

MIŁOSZ WNUK

**STAN GRANICZNY PRĘTA JEDNOCZEŚNIE SKRĘCANEGO
I ROZCIĄGANEGO PRZY DOWOLNYM KSZTAŁCIE PRZEKROJU**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXVII**

TOM X • ZESZYT 3 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	567
2. Podstawowe równanie przemieszczeniowe	568
3. Rozkład naprężeń oraz siły zewnętrzne	571
4. Metoda małego parametru. Wpływ skręcania na rozciąganie	573
5. Pełne równanie krzywej granicznej (M_s, N)	577

1. Wstęp

Zagadnienie złożonego stanu naprężenia w zakresie pełnego uplastycznienia, gdzie nie ma zastosowania zasada superpozycji, spotyka się od wielu lat z dużym zainteresowaniem sporej liczby badaczy. W szczególności przypadek jednoczesnego skręcania i rozciągania, który będziemy nazywali symbolicznie (M_s, N) , został rozwiązany dla pręta o przekroju kołowym już w roku 1930 przez A. NÁDAIA, [7]. To samo rozwiązanie, uzyskane na nieco innej drodze, podaje również A. R. RZANICYN, [10], określając prócz rozkładu naprężeń τ_{zx} , τ_{zy} , σ_z również zależność $f(M_s, N) = 0$, gdzie M_s oznacza moment skracający, N siłę podłużną. W latach późniejszych, kiedy powstawały twierdzenia wariacyjne teorii plastyczności, zagadnienie (M_s, N) dla pręta o przekroju kołowym zostało ponownie rozwiązane, aby potwierdzić słuszność tych twierdzeń. Na uwagę zasługuje praca M. A. SADOVSKY'EGO, [12], który podając w 1943 r. swą *principle of maximum plastic resistance* (zasada maksymalnego oporu plastycznego), ilustruje ją rozwiązaniem czterech zadań: 1) przypadek (M_s, N) dla przekroju kołowego, 2) (M_s, N) dla przekroju w kształcie pierścienia, 3) (M_s, N) w przypadku pasma o nieskończonej długości i 4) cylinder poddany jednoczesnemu działaniu (M_s, N, p) , gdzie p oznacza ciśnienie przyłożone od wewnątrz. Na drodze rozważań energetycznych, żądając minimum pracy sił wewnętrznych przy danej wartości pracy sił zewnętrznych, A. R. RZANICYN, [11], znajduje kres górny krzywej granicznej $f(M_s, N) = 0$, który, w przypadku pręta o przekroju kołowym, jest identyczny z rozwiązaniem ścisłym.

Z nowszych prac należy wymienić pracę F. A. GAYDONA, [2], w której autor podał rozwiązanie (M_s, N) dla pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym w oparciu o teorię płynięcia plastycznego Prandtla-Reussa, zakładając przy tym nieściśliwość materiału, $\nu = 1/2$. Ten sam problem rozwiązano w pracy M. ŻYCKOWSKIEGO, [16], przy zastosowaniu teorii odkształceń plastycznych Hencky'ego-Iliuszina oraz przy odrzuceniu założenia o nieściśliwości materiału. Warto również wspomnieć o pracach B. R. SETHA, [14], oraz A. E. GREENA i E. W. WILKESA, [3], w których rozważa się skręcanie sprężysto-plastyczne oraz sprężyste skręcanie wraz z rozciąganiem pręta o przekroju kołowym w oparciu o teorię odkształceń skończonych; tak postawione zadanie jest na ogół znacznie trudniejsze od zagadnień rozwiązywanych przy użyciu klasycznych metod teorii plastyczności.

Wszystkie omówione wyżej prace posiadają jedną wspólną cechę: efektywne rozwiązanie problemu (M_s, N) dotyczy szczególnego tylko przypadku kształtu przekroju, mianowicie przekroju kołowego (ponadto u SADOVSKY'EGO pierścien oraz pasmo o nieskończonej długości). Poza tym brak rozwiązań dla innych, równie często stosowanych w praktyce, kształtów przekroju poprzecznego pręta. Celem niniejszej pracy jest znalezienie rozkładu naprężeń, wzorów na siły zewnętrzne oraz równania krzywej granicznej w płaszczyźnie (M_s, N) dla dowolnego kształtu przekroju.

2. Podstawowe równanie przemieszczeniowe

Przewidując konieczność użycia metod przybliżonych nie będziemy korzystali z równania naprężeniowego R. Hilla, [4], lecz rozwiążemy problem w przemieszczeniach. Ten sposób postępowania jest być może bardziej zawily od bezpośredniego szukania funkcji naprężeń Hilla, lecz uzyskane na tej drodze rezultaty (rozkład naprężeń i siły zewnętrzne) są mniej «wrażliwe» na odchylenia od ścisłych wartości poszukiwanych przemieszczeń (np. deplanacji przekroju) niż na niewielkie nawet błędy spowodowane przyjęciem przybliżonej funkcji naprężeń. Podejście takie okazało się korzystne również w przypadku jednoczesnego zginania i skręcania: S. PIECHNIK, [8], oraz S. PIECHNIK i M. ŻYCZKOWSKI, [9].

Zakładamy istnienie materiału idealnie sprężysto-plastycznego (model Prandtla) oraz brak deformacji objętościowej,

$$(2.1) \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,$$

co jest równoważne z przyjęciem nieściśliwości, $\nu = 1/2$. Można wykazać, że założenie to w zakresie czysto plastycznym, rozpatrywanym poniżej, jest bardziej usprawiedliwione niż w przypadku stanu sprężysto-plastycznego. W dalszym ciągu rozważań będziemy korzystali z teorii odkształceń plastycznych Hencky'ego-Iliuszina, należy zatem ograniczyć sposób przyłożenia obciążeń do obciążenia «prostego», w sensie Iliuszina. Przyjmując prostokątny układ współrzędnych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, gdzie \bar{z} jest osią pręta, wyrazimy składowe wektora przemieszczeń, określone na tle rozważań geometrycznych, podobnie jak to ma miejsce w zakresie sprężystym:

$$(2.2) \quad u = \vartheta \bar{y} - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{x}, \quad v = -\vartheta \bar{x} - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{y}, \quad w = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon \bar{z},$$

gdzie ε oznacza wydłużenie względne oraz ϑ jednostkowy kąt skręcania. Ze wzorów Cauchy'ego znajdujemy składowe stanu odkształcenia:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \gamma_{zx} &= \vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, & \varepsilon_x &= -\frac{\varepsilon}{2}, \\ \gamma_{zy} &= -\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, & \varepsilon_y &= -\frac{\varepsilon}{2}, \\ \gamma_{xy} &= 0, & \varepsilon_z &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Związek między odkształceniami a naprężeniami podaje równanie Hencky'ego-Iliuszina:

$$(2.4) \quad \varphi D_{\sigma} = D_{\varepsilon},$$

gdzie D_{σ} oznacza dewiator naprężeń, D_{ε} dewiator odkształceń oraz $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ uogólniony moduł odkształceń plastycznych. Stąd po uwzględnieniu, że

$$(2.5) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

otrzymujemy

$$(2.6) \quad \sigma_z = \frac{3\varepsilon}{2\varphi}, \quad \tau_{zx} = \frac{1}{2\varphi} \left(\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right), \quad \tau_{zy} = \frac{1}{2\varphi} \left(-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right).$$

Funkcję $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ określamy korzystając z warunku plastyczności Hubera-Misesa:

$$(2.7) \quad \sigma_z^2 + 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = Q^2,$$

skąd po wstawieniu (2.6) mamy

$$(2.8) \quad \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2Q} \sqrt{3\varepsilon^2 + \left(\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2}.$$

Z równań równowagi wewnętrznej, jak łatwo się o tym przekonać, tylko jedno nie jest spełnione tożsamościowo:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Stąd po wstawieniu (2.6) oraz (2.8) znajdziemy

$$(2.10) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}}{\sqrt{3\varepsilon^2 + \left(\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \frac{-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}}{\sqrt{3\varepsilon^2 + \left(\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2}} = 0;$$

po wykonaniu odpowiednich przekształceń dochodzimy do równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu (eliptycznego), nieliniowego:

$$(2.11) \quad 3\varepsilon^2 \nabla^2 \bar{w} + \left(\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \left(-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - 2 \left(\vartheta \bar{y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \left(-\vartheta \bar{x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = 0,$$

gdzie przez ∇^2 oznaczono operator Laplace'a. Ponadto funkcja $\bar{w} = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$, która przedstawia deplancję przekroju pręta poddanego jednoczesnemu skręcaniu i rozciąganiu w stanie czysto plastycznym, powinna spełniać warunek brzegowy

$$(2.12) \quad \tau_{zx} d\bar{y} - \tau_{zy} d\bar{x} = 0$$

[składowa normalna naprężenia τ ma znikać na konturze $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$], co po uwzględnieniu (2.6) można przedstawić w postaci

$$(2.13) \quad \left(\partial_{\bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{y} - \left(-\partial_{\bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) d\bar{x} = 0.$$

Funkcja $\bar{w} = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$ spełniająca równanie (2.11) (które nazwiemy podstawowym równaniem przemieszczeniowym) oraz wraz z warunkiem brzegowym (2.13) rozwiązuje problem (M_s, N) w stanie granicznym. Dla porównania przypomnijmy, że w zakresie sprężystym żąda się, aby $\nabla^2 \bar{w} = 0$ przy niezmienionym warunku brzegowym (2.13).

Wygodnie jest wprowadzić bezwymiarowe współrzędne:

$$(2.14) \quad x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = \frac{\bar{y}}{a}, \quad z = \frac{\bar{z}}{a}$$

oraz bezwymiarowy parametr

$$(2.15) \quad \lambda = \frac{a\vartheta}{\varepsilon}$$

jak również bezwymiarową funkcję spaczenia

$$(2.16) \quad \psi(x, y) = \frac{\bar{w}(\bar{x}, \bar{y})}{\vartheta a^2},$$

gdzie a oznacza dowolnie obrany wymiar liniowy charakteryzujący przekrój. Równanie (2.11) przybierze obecnie postać

$$(2.17) \quad \frac{3\varepsilon^2}{a^2 \vartheta^2} \nabla^2 \psi + (y + \psi'_x)^2 \psi''_{yy} + (-x + \psi'_y)^2 \psi''_{xx} - 2(y + \psi'_x)(-x + \psi'_y) \psi''_{xy} = 0$$

lub prościej

$$(2.18) \quad 3\nabla^2 \psi + \lambda^2 \Omega[\psi] = 0,$$

gdzie nieliniowy operator Ω daje się zapisać krótko

$$(2.19) \quad \Omega = \left(A \frac{\partial}{\partial y} - B \frac{\partial}{\partial x} \right)^2,$$

przy czym $A = y + \psi'_x$, $B = -x + \psi'_y$.

W bezwymiarowym układzie współrzędnych x, y, z warunek brzegowy (2.13) ma postać

$$(2.20) \quad (y + \psi'_x) dy - (-x + \psi'_y) dx = 0.$$

Parametr λ określa stosunek odkształceń pochodzących od skręcania ϑ do odkształceń wywołanych rozciąganiem (ε), a zatem ujmuje liczbowo udział skręcania oraz udział rozciągania w stanie granicznym spowodowanym jednoczesnym działaniem (M_s, N). Dla $\lambda = 0$ otrzymujemy czyste rozciąganie, natomiast przypadek $\lambda = \infty$ odpowiada czystemu skręcaniu.

3. Rozkład naprężeń oraz siły zewnętrzne

Korzystając z podanych wzorów (2.6) i (2.8) oraz definicji wielkości bezwymiarowych x, y, λ, ψ możemy przedstawić naprężenia styczne w ostatecznej postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Q}{\sqrt{3}} \lambda \frac{y + \psi'_x}{\sqrt{3 + \lambda^2 [(y + \psi'_x)^2 + (-x + \psi'_y)^2]}}, \\ \tau_{zy} &= \frac{Q}{\sqrt{3}} \lambda \frac{-x + \psi'_y}{\sqrt{3 + \lambda^2 [(y + \psi'_x)^2 + (-x + \psi'_y)^2]}}. \end{aligned}$$

Naprężenie normalne σ_z powinno być określone z warunku plastyczności (2.7), mianowicie

$$(3.2) \quad \sigma_z = Q \sqrt{1 - \frac{3}{Q^2} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)} = \frac{\sqrt{3}Q}{\sqrt{3 + \lambda^2 [(y + \psi'_x)^2 + (-x + \psi'_y)^2]}}.$$

Następnie, po obliczeniu całek według schematu

$$(3.3) \quad N = \iint_F \sigma_z d\bar{x} d\bar{y} = a^2 \iint_f \sigma_z dx dy,$$

$$(3.4) \quad M_s = \iint_F (\tau_{zx} \bar{y} - \tau_{zy} \bar{x}) d\bar{x} d\bar{y} = a^3 \iint_f (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dx dy,$$

gdzie bezwymiarowy obszar całkowania określa przekształcenie $f = F/a^2$, otrzymamy równanie parametryczne krzywej granicznej $N = N(\lambda)$, $M_s = M_s(\lambda)$ w postaci

$$(3.5) \quad \begin{aligned} N &= Qa^2 \iint_f \frac{dx dy}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{3} D[\psi]}}, \\ M_s &= \frac{Qa^3}{3} \lambda \iint_f \frac{(y + \psi'_x) y - (-x + \psi'_y) x}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{3} D[\psi]}} dx dy. \end{aligned}$$

We wzorach powyższych przyjęto oznaczenie

$$D[\psi] = (y + \psi'_x)^2 + (-x + \psi'_y)^2.$$

Na koniec z równań (3.5), o ile udałoby się znaleźć funkcję ψ spełniającą równanie różniczkowe (2.18) z warunkiem brzegowym (2.20), należy wyrugować parametr λ i napisać równanie krzywej granicznej $f(M_s, N) = 0$.

W szczególności w przypadku przekroju kołowego, dla którego funkcja $\psi(x, y) \equiv 0$ jest rozwiązaniem ścisłym postawionego zadania (brak deplanacji przekroju), przedstawiony wyżej tok postępowania można bez trudu doprowadzić do końca. Uwzględniając

$$(3.6) \quad [D[\psi]]_{\psi=0} = x^2 + y^2$$

oraz wprowadzając współrzędne biegunowe ρ, φ , mamy

$$(3.7) \quad N = Qa^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{3}\rho^2}}, \quad M_s = \frac{Qa^3}{3} \lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{3}\rho^2}},$$

co jest parametrycznym równaniem krzywej granicznej. Przez a należy tutaj rozumieć promień koła. Po obliczeniu całek (3.7) oraz wyrugowaniu parametru λ , otrzymujemy wzór

$$(3.8) \quad M_s = \frac{1}{3\sqrt{3}} (N + 2\pi a^2 Q) \sqrt{a^2 - \frac{N}{\pi Q}}$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(3.9) \quad m_s^2 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^3 = 1,$$

gdzie bezwymiarowe siły zewnętrzne są określone stosunkami

$$(3.10) \quad m_s = M_s/\bar{M}_s, \quad n = N/\bar{N}.$$

Wielkości oznaczone dwiema kreskami przedstawiają odpowiednio graniczny moment skracający oraz graniczną siłę podłużną w przypadkach czystego skręcania (\bar{M}_s) oraz czystego rozciągania (\bar{N}). Dla przekroju kołowego

$$(3.11) \quad \bar{M}_s = \frac{2\pi Q a^3}{3\sqrt{3}}, \quad \bar{N} = \pi Q a^2.$$

Równanie (3.9) jest znanym, ścisłym równaniem krzywej granicznej $f(m_s, n) = 0$ dla przekroju kołowego, [10], [11], [12] i [16].

Wzory (3.5) mogą być wykorzystane do znajdowania przybliżonego równania krzywej granicznej również i w przypadkach przekrojów niekołowych przez przyjęcie $\psi \equiv 0$. Im mniej rozpatrywany przekrój różni się od koła, tym znalezione rozwiązanie będzie obarczone mniejszym błędem.

4. Metoda małego parametru. Wpływ skręcania na rozciąganie

Rozwiążemy obecnie podstawowe równanie przemieszczeniowe (2.18) metodą małego parametru (Poincarégo), ograniczając na razie zakres rozważań do uwzględnienia wpływu skręcania na rozciąganie. Przy dużych wydłużeniach względnych ϵ oraz niewielkich kątach skręcania ϑ , co jest równoważne żądaniu $m_s \ll n$, wielkość $\lambda = a\vartheta/\epsilon$ można uznać za mały parametr. Funkcję spaczenia przekroju przedstawimy za pomocą szeregu potęgowego

$$(4.1) \quad \psi(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i} \psi_i(x, y),$$

gdzie $\psi_i = \psi_i(x, y)$ nie zależą od parametru λ ; po wstawieniu do równania (2.18) mamy

$$(4.2) \quad 3\nabla^2 [\psi_0 + \psi_1 \lambda^2 + \dots] + \lambda^2 \Omega [\psi_0 + \psi_1 \lambda^2 + \dots] = 0$$

i po porównaniu wyrażen przy poszczególnych potęgach λ otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \psi_0 &= 0, \\ 3\nabla^2 \psi_1 + \Omega [\psi_0] &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

przy czym warunek brzegowy dla funkcji ψ_0 pozostaje niejednorodny, mianowicie

$$(4.4) \quad (y + \psi'_{0x}) dy - (-x + \psi'_{0y}) dx = 0,$$

natomiast dla ψ_i ($i = 1, 2, \dots$) otrzymujemy warunek jednorodny

$$(4.5) \quad \psi'_{ix} dy - \psi'_{iy} dx = 0.$$

Pierwsze z równań (4.3) jest równaniem Laplace'a z niejednorodnym warunkiem brzegowym, następne natomiast jest równaniem Poissona: $\Omega [\psi_0]$ jest po znalezieniu ψ_0 znaną funkcją współrzędnych x, y , przy czym warunek brzegowy staje się jednorodny. Rozwiązanie równania $\nabla^2 \psi_0 = 0$ z warunkiem brzegowym (4.4) jest znane z teorii sprężystości. Funkcja ψ_0 , harmoniczna, przedstawia spaczenie (bezwymiarowe) przekroju pręta przy skręcaniu swobodnym w zakresie sprężystym (zagadnienie Saint-Venanta). Można podać stosunkowo wiele przykładów rozwiązań zagadnienia skręcania w zakresie sprężystym, dla różnych kształtów przekrojów: B. SAINT-VENANT, [13], A. N. DINNIK, [1], L. S. LEJBIENZON, [6], A. KOVAŘ, [5], C. WEBER i W. GÜNTHER, [15].

Wykażemy obecnie, że funkcja ψ_0 nie jest zerowym przybliżeniem deplanacji przekroju $\bar{w} = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$, jak by mogło się wydawać, lecz jej pierwszym przybliżeniem w przypadku jednoczesnego działania siły podłużnej oraz momentu skręcającego.

Dla czystego rozciągania ($\vartheta = 0$) deplanacja przekroju

$$(4.6) \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0,$$

tymczasem bezwymiarowa funkcja spaczenia $\psi(x, y) = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y})/a^2 \vartheta$ posiada wartość skończoną różną od zera. Mamy mianowicie

$$(4.7) \quad \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \psi(x, y) = \frac{1}{a^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{a^2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} (a^2 \psi_0 + a^2 \psi_1 \lambda^2 + \dots) = \psi_0 \neq 0.$$

Korzystając z (4.1) oraz (2.16) można przedstawić deplanację przekroju pręta (wymiarowa) $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$ w postaci szeregu

$$(4.8) \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \bar{w}_1(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda^3 \bar{w}_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots,$$

gdzie $\bar{w}_0(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0$ oznacza zerowe przybliżenie, $\bar{w}_1(\bar{x}, \bar{y}) = a \varepsilon \psi_0(x, y)$ pierwsze przybliżenie oraz $\bar{w}_2(\bar{x}, \bar{y}) = a \varepsilon \psi_1(x, y)$ drugie przybliżenie itd. Tak więc jeżeli poprzestać na pierwszym przybliżeniu funkcji spaczenia przekroju $\bar{w}_1(\bar{x}, \bar{y}) = a \varepsilon \psi_0(x, y)$, to wszystkie rozwiązania równania $\nabla^2 \psi_0 = 0$ z warunkiem brzegowym (4.4), znane z teorii sprężystości, będą mogły być w niniejszych rozważaniach dotyczących nośności granicznej (M_s, N) wykorzystane.

Znajdziemy obecnie funkcje τ_{zx} , τ_{zy} oraz σ_z . Biorąc pod uwagę szereg (4.1) oraz korzystając ze wzorów (3.1), mamy

$$(4.9) \quad \tau_{zx} = \frac{Q}{3} \left\{ (y + \psi'_{0x}) \lambda + \left[\psi'_{1x} - \frac{1}{6} (y + \psi'_{0x}) (-x + \psi'_{0y})^2 - \frac{1}{6} (y - \psi'_{0x})^3 \right] \lambda^3 + \dots \right\},$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q}{3} \left\{ (-x + \psi'_{0y}) \lambda + \left[\psi'_{1y} - \frac{1}{6} (y + \psi'_{0x})^2 (-x + \psi'_{0y}) - \frac{1}{6} (-x + \psi'_{0y})^3 \right] \lambda^3 + \dots \right\}.$$

Analogicznie naprężenie normalne (3.2) daje się przedstawić za pomocą szeregu

$$(4.10) \quad \sigma_z = Q \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{6} [(y + \psi'_{0x})^2 + (-x + \psi'_{0y})^2] - \frac{\lambda^4}{24} [8\psi'_{1x} (y + \psi'_{0x}) + 8\psi'_{1y} (-x + \psi'_{0y}) - (y + \psi'_{0x})^4 - (-x + \psi'_{0y})^4 - 2(y + \psi'_{0x})^2 (-x + \psi'_{0y})^2] - \dots \right\}.$$

Aby obliczyć siły zewnętrzne M_s i N , należy znaleźć całki funkcji (4.9) i (4.10) po powierzchni przekroju pręta f odpowiednio według schematu (3.3) oraz (3.4). Całkując wyraz po wyrazie szereg (4.9) oraz (4.10), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 M_s = & \frac{Qa^3}{3} \left\{ \lambda \iint_f [(y + \psi'_{0x})y - (-x + \psi'_{0y})x] dx dy + \right. \\
 & + \lambda^3 \iint_f \left[\psi'_{1x}y - \frac{y}{6}(y + \psi'_{0x})^3 - \frac{y}{6}(y + \psi'_{0x})(-x + \psi'_{0y})^2 - \psi'_{1y}x + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{x}{6}(-x + \psi'_{0y})(y + \psi'_{0x})^2 + \frac{x}{6}(-x + \psi'_{0y})^3 \right] dx dy + \dots \right\}, \\
 N = & Qa^2 \left\{ \iint_f dx dy - \frac{\lambda^2}{\sigma} \iint_f [(y + \psi'_{0x})^2 + (-x + \psi'_{0y})^2] dx dy + \dots \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Wzory (4.11) można znacznie uprościć wprowadzając bezwymiarowe obciążenia $m_s = M_s/\bar{M}_s$, $n = N/\bar{N}$, przy czym dla przekroju o dowolnym kształcie graniczne wartości obciążeń są pewnymi funkcjami zależnymi od kształtu konturu ograniczającego przekrój, mianowicie:

graniczny moment skręcający

$$\bar{M}_s = \frac{2Qv_N}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\mu} = \frac{2QV_N}{\sqrt{3}},
 \tag{4.12}$$

graniczna siła podłużna

$$\bar{N} = QF,
 \tag{4.13}$$

gdzie F oznacza pole przekroju;

$$V_N = [v_N]_{\operatorname{tg}\mu=1} = \frac{v_N}{\operatorname{tg}\mu},$$

objętość wzgórza piasku według analogii Nádai'a przy przyjęciu $\operatorname{tg}\mu = 1$ gdzie μ oznacza kąt zsyphu.

Ponadto dla uproszczenia zapisu przyjmujemy oznaczenia

$$\begin{aligned}
 S_1 = & \iint_f [(y + \psi'_{0x})^2 + (-x + \psi'_{0y})^2] dx dy, \\
 S_2 = & \iint_f [(y + \psi'_{0x})y - (-x + \psi'_{0x})x] dx dy
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

oraz pominiemy dalsze wyrazy w szeregach (4.11): wyższe niż λ w szeregu $M_s = M_s(\lambda)$ oraz wyższe niż λ^2 w szeregu $N = N(\lambda)$. W tym przypadku

$$m_s = \frac{S_2 a^3}{2\sqrt{3}V_N} \lambda + \dots, \quad n = 1 - \frac{S_1 a^2}{6F} \lambda^2 - \dots,
 \tag{4.15}$$

co jest poszukiwanym równaniem krzywej granicznej dla $m_s \ll n$ w postaci parametrycznej: $m_s = m_s(\lambda)$, $n = n(\lambda)$. Stąd po wyrugowaniu parametru λ otrzymujemy równanie $f(m_s, n) = 0$ w postaci

$$(4.16) \quad n = 1 - 2 \frac{S_1 V_N^2}{S_2^2 F a^4} m_s^2 - \dots$$

Współczynnik przy m_s^2 jest pewnym wyrażeniem całkowym zależnym od kształtu przekroju; dokładniej, współczynnik ten, określający kształt krzywej granicznej w płaszczyźnie (m_s, n) , jest funkcjonalem od $f_i(x, y)$, jeżeli $f_i(x, y) = 0$ przedstawia równanie konturu ograniczającego przekrój (lub kilku konturów dla przekroju wielospójnego).

Wykażemy obecnie, że całki S_1 i S_2 są sobie równe, można je mianowicie przedstawić w postaci

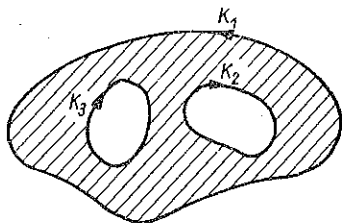
$$(4.17) \quad S_1 = S_2 + R,$$

gdzie

$$(4.18) \quad R = \iint_f (\psi_{0x}'^2 + \psi_{0y}'^2 + y\psi_{0x}' - x\psi_{0y}') dx dy.$$

Wystarczy wykazać, że całka R jest tożsamościowo równa zero dla dowolnego kształtu przekroju. Dla dowodu wykorzystamy następujące własności funkcji ψ_0 :

1) jest harmoniczna, 2) spełnia warunek brzegowy (4.4).



Rys. 1

Rozpatrzmy dla przykładu przekrój trójspójny (rys. 1) ograniczony trzema konturami K_1 , K_2 i K_3 . W wyrażeniu podcałkowym (4.18) dodajemy wyraz $\psi_0(\psi_{0xx}'' + \psi_{0yy}'')$, co wolno uczynić pamiętając, że $\nabla^2 \psi_0 = 0$, a następnie, korzystając z twierdzenia Greena, zamieniamy całkę po obszarze f na sumę całek krzywoliniowych wzdłuż konturów K_1 , K_2 i K_3 . Otrzymujemy

$$(4.19) \quad R = \iint_f (\psi_0 \psi_{0xx}'' + \psi_0 \psi_{0yy}'' + \psi_{0x}'^2 + \psi_{0y}'^2 + y\psi_{0x}' - x\psi_{0y}') dx dy =$$

$$= \oint_{K_1} \psi_0 [(y + \psi_{0x}') dy - (-x + \psi_{0y}') dx] + \oint_{K_2} \psi_0 [(y + \psi_{0x}') dy - (-x + \psi_{0y}') dx] -$$

$$- \oint_{K_3} \psi_0 [(y + \psi_{0x}') dy - (-x + \psi_{0y}') dx] = 0.$$

ponieważ na mocy warunku brzegowego (4.4) wyrażenia podcałkowe (w kłammerach) są identycznie równe zero wzdłuż wszystkich konturów ograniczających przekrój zarówno zewnętrznego jak i wewnętrznych.

Na koniec równanie krzywej granicznej ($m_s \ll n$) dla dowolnego kształtu przekroju zapiszemy ogólnie w postaci

$$(4.20) \quad n = 1 - \alpha m_s^2 - \dots,$$

gdzie współczynnik α po uwzględnieniu

$$(4.21) \quad S_1 = S_2 = \int_f [(y + \psi'_{0x})y - (-x + \psi'_{0y})x] dx dy = \\ = \frac{2}{a^4} \int_F \int \Phi(x, y) dx dy = \frac{2V_p}{a^4},$$

($\Phi(x, y)$ jest funkcją naprężeń Prandtla) wyrazi się za pomocą wzoru

$$(4.22) \quad \alpha = \frac{V_N^2}{FV_p}$$

lub

$$(4.23) \quad \alpha = \frac{2V_N^2}{FI_s},$$

gdzie (dla przejrzystości prócz wielkości nowych opiszemy również pozostałe): F oznacza pole przekroju, V_p objętość wzgórza Prandtla (wielkość charakteryzująca sztywność skręcania w zakresie czysto sprężystym), V_N objętość wzgórza piasku według analogii Nádai'a (wielkość charakteryzująca sztywność skręcania w zakresie czysto plastycznym) oraz I_s zastępczy moment bezwładności przekroju przy skręcaniu.

Wzory (4.22) i (4.23) wiążą współczynnik określający kształt krzywej nośności granicznej (M_s, N) z charakterystykami geometrycznymi rozpatrywanego przekroju. Wzory te mają zastosowanie dla dowolnego kształtu przekroju poprzecznego pręta.

5. Pełne równanie krzywej granicznej (M_s, N)

Równanie (4.20) można ekstrapolować na cały obszar $0 \leq m_s \leq 1$, $0 \leq n \leq 1$, uzyskując w ten sposób pełne równanie krzywej granicznej $f(m_s, n) = 0$. Ekstrapolacji szukamy w postaci

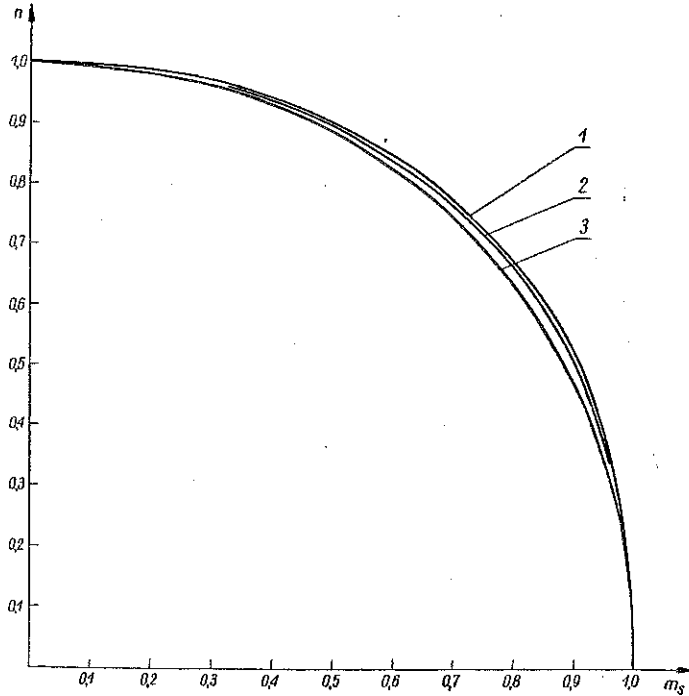
$$(5.1) \quad Am_s^2 + Bn^2 + Cn^3 = 1,$$

skąd w oparciu o równanie (4.20) oraz warunek $m_s = 1$ dla $n = 0$ otrzymujemy¹

$$(5.2) \quad m_s^2 + \left(3 - \frac{1}{a}\right)n^2 + \left(\frac{1}{a} - 2\right)n^3 = 1.$$

¹ Wykorzystanie oprócz równania (4.20) również warunku $m_s = 1$ dla $n = 0$, który jest oczywisty, pozwala zamienić ekstrapolację na interpolację w sensie Hermite'a, a co za tym idzie, można oczekiwać stosunkowo dobrej aproksymacji ścisłego rozwiązania $f(m_s, n) = 0$.

Równanie to stanowi bliską aproksymację rozwiązania ścisłego, odnosi się ono wraz ze wzorem (4.22) dla dowolnego kształtu przekroju. Łatwo wykazać, że w przypadku przekroju kołowego równanie (5.2) jest identyczne ze znanym ścisłym rozwiązaniem dla pręta (M_s, N) w stanie granicznym (SADOVSKY, RŽANICYN i ŹYCZKOWSKI).



Rys. 2. Krzywe graniczne $f(m_s, n) = 0$ dla 1) przekrój trójkątny (trójkąt równoboczny), 2) przekrój kwadratowy, 3) przekrój kołowy

Dla przykładu podamy równanie krzywej nośności granicznej dla pręta posiadającego przekrój w kształcie dowolnego wielokąta foremnego. Korzystając z (4.22) oraz (5.2) otrzymujemy

1) przekrój o kształcie trójkąta równobocznego

$$(5.3) \quad m_s^2 + 0,3000 n^2 + 0,7000 n^3 = 1;$$

2) przekrój o kształcie kwadratu

$$(5.4) \quad m_s^2 + 0,4709 n^2 + 0,5291 n^3 = 1;$$

3) przekrój o kształcie sześciokąta foremnego

$$(5.5) \quad m_s^2 + 0,5779 n^2 + 0,4221 n^3 = 1.$$

Dla dowolnego $p > 6$ (p oznacza liczbę boków p — kąta foremnego) równanie (5.2) odpowiednich krzywych granicznych można przedstawić jednym przybliżonym wzorem² (błąd nie przekracza 1%), mianowicie

$$(5.6) \quad m_s^2 + \left(3 - \frac{9p^2}{4\pi^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{p}}{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{p}} \right) n^2 + \left(\frac{9p^2}{4\pi^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{p}}{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{p}} - 2 \right) n^3 = 1.$$

Wzór ten dla $p \rightarrow \infty$, a więc w przypadku przekroju kołowego, daje

$$(5.7) \quad m_s^2 + 0,7500 n^2 + 0,2500 n^3 = 1,$$

co jest identyczne z rozwiązaniem ścisłym. Kształt krzywych granicznych (5.3), (5.4) oraz (5.7), tzn. dla przekroju trójkątnego kwadratowego i kołowego, przedstawia rys. 2.

Oszacowaniem poprawności równania (5.2) oraz rozwiązaniem kilku ciekawszych przypadków szczególnych zajmiemy się w osobnej pracy.

Literatura cytowana w tekście

- [1] А. Н. ДИНИК, *Кручение*, ГИИТ, Москва 1938.
- [2] F. A. GAYDON, *On the Combined Torsion and Tension of a Partly Plastic Circular Cylinder*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1, 5 (1952).
- [3] A. E. GREEN, E. W. WILKES, *A Note on Final Extension and Torsion of a Circular Cylinder of Compressible Elastic-Isotropic Material*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 2, 6 (1953).
- [4] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford 1950.
- [5] A. KOVAŘ, *Theorie kroucení*, Praha 1954.
- [6] Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, *Собрание трудов*, т. 1, АН СССР, Москва 1951.
- [7] A. NÁDAI, *Plasticity*, New York-London 1931.
- [8] S. PIĘCHNIK, *The Influence of Bending on the Limit State of a Circular Bar Objected to Torsion*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961), 77-106.
- [9] S. PIĘCHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the Plastic Interaction Curve for Bending and Torsion of a Circular Bar*, Arch. Mech. Stos., 5, 13 (1961).
- [10] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Стройвоенмориздат, Москва 1949.
- [11] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Приближенные решения по вопросам строительной механики и теории пластичности*, ТУС, Москва 1956.
- [12] M. A. SADOVSKY, *A Principle of Maximum Plastic Resistance*, J. Appl. Mech., June 1943.
- [13] B. SAINT-VENANT, *Mémoire sur le torsion des prismes*, Gosizdat. Fiz.-Mat. Literat., Moskwa 1961.
- [14] B. R. SETH, *Final Elastic-Plastic Torsion*, J. Math. Phys., 1, 31 (1952).
- [15] C. WEBER, W. GÜNTHER, *Torsionstheorie*, Braunschweig 1958.
- [16] M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955).

² Równanie to uzyskano przez przyjęcie przybliżonego wzoru Saint-Venanta $V_P = \frac{1}{8\pi^2} \frac{F^4}{I_0}$

(I_0 jest biegunowym momentem bezwładności przekroju) oraz ścisłego wyrażenia na V_N .

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ,
ПОДВЕРЖЕННОГО ОДНОВРЕМЕННОМУ КРУЧЕНИЮ И РАСТЯЖЕНИЮ

Задача сложного напряженного состояния в чисто пластическом состоянии, вызванного одновременным действием пары внешних сил (продольной силы N и скручивающего момента M_s) решается в перемещениях, не пользуясь при этом уравнением в напряжениях Хилла. Полагая наличие идеально упруго-пластического несжимаемого материала и используя теорию пластических деформаций Генки-Ильюшина — выводится основное нелинейное, эллиптическое уравнение в перемещениях (2.11), с неоднородным краевым условием (2.13). В п. 2 даются общие формулы для напряжений τ_{zx} , τ_{zy} , σ_x и соответствующее выражение для внешних сил N и M_s , являющихся некоторыми функционалами безразмерной деформации сечения $\psi = \psi(x, y)$. Формулы (3.5), заключающие неизвестную функцию ψ , представляют параметрическое точное уравнение предельной кривой в плоскости $M_s N$, для произвольного сечения. Указывается возможность получения приближенного уравнения предельной кривой, полагая $\psi \equiv 0$.

Основное уравнение в перемещениях решается методом малого параметра, учитывая влияние кручения на растяжение, и, доказывая возможность использования всех решений уравнения Лапласа $\nabla^2 \psi_0 = 0$, известных из теории упругости. Довольствуясь первым приближением получаются эффективные простые формулы (4.22) и (4.23), связывающие коэффициент α , определяющий форму предельной кривой (4.20) для $m_s \ll n$ с геометрическими характеристиками рассматриваемого сечения.

В заключение, применяя интерполяцию в смысле Гермита, расширяется область применимости уравнения (4.20) на всю область $0 \leq m_s < 1$, $0 \leq n < 1$, где m_s обозначает безразмерный скручивающий момент, n — безразмерная продольная сила, получая таким образом полное уравнение предельной кривой $f(m_s, n) = 0$, (5.2), описывающее для произвольной формы сечения.

Приведенные в заключение примеры касаются несущей способности (m_s, n) стержня, обладающего сечением в форме произвольного правильного многоугольника. Предлагаемая приближенная формула (5.6) в особом случае, когда количество сторон $p \rightarrow \infty$, дает известное точное уравнение предельной кривой для стержня кругового сечения.

Summary

THE LIMIT STATE OF A BAR OF ANY PROFILE SUBJECT
TO COMBINED TORSION AND TENSION

The problem of combined stress in the purely plastic state resulting from a simultaneous action of a longitudinal force N and a torque M_s is solved in displacements, the Hill stress equation being not used. Assuming the existence of a perfect elastic-plastic incompressible material and making use of the Hencky-Ilyushin strain theory, the basic equation (2.11) is derived in displacements. This is an elliptic non-linear equation with a non-homogeneous boundary condition (2.13). In Sec. 2 general equations are given for the stresses τ_{zx} , τ_{zy} , σ_x and the corresponding equations for the outer forces N , M_s which are certain functional expressions of the dimensionless warping of the cross-section $\psi = \psi(x, y)$. Equation (3.5) containing the unknown function ψ represent the accurate parametric equation of the limit curve in the plane $M_s N$ for any profile. The possibility of approximate solution for the limit curve is obtained by assuming $\psi \equiv 0$.

The basic equation in displacements is solved by means of the perturbation method taking into consideration the influence of torsion on tension and showing that it is possible to make use of all the solutions of the Laplace equation $\nabla^2 \psi_0 = 0$, known from the theory of elasticity. Confining ourselves to the first approximation, simple effective equations (4.22), (4.23) are obtained relating the coefficient α characteristic of the form of the limit curve (4.20) for $m_s \ll n$ with the geometric characteristics of the profile under consideration.

Finally, applying Hermitian interpolation, the applicability range of the Eq. (4.20) is extended to the entire $0 \leq m_s \leq 1$, $0 \leq n \leq 1$ region (where m_s is the dimensionless torque and n — the dimensionless longitudinal force) thus obtaining the full equation of the limit curve $f(m_s, n) = 0$, (5.2), valid for any profile.

The examples given in conclusion concern the limit load (m_s, n) of a bar in the form of any regular polygonal cross-section: the approximate formula (5.6) proposed gives in the particular case where the number of sides of the polygon $p \rightarrow \infty$ the known accurate equation of the limit curve for the circular bar.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
KATEDRA FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1962 r.