\end{cases}
$$

Odpowiednie dodanie wzorów (2.30) i (2.35) pozwala otrzymać poszukiwany stan naprężenia. Otrzymane wzory określają dopiero transformaty poszukiwanego rozwiązania. Aby otrzymać same wartości rzeczywiste, wystarczy wykonać transformację odwrotną. Podobnie jak poprzednio ograniczymy się do transformacji odwrotnej dla małych czasów. Stosując przekształcenia asymptotyczne jak poprzednio, otrzymujemy następujące wyniki dla transformacji odwrotnej:

$$
(2.36.1)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
& Z_L(z,\alpha,p) \approx \frac{1}{p^2}\left[e^{-(h-|z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}} - \right. \\
& \qquad \left. - \frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}\right] \doteqdot 2t\left[e^{-\alpha(h-|z|)}\, i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \right.\right. \\
& \qquad \left.\left. -\alpha\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha(h-|z|)} i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha\sqrt{\varkappa t}\right)\right] - t\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}, \\[2ex]
& Z_L'(z,\alpha,p) \approx \frac{1}{p^2}\left[\mathrm{sgn}(z)\sqrt{q^2+\alpha^2}\, e^{-(h-|z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}} - \right. \\
& \qquad \left. -\alpha\frac{\mathrm{sh}(\alpha z)}{\mathrm{sh}(\alpha h)}\right] \doteqdot -\alpha t\frac{\mathrm{sh}(\alpha z)}{\mathrm{sh}(\alpha h)} + \\
& \quad + \mathrm{sgn}(z)\frac{1}{2\varkappa\alpha}\left[e^{-\alpha(h-|z|)}\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - e\sqrt{\varkappa t}\right) - e^{\alpha(h-|z|)}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \right.\right. \\
& \qquad \left.\left. +\alpha\sqrt{\varkappa t}\right)\right] + \mathrm{sgn}(z)2\alpha t\left[e^{-\alpha(h-|z|)} i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \alpha\sqrt{\varkappa t}\right) - \right. \\
& \qquad \left. - e^{\alpha(h-|z|)}\, i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \alpha\sqrt{\varkappa t}\right)\right], \\[2ex]
& Z_L''(z,\alpha,p) \approx \frac{1}{p^2}\left[(q^2+\alpha^2)\, e^{-(h-|z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}} - \alpha^2\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}\right] \doteqdot -\alpha^2 t\,\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)} + \\
& \quad + 2\alpha^2 t\left[e^{-\alpha(h-|z|)}\, i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} - \alpha\sqrt{\varkappa t}\right) + e^{\alpha(h-|z|)}\, i^2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}} + \right.\right.
\end{aligned}
\right.
$$

$$+\alpha\sqrt{\varkappa t}\Big)\Big]+\frac{1}{2\varkappa}\Big[e^{-\alpha(h-|z|)}\operatorname{erfc}\Big(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha\sqrt{\varkappa t}\Big)+$$

$$+e^{\alpha(h-|z|)}\operatorname{erfc}\Big(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha\sqrt{\varkappa t}\Big)\Big],$$

$$K_L(\alpha,p)\approx\frac{1}{p^2}[\sqrt{q^2+\alpha^2}-\alpha\operatorname{tgh}(\alpha h)]\doteq\alpha t[\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{\varkappa t})-\operatorname{tgh}(\alpha h)]+$$

$$+\frac{1}{2\varkappa\alpha}[\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{\varkappa t})]+\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\,e^{-\varkappa\alpha^2 t}.$$

Przypadek 2b. Podobnie jak w przypadku 2a, aby otrzymać wzory na naprężenia i przemieszczenia, wystarczy w odpowiednich wzorach przypadku 1b zamiast $Z_L(z,\alpha,p)$ i jej pochodnych podstawić funkcję

$$S_L(z,\alpha,p)=\frac{t}{p^2}\left[\frac{\operatorname{sh}(z\sqrt{q^2+\alpha^2})}{\operatorname{sh}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}\right] \tag{2.37}$$

i odpowiednie jej pochodne.

W tych wzorach, które zależą od funkcji LOVE'A należy wykonać następujące podstawienia:

$$\begin{array}{ll}
\text{zamiast} & \text{powinno być}\\
\operatorname{sh}(\alpha z) & \operatorname{ch}(\alpha z),\\
\operatorname{ch}(\alpha z) & \operatorname{sh}(\alpha z),\\
\operatorname{tgh}(\alpha h) & \operatorname{ctgh}(\alpha h),\\
\operatorname{ch}(\alpha h) & \operatorname{sh}(\alpha h),\\
K_L(\alpha,p) & O_L(\alpha,p)=\frac{1}{p^2}\sqrt{q^2+\alpha^2}\operatorname{ctgh}(h\sqrt{q^2+\alpha^2})-\alpha\operatorname{ctgh}(\alpha h)].
\end{array} \tag{2.38}$$

Po wykonaniu powyższych podstawień wystarcza wykonać jedynie transformację odwrotną. Podobnie jak poprzednio ograniczymy się tylko do małych czasów i transformaty odwrotne będą się wyrażać następującymi wzorami:

$$S_L(z,\alpha,p)\approx\frac{1}{p^2}\left[\operatorname{sgn}(z)e^{-(h-|z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}}-\frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}\right]\doteq-t\frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}+$$

$$+\operatorname{sgn}(z)2t\Big[e^{-\alpha(h-|z|)}i^2\operatorname{erfc}\Big(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha\sqrt{\varkappa t}\Big)+$$

$$+e^{\alpha(h-|z|)}i^2\operatorname{erfc}\Big(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha\sqrt{\varkappa t}\Big)\Big],$$

$$S_L'(z,\alpha,p)\approx\frac{1}{p^2}\left[\sqrt{q^2+\alpha^2}\,e^{-(h-|z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}}-\alpha\frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}\right]\doteq-\alpha t\frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}+$$

$$+2\varkappa\alpha\Big[e^{-\alpha(h-|z|)}\operatorname{erfc}\Big(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha\sqrt{\varkappa t}\Big)+e^{\alpha(h-|z|)}\operatorname{erfc}\Big(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+$$

$$
(2.39)\left\{
\begin{aligned}
&+\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)\bigg]+2\alpha t\bigg[e^{-\alpha(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\bigg(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)+\\
&\qquad+e^{\alpha(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\bigg(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)\bigg],\\
&S_L''(z,\alpha,p)\approx\frac{1}{p^2}\bigg[\operatorname{sgn}(z)\,(q^2+\alpha^2)e^{-(h-|z|)\sqrt{q^2+\alpha^2}}-\alpha^2\frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}\bigg]\fallingdotseq\\
&\fallingdotseq-\alpha^2 t\frac{\operatorname{sh}(\alpha z)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}+\operatorname{sgn}(z)2\alpha^2 t\bigg[e^{-\alpha(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\bigg(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)+\\
&\qquad+e^{\alpha(h-|z|)}\, i^2\operatorname{erfc}\bigg(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)\bigg]+\\
&\qquad+\frac{\operatorname{sgn}(z)}{2\varkappa}\bigg[e^{-\alpha(h-|z|)}\operatorname{erfc}\bigg(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}-\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)+\\
&\qquad+e^{\alpha(h-|z|)}\operatorname{erfc}\bigg(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\varkappa t}}+\alpha\sqrt{\varkappa t}\bigg)\bigg],\\
&O_L(\alpha,p)\approx\frac{1}{p^2}\big[\sqrt{q^2+\alpha^2}-\alpha\operatorname{ctgh}(\alpha h)\big]\fallingdotseq\alpha t\big[\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{\varkappa t})-\operatorname{ctgh}(\alpha h)\big]+\\
&\qquad+\frac{1}{2\varkappa\alpha}\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{\varkappa t})+\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\,e^{-\varkappa\alpha^2 t}.
\end{aligned}\right.
$$

Przypadek 3b. Podobnie jak w przypadku 3a poszukiwane wzory na naprężenia i przemieszczenia są superpozycją wzorów obu poprzednich przypadków. Sposób postępowania przy otrzymywaniu tych wzorów jest taki sam jak w przypadku 3a.

Literatura cytowana w tekście

[1] S. Goldstein, Proc. London Math. Soc., seria 2, Vol. 34, 1939.

[2] J.N. Goodier, *On the integration of the Thermo-Elastic Equations*, Phil. Mag., Vol. 23, 157, 1937.

[3] M.T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, PWN Warszawa 1955.

[4] A. Nádai, *Elastische Platten*, Berlin 1925.

[5] E. Melan, H. Parkus, *Wärmespannungen*, Wiedeń 1953.

[6] A. Timpe, *Achsensymetrische Deformation von Umdrehungskörpern*, ZAMM, 1924.

[7] W. Derski, *Stan naprężenia i przemieszczenia w grubej płycie kołowej wywołany działaniem nieustalonego pola temperatury*, Rozpr. Inżyn. 2, **7** (1959).

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТОЛСТОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКЕ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Настоящая публикация является продолжением работы [7], которая была печатана под тем самым названием. В вышеприведенной работе даются решения, представленные с помощью суммы одинарных и двойных рядов.

Эти последние в случае малых значений времени являются медленно сходящимися. Однако таких случаев нагрева, которые рассматриваются в настоящей работе, специально интересными являются именно первые секунды действия источника тепла. Вместе с истечением времени напряжения уменьшаются и стремятся к стационарному напряжению. В первых секундах процесса нагрева наибольшие напряжения должны выступить в поверхностных слоях.

В настоящей работе приводятся асимптотические формулы, которые, с практической точностью, позволяют описать процесс изменений напряжения в поверхностных слоях в первых секундах процесса нагрева.

Следует добавить, что все механические условия являются такими же самыми, как в работе [7].

Summary

THE STATE OF STRESS AND DISPLACEMENT IN A THICK CIRCULAR PLATE, DUE TO THE ACTION OF A NON-STEADY-STATE TEMPERATURE FIELD

This is a continuation of the paper [7]. The solutions obtained in that paper are represented by sums of simple and double series, which are of slow convergence in the case of small times. However, in such cases of heating as are considered in the paper mentioned the first seconds of action of the heat source are of particular interest. With increasing time the stresses decrease and tend to the steady-state values. In the first seconds of the heating process the maximum stress should arise, in view of the temperature gradient, in outer strata.

In the present paper asymptotic equations are given enabling, with practically sufficient accuracy, the description of the variability of stress in outer strata in the first seconds of the heating process.

It should be added that all the mechanical conditions are the same as in the first part of the work.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1960 r.