

**KRZYSZTOF WILMAŃSKI**

**NAPRĘŻENIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE W PIERŚCIENIU WYWOŁANE  
DZIAŁANIEM PEWNEGO POLA TEMPERATURY**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXLII**

**TOM X • ZESZYT 4 • ROK 1962**

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp	715
2. Początek uplastycznienia pierścienia	716
2.1. Rozkład temperatur	716
2.2. Naprężenia	717
3. Wewnętrzna strefa pracy plastycznej pierścienia	720
4. Powstanie zewnętrznej strefy uplastycznienia. Praca pierścienia, gdy istnieją dwie strefy plastyczne	723
4.1. Początek uplastycznienia na powierzchni zewnętrznej	723
4.2. Naprężenia w pierścieniu, gdy istnieją dwie strefy plastyczne. Zasięg stref uplastycznienia	724

## 1. Wstęp

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $a$  promień wewnętrzny pierścienia,
- $b$  promień zewnętrzny pierścienia,
- $\xi$  zasięg wewnętrznej strefy plastycznej,
- $\eta$  zasięg zewnętrznej strefy plastycznej,
- $r$  współrzędna biegunowa,
- $\delta$  grubość pierścienia,
- $E$  moduł sprężystości,
- $\nu$  współczynnik Poissona,
- $\alpha_T$  współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej,
- $\kappa$  współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- $h$  współczynnik wymiany ciepła z otoczeniem pierścienia,
- $I_0$  zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu,
- $K_0$  zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju (funkcja McDonalda zerowego rzędu),
- $I_1$  zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju pierwszego rzędu,
- $K_1$  zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju (funkcja McDonalda pierwszego rzędu),
- $\sigma_{rr}^s$  naprężenia promieniowe w strefie sprężystej,
- $\sigma_{rr}^p$  naprężenia promieniowe w strefie plastycznej,
- $\bar{\sigma}_{rr}^s$  naprężenia promieniowe w strefie sprężystej, obliczone z całkowania równania Poissona,
- $\bar{\bar{\sigma}}_{rr}^s$  naprężenia promieniowe w strefie sprężystej (rozwiązanie zagadnienia Lamégo),
- $\sigma_{\varphi\varphi}^s$  naprężenia obwodowe w strefie sprężystej,
- $\sigma_{\varphi\varphi}^p$  naprężenia obwodowe w strefie plastycznej,
- $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s$  naprężenia obwodowe w strefie sprężystej, obliczone z całkowania równania Poissona,
- $\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}^s$  naprężenia obwodowe w strefie sprężystej (rozwiązanie zagadnienia Lamégo),
- $\sigma_s$  granica plastyczności materiału.

Zajmiemy się wyznaczeniem naprężeń sprężysto-plastycznych w cienkim pierścieniu o promieniu wewnętrznym  $a$  i zewnętrznym  $b$ , które powstają pod wpływem działania stacjonarnego pola temperatury. Pole powstaje w ten sposób, że na powierzchniach  $a$  i  $b$  pierścienia jest utrzymywana stała temperatura, odpowiednio  $T_a$  i  $T_b$  oraz może zachodzić wymiana ciepła z otoczeniem na powierzchniach  $\pm \delta/2$ , gdzie  $\delta$  oznacza grubość pierścienia. Odbieranie ciepła jest scharakteryzowane przez współczynnik  $h$ , o którym zakładamy, że nie zależy od temperatury. Jest on funkcją tzw. współczynników napływu i odpływu, które określają warunki napływu ciepła do powierzchni w pierścieniu i odbieranie ciepła przez otoczenie. Współczynniki te trzeba określać każdorazowo w zależności od istniejących warunków, np. ruchu powietrza, wilgotności, chropowatości powierzchni pierścienia itp.

Przyjmujemy także, że od temperatury nie zależą: moduł sprężystości  $E$ , współczynnik Poissona  $\nu$ , współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej  $\alpha_T$ . Materiał, z którego wykonany jest pierścień, jest izotropowy. Jego praca charakteryzuje się tym, że do momentu uplastycznienia pracuje sprężysto. Jednocześnie zakładamy, że jego własności są takie same przy ściskaniu, jak i przy rozciąganiu. W punkcie, który osiągnął uplastycznienie, odkształcenia rosną teoretycznie do nieskończoności. A więc praca materiału jest charakteryzowana przez model Saint-Venanta.

Przyjęcie, że współczynniki charakteryzujące materiał nie zależą od temperatury, nie jest, oczywiście, ściśle. Dlatego podane w poniższej pracy rozwiązania można przyjąć za dostatecznie dokładne dla niezbyt wysokich temperatur (do 350°C dla stali budowlanych) oraz jako pierwsze przybliżenie dla rozwiązań dokładniejszych, odnoszących się do wysokich temperatur.

Udowodnimy, że uplastycznienie najpierw nastąpi na powierzchni wewnętrznej, a później na zewnętrznej. W zależności od wielkości współczynnika  $E\alpha_T |\Delta T|/\sigma_s$  pierścień pracuje sprężysto, istnieje wewnętrzna strefa uplastycznienia lub dwie strefy plastyczne: wewnętrzną i zewnętrzną. Wyprowadzimy wzory na zasięg stref uplastycznienia.

## 2. Początek uplastycznienia pierścienia

**2.1. Rozkład temperatur.** Rozkład temperatur w cienkim pierścieniu o grubości  $\delta$ , wewnętrznym promieniu  $a$  i zewnętrznym promieniu  $b$ , ogrzany do temperatury  $T_a$  na powierzchni  $r = a$  i do temperatury  $T_b$  na powierzchni  $r = b$  jest określony przez równanie przewodnictwa. W naszym przypadku, ponieważ pole temperatury jest stacjonarne, nie ma wewnętrznych źródeł ciepła i zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem na powierzchniach  $\pm \delta/2$ , równanie to ma postać

$$(2.1) \quad \nabla^2 T - hT = 0,$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

Rozwiązanie tego równania, jak wiadomo, ma postać

$$(2.2) \quad T(r) = \frac{A_1}{B^a} I_0(mr) + \frac{A_2}{B^a} K_0(mr),$$

gdzie  $A_1/B^a$  i  $A_2/B^a$  są to stałe, które wyznaczamy z warunków brzegowych oraz  $m = \sqrt{h/\kappa}$ .

Po wykorzystaniu warunków brzegowych otrzymujemy dla stałych następujące wartości:

$$(2.3) \quad A_1 = -\Delta T K_0(mb), \quad A_2 = \Delta T I_0(mb)$$

oraz  $B_a = K_0(ma) I_0(mb) - K_0(mb) I_0(ma)$ . W tych wzorach  $\Delta T = T_a - T_b$ .

**2.2. Naprężenia.** Jak wiadomo, naprężenia w przypadku sprężystej pracy materiału, z którego wykonany jest pierścień, wyrażają się wzorami (por. np. W. DERSKI, [3]):

$$(2.4) \quad \sigma_{rr}^s = \frac{E a_r \Delta T}{B^a} \left\{ \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] \frac{a_1^2/r_1^2}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left( C^a - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left( \frac{a_1^2}{b_1^2} C^a - \frac{1}{b_1^2} \right) \right\};$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^s = \frac{E a_r \Delta T}{B^a} \left\{ [K_0(b_1) I_0(r_1) - I_0(b_1) K_0(r_1)] - \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + \frac{a_1^2/r_1^2}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left( C^a - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left( \frac{a_1^2}{b_1^2} C^a - \frac{1}{b_1^2} \right) \right\},$$

gdzie

$$a_1 = ma, \quad b_1 = mb, \quad r_1 = mr,$$

$$C^a = K_0(b_1) \frac{I_1(a_1)}{a_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(a_1)}{a_1} \dots$$

Pozostałe oznaczenia, jak poprzednio.

Gdy różnica temperatur jest dostatecznie duża, to naprężenia w pewnym miejscu osiągną wartość, przy której nastąpi uplastycznienie materiału. Jak wiadomo, hipoteza Treski przewiduje uplastycznienie, gdy maksimum jednej z różnic

$$(2.5) \quad |\sigma_{rr}^s - \sigma_{\varphi\varphi}^s|, \quad |\sigma_{rr}^s - \sigma_{zz}^s|, \quad |\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{zz}^s|$$

jest równe  $\sigma_s$ .

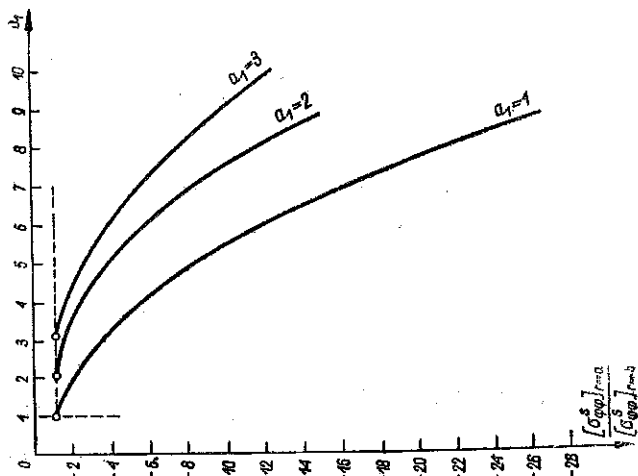
Ponieważ  $\sigma_{zz}^s = 0$ , więc druga i trzecia różnica naprężeń głównych we wzorze (2.5) są określone przez wzory (2.4). Natomiast pierwsza różnica ma postać

$$(2.6) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s = -\frac{E\alpha_T \Delta T}{B^a} \left\{ [I_0(b_1) K_0(r_1) - K_0(b_1) I_0(r_1)] + \right. \\ \left. + 2 \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] - \frac{2a_1^2/r_1^2}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left( C^a - \frac{1}{b_1^2} \right) \right\}.$$

Można łatwo wykazać, że  $\sigma_{\varphi\varphi}^s$  i  $\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s$  są funkcjami monotonicznymi i dlatego osiągają maksimum dla  $r = a$  lub  $r = b$ . A mianowicie

$$|\sigma_{\varphi\varphi}^s|_{r=a} = |\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s|_{r=a}, \quad |\sigma_{\varphi\varphi}^s| = |\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s|_{r=b},$$

ponieważ  $[\sigma_{rr}^s]_{r=a, b} = 0$ .



Rys. 1

Jednocześnie można udowodnić, że stosunek

$$(2.7) \quad \frac{[\sigma_{\varphi\varphi}^s]_{r=a}}{[\sigma_{\varphi\varphi}^s]_{r=b}} = \frac{B^a [1 - (a_1^2/b_1^2)]}{\frac{2}{b_1^2} - 2 \frac{a_1^2}{b_1^2} C^a} + 1$$

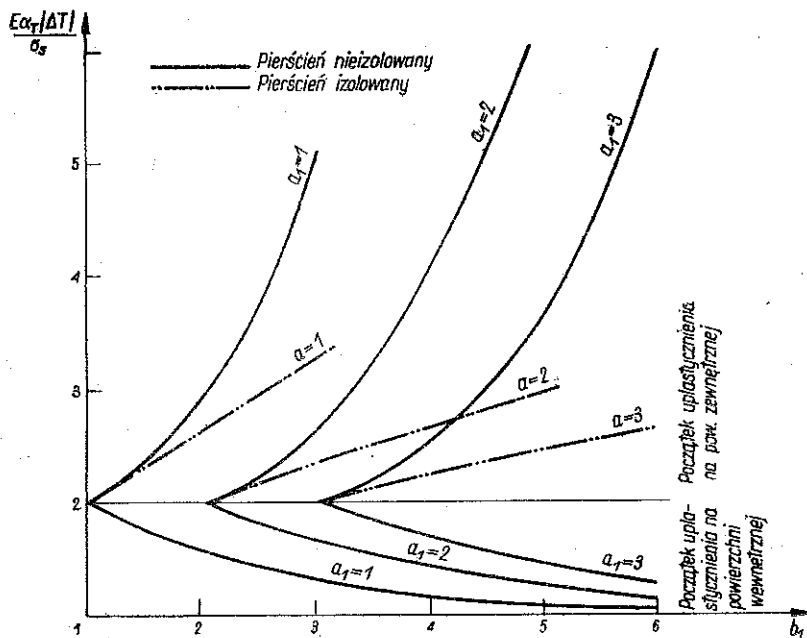
ma granicę dla  $b \rightarrow a$  i wynosi ona  $-1$  oraz ma granicę niewłaściwą równą  $-\infty$  dla  $b \rightarrow \infty$ . A więc obie wymienione funkcje są monotoniczne.

Natomiast trzecia różnica naprężeń głównych,  $\sigma_{rr}^s$ , osiąga maksimum w punkcie określonym przez równanie:

$$(2.8) \quad 2 \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + \left[ I_0(b_1) K_0(r_1) - K_0(b_1) I_0(r_1) - \right. \\ \left. - \frac{2a_1^2/r_1^2}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left( C^a - \frac{1}{b_1^2} \right) \right] = 0.$$

W punktach  $r = a$  i  $r = b$   $\sigma_{rr}^s$  jest równe zero, a więc wartość maksymalną musi osiągać, gdy  $a < r < b$ . Jak łatwo sprawdzić, w punkcie określonym przez równanie (2.8) zachodzi zależność  $\sigma_{rr}^s = \sigma_{\varphi\varphi}^s$ . Ponieważ  $\sigma_{\varphi\varphi}^s$  przyjmuje wartość maksymalną dla  $r = a$ , więc zawsze  $\max |\sigma_{rr}^s| < \max |\sigma_{\varphi\varphi}^s|$ .

A więc o początku uplastycznienia decyduje różnica naprężeń głównych  $|\sigma_{\varphi\varphi}^s|$  i rozpoczyna się ono na powierzchni  $r = a$ , bo tam osiąga ona wartość maksymalną. Dowód ten jest oczywiście słuszny bez względu na to, czy różnica temperatur  $\Delta T$  jest dodatnia czy ujemna.



Rys. 2

Jeśli wykorzystać teraz warunek na początek uplastycznienia Treski, mianowicie

$$(2.9) \quad [\sigma_{\varphi\varphi}^s]_{r=a} = -\beta\sigma_s,$$

gdzie

$$\beta = \begin{cases} -1, & \text{jeśli } \Delta T < 0; \\ 1, & \text{jeśli } \Delta T \geq 0, \end{cases}$$

to otrzymamy następującą zależność, określającą początek uplastycznienia:

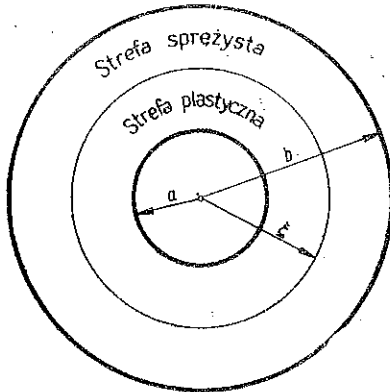
$$(2.10) \quad \frac{E\alpha_T|\Delta T|}{\sigma_s} = \frac{B^a [1 - (a_1^2/b_1^2)]}{B^a \left(1 - \frac{a_1^2}{b_1^2}\right) + \frac{2}{b_1^2} - 2\frac{a_1^2}{b_1^2} C^a}$$

### 3. Wewnętrzna strefa pracy plastycznej pierścienia

Gdy różnica temperatur  $\Delta T$  jest większa dla danego pierścienia niż określona przez zależność (2.10), to powstaje wewnętrzna strefa plastyczna o zasięgu  $r = \xi$  (rys. 3).

Naprężenia w strefie plastycznej pracy materiału wyznaczymy z równania równowagi, znanego z teorii sprężystości, [5]:

$$(3.1) \quad r \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}^p}{dr} = \sigma_{\varphi\varphi}^p - \sigma_{rr}^p$$



Rys. 3

Po wykorzystaniu związku (2.9) otrzymujemy następujące wzory na naprężenia dla  $a \leq r \leq \xi$ :

$$(3.2) \quad \sigma_{rr}^p = -\beta\sigma_s \left(1 - \frac{a_1}{r_1}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^p = -\beta\sigma_s$$

Naprężenia w strefie sprężystej będą miały teraz postać, [5]:

$$(3.3) \quad \sigma_{rr}^s = \bar{\sigma}_{rr}^s + \bar{\sigma}_{rr}^s = \bar{\sigma}_{rr}^s - \frac{a_1^2/r_1^2}{1-(a_1^2/b_1^2)} [p_\xi - \bar{\sigma}_{rr}^s(b_1)] + \frac{1}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left[ \frac{a_1^2}{b_1^2} p_\xi - \bar{\sigma}_{rr}^s(b_1) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^s = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s + \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s + \frac{a_1^2/r_1^2}{1-(a_1^2/b_1^2)} [p_\xi - \bar{\sigma}_{rr}^s(b_1)] + \frac{1}{1-(a_1^2/b_1^2)} \left[ \frac{a_1^2}{b_1^2} p_\xi - \bar{\sigma}_{rr}^s(b_1) \right],$$

gdzie

$$\bar{\sigma}_{rr}^s = \frac{E\alpha_T \Delta T}{B^a} \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s = \frac{E\alpha_T \Delta T}{B^a} \left\{ [K_0(b_1) I_0(r_1) - I_0(b_1) K_0(r_1)] - \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] \right\}$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^s(b_1) = [\bar{\sigma}_{rr}^s]_{r=b_1}$$

przy czym  $p_\xi$  oznacza stałą, którą wyznaczamy z warunku brzegowego.

Gdy istnieje wewnętrzna strefa plastyczna, muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$(3.4.1) \quad [\sigma_{rr}^s]_{r=b} = 0;$$



gdź nie ma obciążeń zewnętrznych; warunek ciągłości funkcji  $\sigma_{rr}$

$$(3.4.2) \quad [\sigma_{rr}^s]_{r=\xi+0} = [\sigma_{rr}^p]_{r=\xi-0}$$

oraz warunek ciągłości pochodnej funkcji  $\sigma_{rr}$

$$(3.4.3) \quad \left[ \frac{d\sigma_{rr}^s}{dr} \right]_{r=\xi+0} = \left[ \frac{d\sigma_{rr}^p}{dr} \right]_{r=\xi-0}$$

Jak łatwo sprawdzić, warunek (3.4.1) jest spełniony tożsamościowo. Z warunków (3.4.2) i (3.4.3) określamy stałą  $p_\xi$  i równanie opisujące zasięg wewnętrznej strefy plastycznej. Po wykonaniu działań otrzymujemy

$$(3.5) \quad \frac{E a_T |\Delta T|}{\sigma_s} = \frac{B a \left[ 2 - \frac{a_1}{\xi_1} \left( 1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right) \right]}{B^\xi \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right) + \frac{2}{b_1^2} - 2 \frac{\xi_1^2}{b_1^2} C^\xi + \frac{2}{b_1^2}}$$

oraz

$$\frac{\sigma_{rr}^s}{\beta \sigma_s} = \frac{\left[ 2 - \frac{a_1}{\xi_1} \left( 1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right) \right]}{B^\xi \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right) + \frac{2}{b_1^2} - 2 \frac{\xi_1^2}{b_1^2} C^\xi} \left\{ \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{a_1^2}{r_1^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}}{\xi_1^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2}} C^\xi + \frac{\frac{a_1^2}{r_1^2} - \frac{a_1^2}{\xi_1^2} - 1}{\xi_1^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2}} \right\} - \frac{\frac{a_1^2}{r_1^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}}{\xi_1^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2}} \left( 1 - \frac{a_1}{\xi_1} \right),$$

$$(3.6) \quad \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s}{\beta \sigma_s} = \frac{\left[ 2 - \frac{a_1}{\xi_1} \left( 1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right) \right]}{B^\xi \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right) + \frac{2}{b_1^2} - 2 \frac{\xi_1^2}{b_1^2} C^\xi} \left\{ [K_0(b_1) I_0(r_1) - I_0(b_1) K_0(r_1)] - \right.$$

$$\left. - \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + \frac{\frac{a_1^2}{r_1^2} + \frac{a_1^2}{b_1^2}}{\xi_1^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2}} C^\xi - \frac{\frac{a_1^2}{r_1^2} + \frac{a_1^2}{\xi_1^2} - 1}{\xi_1^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2}} \right\} +$$

$$\frac{\frac{a_1^2}{r_1^2} + \frac{a_1^2}{b_1^2}}{\xi_1^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2}} \left( 1 - \frac{a_1}{\xi_1} \right),$$

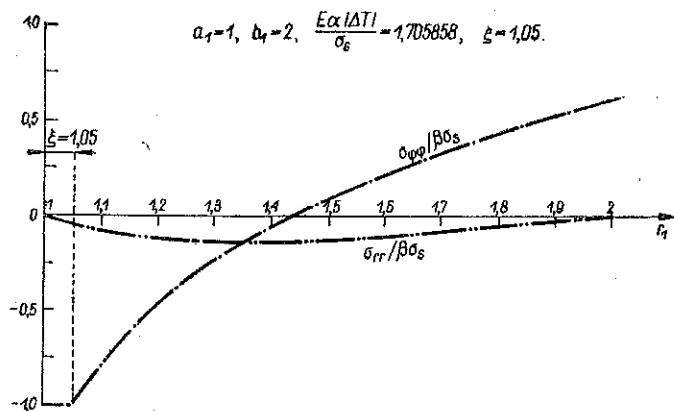
gdzie

$$B^{\xi} = K_0(\xi_1) I_0(b_1) - K_0(b_1) I_0(\xi_1),$$

$$C^{\xi} = K_0(b_1) \frac{I_1(\xi_1)}{\xi_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(\xi_1)}{\xi_1},$$

$$\xi_1 = m\xi.$$

Pozostałe oznaczenia zostały podane poprzednio.



Rys. 4

Jeśli w tych wzorach wykonać przejście graniczne  $m \rightarrow 0$ , to otrzymamy wzory podane przez WILHOITA, [12]:

$$\frac{E\alpha_T |\Delta T|}{\sigma_s} = \frac{\left[ 2 - \frac{a}{\xi} \left( 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right] \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a} - \ln \frac{\xi}{a} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi^2}{b^2} \right)},$$

$$(3.6.1) \quad \frac{\sigma_{rr}^s}{\beta\sigma_s} = \left[ 1 - \frac{a}{2\xi} \left( 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right] \frac{\left[ \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi^2}{r^2} \right) \right]}{\left[ \ln \frac{b}{\xi} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right]} - \left[ 1 - \frac{a}{2\xi} \left( 1 - \frac{\xi^2}{r^2} \right) \right],$$

$$\frac{\sigma_{\phi\phi}^s}{\beta\sigma_s} = \left[ 1 - \frac{a}{2\xi} \left( 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right] \frac{\left[ \ln \frac{r}{\xi} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi^2}{r^2} \right) \right]}{\left[ \ln \frac{b}{\xi} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right]} - \left[ 1 - \frac{a}{2\xi} \left( 1 - \frac{\xi^2}{r^2} \right) \right].$$

Wykresy naprężeń w pierścieniu, gdy istnieje wewnętrzna strefa uplastycznienia\* podano na rys. 4 dla przykładowych wartości współczynnika  $m$ , promieni  $a$  i  $b$ , i współczynnika  $E\alpha_T |\Delta T|/\sigma_s$ .

4. Powstanie zewnętrznej strefy uplastycznienia. Praca pierścienia, gdy istnieją dwie strefy plastyczne

4.1. Początek uplastycznienia na powierzchni zewnętrznej. Gdy istnieje już wewnętrzna strefa plastyczna, o powstaniu której zdecydowała różnica naprężeń głównych  $\sigma_{\varphi\varphi}^s$ , dla pewnej różnicy temperatur  $\Delta T$  wartość  $\sigma_s$  osiąga różnica  $\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s$ . Różnice naprężeń głównych są teraz dane za pomocą wzorów (3.6) i przez związek

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s}{\beta\sigma_s} = \frac{\left[2 - \frac{a_1}{\xi_1} \left(1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2}\right)\right]}{B^\xi \left(1 - \frac{\xi_1^2}{b_1^2}\right) + \frac{2}{b_1^2} - 2 \frac{\xi_1^2}{b_1^2} C^\xi} \left\{ [K_0(b_1) I_0(r_1) - K_0(r_1) I_0(b_1)] - \right.$$

$$\left. - 2 \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + 2 \frac{a_1^2/r_1^2}{\xi_1^2 - b_1^2} \left[ C^\xi - \frac{1}{b_1^2} \right] \right\} + 2 \frac{a_1^2/r_1^2}{\xi_1^2 - b_1^2} \left(1 - \frac{a_1}{\xi_1}\right).$$

Jak łatwo wykazać, powyższa funkcja jest monotoniczna i osiąga wartości ekstremalne dla  $r = \xi$  i  $r = b$ . Natomiast  $\sigma_{rr}^s$  osiąga maksimum, gdy

$$\frac{\left[2 - \frac{a_1}{\xi_1} \left(1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2}\right)\right]}{B^\xi \left(1 - \frac{\xi_1^2}{b_1^2}\right) + \frac{2}{b_1^2} - 2 \frac{\xi_1^2}{b_1^2} C^\xi} \left\{ [K_0(b_1) I_0(r_1) - I_0(b_1) K_0(r_1)] - \right.$$

$$\left. - 2 \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + \frac{2a_1^2/r_1^2}{\xi_1^2 - b_1^2} \left( C^\xi - \frac{1}{b_1^2} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{2a_1^2/r_1^2}{\xi_1^2 - b_1^2} \left(1 - \frac{a_1}{\xi_1}\right) = 0.$$

Jednak w punkcie określonym przez to równanie  $\sigma_{rr}^s = \sigma_{\varphi\varphi}^s$ . Ponieważ  $\sigma_{\varphi\varphi}^s$  jest funkcją monotoniczną, przeto w tym punkcie przybiera wartość pośrednią między swoją wartością największą i najmniejszą. Stąd wniosek, że o uplastycznieniu decydują albo naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi}^s$  albo  $\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s$ . Ponieważ w płaszczyźnie  $r = \xi$  uplastycznienie już nastąpiło, więc warunki plastyczności dla dostatecznie dużej różnicy temperatur mogą być spełnione tylko w płaszczyźnie  $r = b$ , gdzie

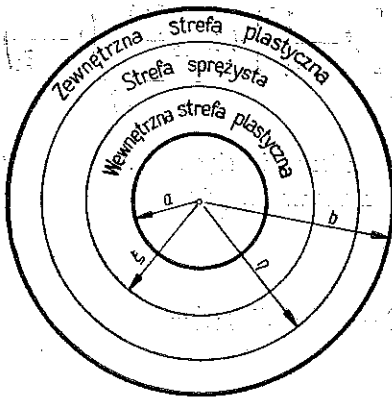
$$[\sigma_{\varphi\varphi}^s]_{r=b} = [\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s]_{r=b}.$$

A więc rzeczywiście druga strefa uplastycznienia rozpoczyna się od powierzchni zewnętrznej. Ustalimy teraz dla jakiej wartości  $Ea_T |\Delta T|/o_s$  rozpocznie się uplastycz-

nienie w drugiej strefie. W przypadku istnienia dwóch stref plastycznych naprężenia mamy określone wzorami:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}^s &= \bar{\sigma}_{rr}^s - \frac{(a_1^2/r_1^2) - (a_1^2/b_1^2)}{1 - (a_1^2/b_1^2)} p_\xi^0 - \frac{1 - (a_1^2/r_1^2)}{1 - (a_1^2/b_1^2)} p_\eta^0, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s + \frac{(a_1^2/r_1^2) + (a_1^2/b_1^2)}{1 - (a_1^2/b_1^2)} p_\xi^0 - \frac{1 + (a_1^2/r_1^2)}{1 - (a_1^2/b_1^2)} p_\eta^0, \end{aligned}$$

gdzie  $p_\xi^0 = \sigma_{rr}^s(\xi)$ ,  $p_\eta^0 = \sigma_{rr}^s(\eta)$ . We wzorach tych  $\eta$  określa zasięg strefy plastycznej zewnętrznej (rys. 5). Warunki brzegowe w płaszczyźnie  $r = \xi$  pozostają takie same, jak podane w p. 3. Dochodzi do nich warunek na uplastycznienie w płaszczyźnie  $r = b$



Rys. 5

$$(4.2) \quad [\sigma_{\varphi\varphi}^s]_{r=b} = [\sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s]_{r=b} = \beta \sigma_s.$$

Po wykorzystaniu tych trzech warunków, wyznaczeniu  $p_\xi^0$  i  $p_\eta^0$  dochodzimy do następującej zależności określającej początek uplastycznienia na powierzchni zewnętrznej (rys. 2):

$$(4.3) \quad \frac{E a_T |\Delta T|}{\sigma_s} = \frac{B a \left( 1 + \frac{a_1}{\xi_1} \frac{\xi_1^2}{b_1^2} \right)}{\frac{\xi_1^2}{b_1^2} (B \xi + 2C \xi) - \frac{2}{b_1^2}}.$$

Jeśli teraz wykorzystamy związek (3.5), to otrzymamy zależność opisującą, przy jakim zasięgu wewnętrznej strefy plastycznej rozpocznie się dla danego pierścienia uplastycznienie na powierzchni zewnętrznej:

$$(4.4) \quad \left( 3 - \frac{a_1}{\xi_1} \right) \left( C \xi - \frac{1}{\xi_1^2} \right) + \frac{B \xi}{2} \left( 3 - 2 \frac{a_1}{\xi_1} - \frac{b_1^2}{\xi_1^2} \right) = 0.$$

**4.2. Naprężenia w pierścieniu, gdy istnieją dwie strefy plastyczne. Zasięg stref uplastycznienia.** Ponieważ warunki brzegowe w płaszczyznach  $r = a$  i  $r = \xi$  nie ulegają zmianie, gdy powstaje zewnętrzna strefa uplastycznienia, to naprężenia w wewnętrznej strefie plastycznej są określone wzorami (3.2). Trzeba określić wzory na naprężenia, gdy  $\xi \leq r \leq \eta$ , tzn. w strefie sprężystej i w zewnętrznej strefie plastycznej. Te ostatnie określamy z równania równowagi, cytowanego poprzednio (3.1) i z warunku uplastycznienia Treski:

$$(4.5) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^s - \sigma_{rr}^s = \sigma_{\varphi\varphi}^p - \sigma_{rr}^p = \beta \sigma_s.$$

Po wykorzystaniu warunku brzegowego  $[\sigma_{rr}^p]_{r=b} = 0$ , otrzymujemy

$$(4.6) \quad \sigma_{rr}^p = \beta \sigma_s \ln \frac{r}{b}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^p = \beta \sigma_s \left( 1 + \ln \frac{r}{b} \right).$$

Natomiast z warunków ciągłości, które mają postać:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} [\sigma_{rr}^s]_{r=\xi+0} &= [\sigma_{rr}^p]_{r=\xi-0}, \\ [\sigma_{rr}^s]_{r=\eta-0} &= [\sigma_{rr}^p]_{r=\eta+0}, \\ \left[ \frac{d\sigma_{rr}^s}{dr} \right]_{r=\xi+0} &= \left[ \frac{d\sigma_{rr}^p}{dr} \right]_{r=\xi-0}, \\ \left[ \frac{d\sigma_{rr}^s}{dr} \right]_{r=\eta-0} &= \left[ \frac{d\sigma_{rr}^p}{dr} \right]_{r=\eta+0} \end{aligned}$$

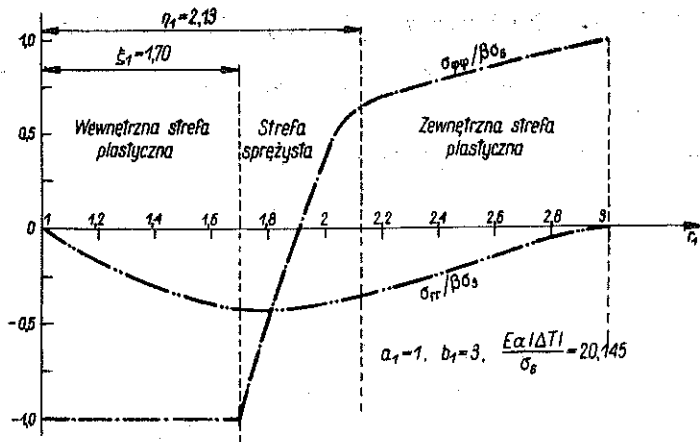
wyznamy naprężenia w strefie sprężystej uwzględniając je w (4.1) oraz dwa równania określające zasięgi stref plastycznych  $\xi$  i  $\eta$ . Po przekształceniach otrzymujemy

$$(4.8) \quad \frac{E a_T |\Delta T|}{\sigma_s} = \frac{\left( 1 + \frac{a_1}{\xi_1} \frac{\xi_1^2}{\eta_1^2} \right) B^a}{\left( \frac{\xi_1^2}{\eta_1^2} B^\xi - B^\eta \right) + 2 \left( \frac{\xi_1^2}{\eta_1^2} C^\xi - C^\eta \right)},$$

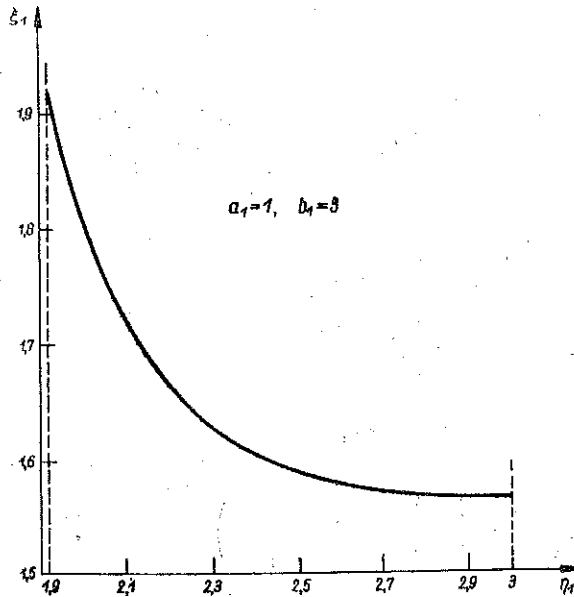
$$(4.9) \quad \frac{\left( \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} + \frac{a_1}{\xi_1} \right) (B^\xi - B^\eta)}{2 \left( C^\xi - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} C^\eta \right) + \left( B^\xi - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} B^\eta \right)} - 2 \ln \frac{\eta}{\xi} = 3 + 2 \ln \frac{\xi_1}{b_1} - \frac{a_1}{\xi_1},$$

$$(4.10) \quad \frac{\sigma_{rr}^s}{\beta \sigma_s} = \frac{\left( \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} + \frac{a_1}{\xi_1} \right)}{2 \left( C^\xi - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} C^\eta \right) + \left( B^\xi - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} B^\eta \right)} \left\{ \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B^\xi \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{r_1^2} \right) - \frac{\xi_1^2}{r_1^2} C^\xi \right\} - \left[ 1 - \frac{a_1}{2\xi_1} \left( 1 + \frac{\xi_1^2}{r_1^2} \right) \right],$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s}{\beta \sigma_s} = \frac{\left( \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} + \frac{a_1}{\xi_1} \right)}{2 \left( C^\xi - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} C^\eta \right) + \left( B^\xi - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} B^\eta \right) \eta} \left\{ [K_0(b_1) I_0(r_1) - K_0(r_1) I_0(b_1)] - \right. \\ \left. - \left[ K_0(b_1) \frac{I_1(r_1)}{r_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(r_1)}{r_1} \right] + \frac{1}{2} B^\xi \left( 1 + \frac{\xi_1^2}{r_1^2} \right) + \frac{\xi_1^2}{r_1^2} C^\xi \right\} - \left[ 1 - \frac{a_1}{2\xi_1} \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{r_1^2} \right) \right],$$



Rys. 6



Rys. 7

gdzie

$$B^n = K_0(\eta_1) I_0(b_1) - K_0(b_1) I_0(\eta_1),$$

$$C^n = K_0(b_1) \frac{I_1(\eta_1)}{\eta_1} + I_0(b_1) \frac{K_1(\eta_1)}{\eta_1},$$

$$\eta_1 = m\eta.$$

Jeśli we wzorach (4.8), (4.9) i (4.10) wykonamy przejście graniczne  $m \rightarrow 0$ , to otrzymamy związki podane przez WILHOITA, [12]:

$$\frac{E\alpha_T |\Delta T|}{\sigma_s} = \frac{2 \left(1 + \frac{a}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \ln \frac{b}{a}}{1 - \frac{\xi^2}{\eta^2}},$$

$$\frac{\ln \frac{\eta^2}{\xi^2}}{\frac{\eta^2}{\xi^2} - 1} = \frac{3 + 2 \left(\ln \frac{\xi}{a} - \ln \frac{b}{a}\right) - \frac{a}{\xi}}{1 + \frac{a}{\xi}},$$

$$\frac{\sigma_{rr}^s}{\beta \sigma_s} = -1 + \frac{a}{2\xi} \left(1 + \frac{\xi^2}{r^2}\right) + \frac{\left(1 + \frac{a}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)}{\left(1 - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)} \left[ \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{r^2}\right) \right],$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s}{\beta \sigma_s} = -1 + \frac{a}{2\xi} \left(1 - \frac{\xi^2}{r^2}\right) + \frac{\left(1 + \frac{a}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)}{\left(1 - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)} \left[ \ln \frac{r}{\xi} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{r^2}\right) \right].$$

## 5. Wnioski

1. Uplastycznienie w cienkim pierścieniu poddanym działaniu różnicy temperatur  $\Delta T$  rozpoczyna się na powierzchni wewnętrznej. Wraz ze wzrostem różnicy temperatur zasięg strefy plastycznej  $\xi$  powiększa się w kierunku na zewnątrz pierścienia.

2. Dla dostatecznie dużej różnicy temperatur  $\Delta T$  pojawia się druga strefa pracy plastycznej materiału. Rozpoczyna się ona od powierzchni zewnętrznej pierścienia. Wraz ze wzrostem różnicy temperatur  $\Delta T$  zasięg zewnętrznej strefy plastycznej powiększa się w kierunku do środka pierścienia.

3. Teoretycznie pierścień będzie cały uplastyczniony dla nieskończonej dużej różnicy temperatur ( $\Delta T \rightarrow \infty$ ).

4. Ze względu na to, że w utrzymanych wzorach występują funkcje Bessela, nie można ich przedstawić w postaci zależności od argumentu  $b/a$ . Uniemożliwia to porównanie ilościowe wyników przedstawionych tutaj z otrzymanymi przez WILHOITA, [12].

Jeśli chodzi o porównanie jakościowe wyników, to, jak można zauważyć porównując charakterystyki wykresów, nie zachodzą istotne zmiany. Jedyną zasadniczą różnicą występuje w warunku na początek uplastycznienia na powierzchni zewnętrznej pierścienia. Jak to ilustruje rys. 2, wymagana różnica temperatur, by nastąpiło

to uplastycznienie, szybko wzrasta ze wzrostem promienia zewnętrznego  $b$ . Funkcja  $E\alpha_T |\Delta T|/\sigma_s$  jest wklęsła. Tymczasem dla pierścienia izolowanego na powierzchniach  $\pm \delta/2$  krzywa ta jest wypukła. Tłumaczy się to tym, że ze wzrostem promienia  $b$  przy stałym promieniu  $a$  wzrasta powierzchnia oddawania ciepła otoczeniu.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1960.
- [2] CHIEH-CHIEH CHANG, WEN-HWA CHU, *Stresses in a Metal Tube under Both High Radial Temperature Variation and Internal Pressure*, J. of Appl. Mech., Vol. 21.
- [3] W. DERSKI, *The State of Stress in a Thin Circular Ring Due to a Non-Stability Temperature Field*, Arch. Mech. Stos., 3, 10 (1958).
- [4] Р. ХИЛЛ, *Математическая теория пластичности*, Москва 1956.
- [5] Я. П. Егер, *Упругость, прочность и текучесть*, Москва 1961.
- [6] Л. Н. Карамазина, А. Е. Чистова, *Таблицы функции Бесселя от многого аргумента и интегралов от них*, 1958.
- [7] A. KOPFF, *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch*, Berlin 1941.
- [8] E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1953.
- [9] M. SOKOŁOWSKI, *Naprężenia cieplne w powłoce kulistej oraz cylindrycznej w przypadku materiałów o własnościach zależnych od temperatury*, Rozpr. Inżyn., 4, 8 (1960).
- [10] S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, New York-Toronto-London 1958.
- [11] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Oxford 1941.
- [12] J. C. WILHOIT, Jr., *Elastic-Plastic Stresses in Rings under Steady State Radial Temperature Variation*, Proceedings of the third U.S. National Congress of Applied Mechanics.

#### Резюме

### УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОЛЬЦЕ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ НЕКОТОРОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Рассматривается упруго-пластическое напряженное состояние в кольце, находящемся под влиянием стационарного температурного поля. Поле — осесимметричное. Предполагая, что коэффициенты: модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , коэффициент линейной расширяемости  $\alpha$  не зависят от температуры определяются радиальные напряжения  $\sigma_{rr}$  и окружные  $\sigma_{\varphi\varphi}$ . Основываясь на гипотезе перехода в классическое состояние Трески, констатируется, что в кольце могут возникнуть одна или две пластические зоны работы материала в зависимости от величины коэффициента  $E\alpha |\Delta T|/\sigma_s$ . Если возникнет одна пластическая зона, тогда она начинается от поверхности  $r = a$  и кончается в пункте  $r = \xi$ ; если возникнут две пластические зоны — тогда их разделяет упругая зона, ограниченная поверхностями  $r = \xi$  и  $r = \eta$ . Величины  $\xi$  и  $\eta$  определяются из условия равновесия. Полученные результаты можно рассматривать как достаточно точные для максимальной температуры, существующей в кольце 250°-350°C. При высших температурах, для большинства материалов следует учесть зависимость  $E$ ,  $\alpha$  и  $\nu$  от температуры. Тогда приведенные в работе решения можно рассматривать как первые приближения более точных решений. Полученные результаты сравниваются с результатами предложенными Уильхольмом для кольца изолированного на верхней и нижней поверхностях. Результаты полученные Уильхольмом и автором настоящей работы с качественной точки зрения разнятся незначительно.



## Summary

### ELASTIC-PLASTIC STRESSES IN A RING, PRODUCED BY ACTION OF A TEMPERATURE FIELD

The object of the discussion is the elastic-plastic state of stress in a ring acted on by a steady-state temperature field. This field is axially symmetric. Assuming that Young's modulus  $E$ , Poisson's ratio  $\nu$ , and the coefficient of thermal dilatation  $\alpha$  do not depend on the temperature, radial stresses  $\sigma_{rr}$  and circumferential stresses  $\sigma_{\phi\phi}$  are found. On the basis of the Tresca yield condition it is found that one or two regions of plastic behaviour may appear depending on the magnitude of the coefficient  $E\alpha|\Delta T|/\sigma_s$ . If one plastic zone appears it is contained between the surface  $r = a$  and  $r = \xi$ . In the cases of two plastic zones they are separated by an elastic zone bounded by the surfaces  $r = \xi$  and  $r = \eta$ .

The quantities  $\xi$  and  $\eta$  are found from the equilibrium condition. The results obtained may be considered to be sufficiently accurate for temperatures of the ring not exceeding 250—350°C. For higher temperatures the dependency of  $E$ ,  $\alpha$  and  $\nu$  on the temperature cannot be disregarded for most materials. The results obtained may then be treated as a first approximation to the accurate solution.

The results are confronted with those obtained by Wilhoit for a ring insulated on the upper and lower surface. The results obtained by Wilhoit and those in the present paper are found to differ but slightly from the qualitative viewpoint.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1962 r.*