

JANUSZ KLEPACZKO

**WPLYW SZEROKOŚCI WALCOWO GIĘTEGO PASMA NA MOMENT
ZGINAJĄCY W STANIE PLASTYCZNYM**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXVI**

TOM X • ZESZYT 2 • ROK 1962

1. Wstęp

Przy walcowym zginaniu płyty moment zginający, który przypada na jednostkę szerokości, jest większy od jednostkowego momentu zginającego wąską belkę przy tej samej krzywiznie w obu przypadkach, o ile oba elementy są wykonane z jednakowego materiału oraz o ile posiadają jednakową grubość i prostokątny przekrój. W przypadku wąskiej belki zakłada się istnienie płaskiego stanu naprężenia, gdyż wydłużeniu lub skróceniu włókien materiału w kierunku osiowym towarzyszy swobodne zwiększanie się lub zmniejszanie wymiarów poprzecznych. Gdy szerokość giętego elementu jest dostatecznie duża, nie ma właściwie odkształceń w kierunku szerokości, co pozwala założyć istnienie płaskiego stanu odkształcenia. Stan taki przypuszczalnie przedstawia w sposób poprawny zachowanie się środkowej części szerokiej płyty.

W niniejszej pracy zbadano doświadczalnie przejście od płaskiego stanu naprężenia do płaskiego stanu odkształcenia, co następuje w miarę wzrostu szerokości zginanych pasów.

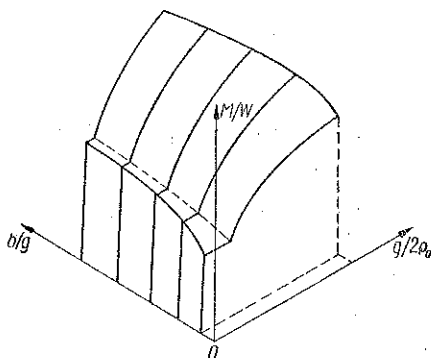
W zakresie dużych odkształceń zagadnienie belki o wąskim, prostokątnym przekroju (zagadnienie płaskiego stanu naprężenia) nie jest możliwe do zbadania w prosty sposób analityczny z powodu znacznych zmian szerokości poprzecznego przekroju zginanej belki. W roku 1950 LUBAHN i SACHS, [4], podali metodę kolejnych przybliżeń, którą można rozwiązać tego rodzaju zagadnienia. Metoda jest opracowana dla modelu ciała bez umocnienia przy założeniu nieściśliwości. Dla modelu sztywno plastycznego bez umocnienia znane jest rozwiązanie R. HILLA podane w r. 1950, [1], oraz niezależnie w tym samym czasie przez LUBAHNA i SACHSA, [2], dotyczące płyty.

2. O wpływie szerokości na moment zginający. Opis doświadczeń

Procesy gięcia opisywane są zwykle w układzie współrzędnych, z których jedna oś jest momentem zginającym M , a druga krzywizną $1/\rho_0$ warstwy środkowej. Ograniczając się do klasy przekrojów prostokątnych zginanych pasów można obracać układ współrzędnych¹ M/W , $g/2\rho_0$, gdzie W jest wskaźnikiem przekroju poprzecznego, g grubością zginanego pasa. W ten sposób krzywe gięcia uzyskane dla pasów mających różną grubość i szerokość stają się porównywalne.

¹ Dokładniejsze omówienie współrzędnych oraz ich zastosowania czytelnik znajdzie w pracach [3], [5] i [6].

W rozważaniach przyjęto zasadę podawania wymiarów liniowych w odniesieniu do grubości pasów. Ogólnie biorąc wartość M/W zależy od względnej krzywizny zginanego pasa $g/2\varrho_0$ oraz od względnej jego szerokości b/g . Zależność tę można zatem opisać w układzie przestrzennym o trzech współrzędnych, budując powierzchnię gięcia dla danego materiału, wprowadzwszy również względną szerokość.



Rys. 1. Szkic powierzchni gięcia

Szkic takiej powierzchni przedstawiono na rys. 1.

Wraz ze wzrostem b/g obserwuje się stopniowo wzrost M/W dla $g/2\varrho_0 = \text{const}$ aż do pewnej wartości b/g ; przy dalszym zwiększaniu szerokości jednostkowy moment zginający pozostaje stały. Zjawisko to tłumaczy się osiągnięciem przy pewnej wartości b/g płaskiego stanu odkształcenia w środkowej części zginanego pasa. Powierzchnię gięcia można więc zbudować rozporządzając danymi doświadczalnymi dla zginanych próbek o prostokątnym przekroju poprzecznym przy różnych wartościach stosunków b/g . Skonstruowano w ten sposób powierzchnie dla dwu materiałów: miękkiej stali i mosiądzu.

Próbki miękkiej stali poddano wyżarzaniu w czasie godziny przy temperaturze 750°C , a następnie studzono wraz z piecem. Po wyżarzeniu materiał posiadał następujące własności:

następujące własności:

granica plastyczności	$R_{pl} = 23,5 \text{ kG/mm}^2$,
dolna granica plastyczności	$R_{(pl)} = 22,0 \text{ kG/mm}^2$,
wytrzymałość na rozciąganie	$R_r = 34,5 \text{ kG/mm}^2$,
wydłużenie równomierne	$a' = 29,5\%$.

Próbki z mosiądzu poddano wyżarzaniu w czasie godziny przy temperaturze 650°C . Po wyżarzeniu materiał posiadał następujące własności: $R_{pl} = 9,5 \text{ kG/mm}^2$, $R_r = 32 \text{ kG/mm}^2$ oraz $a' = 66,5\%$.

Do zginania próbek używano przyrządu, w którym realizowane jest zginanie walcowe. Przyrząd zamocowuje się w uchwytach zrywarki i poddaje obciążeniu rozciągającemu. Jednocześnie układ piszący maszyny kreśli wykres siły obciążającej w zależności od przesunięcia uchwytów. Krzywe $M/W = f(g/2\varrho_0)$ przy $b/g = \text{const}$ wyznaczano z wykresów otrzymanych ze zrywarki. Dokładny opis przyrządu jak również jego działania znajduje się w pracach [3] i [5].

3. Deformacja przekroju poprzecznego zginanego pasa

W miarę wzrostu krzywizny zginanego pasa zachodzi równolegle deformacja przekroju poprzecznego. Dla dostatecznie szerokich pasów obserwuje się istnienie dwu stref brzegowych po obu stronach próbki, gdzie występuje w przybliżeniu

plaski stan naprężenia. Strefy te łączą się ze strefą, w której panuje płaski stan odkształcenia. Charakter przejścia od stref brzegowych do strefy płaskiego stanu naprężenia jest ciągły. Dla dostatecznie wąskich próbek strefy brzegowe spotykają się, tworząc kształt, który w pierwszym przybliżeniu można uważać za kołowy.

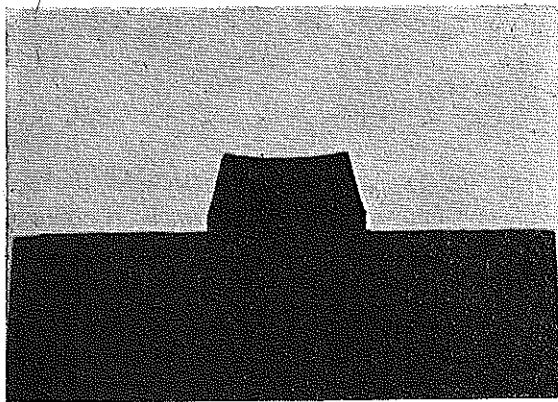
Promień zaokrąglenia przekroju poprzecznego wąskiej belki jest podawany w wielu pracach i wynosi:

$$(3.1) \quad r_0 = \varrho_0/\nu,$$

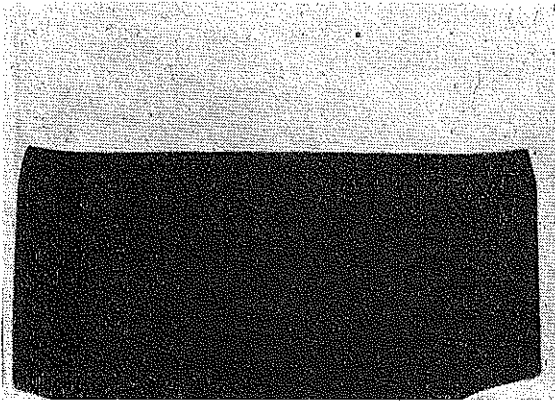
gdy $\nu = 0,5$, $r_0 \approx 2\varrho_0$, gdzie ν oznacza współczynnik Poissona.

Z proporcji otrzymujemy zależność $a = f(b, \varrho_0)$:

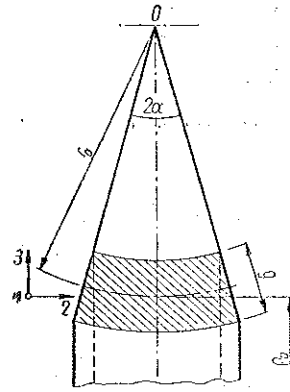
$$(3.2) \quad 2\alpha = 180^\circ \frac{b}{\pi r_0} = 180^\circ \nu \frac{b}{\pi \varrho_0}$$



Rys. 3. Kształt poprzeczny zagiętej próbki stalowej, strefy brzegowe połączone, $b/g = 2,05$ i $g/2\varrho_0 = 0,32$



Rys. 2. Kształt poprzeczny zagiętej próbki stalowej z widocznymi strefami brzegowymi, $b/g = 14,48$ i $g/2\varrho_0 = 0,17$



Rys. 4. Deformacja przekroju poprzecznego wąskiej belki

1. Kierunek obwodowy 2. Kierunek poprzeczny 3. Kierunek promieniowy

Dla dostatecznie szerokich pasów deformację przekroju poprzecznego daje się przedstawić zgodnie z rys. 5. Na rysunku tym a oznacza strefę płaskiego stanu odkształcenia, $e+c$ strefę brzegową oraz

$$(3.3) \quad b \approx a + 2(e+c)$$

Dobre przybliżenie kształtu strefy brzegowej daje założenie, iż kąt α powiększa się proporcjonalnie do odciętej x , zmieniając się od $\alpha = 0$ dla $x = 0$ do $\alpha = \alpha_0$ dla $x = e + c$; mamy więc

$$(3.4) \quad \frac{da}{dy} = C_0 x$$

lub po scałkowaniu

$$(3.5) \quad a = \frac{C_0}{2} x^2.$$

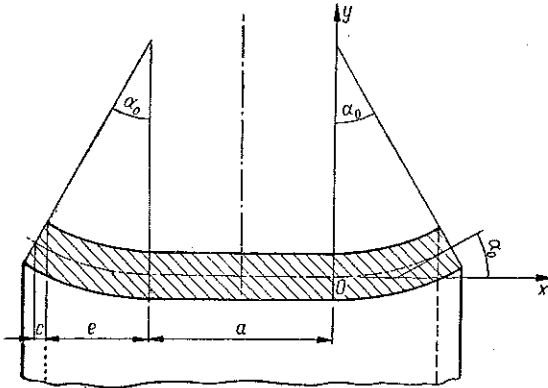
Jest to więc parabola drugiego stopnia. Stałą C_0 łatwo wyznaczyć z warunków brzegowych. Krzywiznę dla strefy brzegowej wzdłuż odciętej x otrzymuje się wykorzystując zależności (3.4) oraz różniczkowy wzór na krzywiznę:

$$(3.6) \quad \frac{1}{r} = \frac{C_0}{(1 + C_0^2 x^2)^{2/3}}.$$

Wykonano dokładne pomiary dwu wielkości charakteryzujących kształt zdeformowanego przekroju poprzecznego, a mianowicie

$$\frac{a}{g} = f\left(\frac{b}{g}\right), \quad 2a = f\left(\frac{b}{g}\right)$$

$$\text{dla } \frac{g}{2\varrho_0} = \text{const.}$$



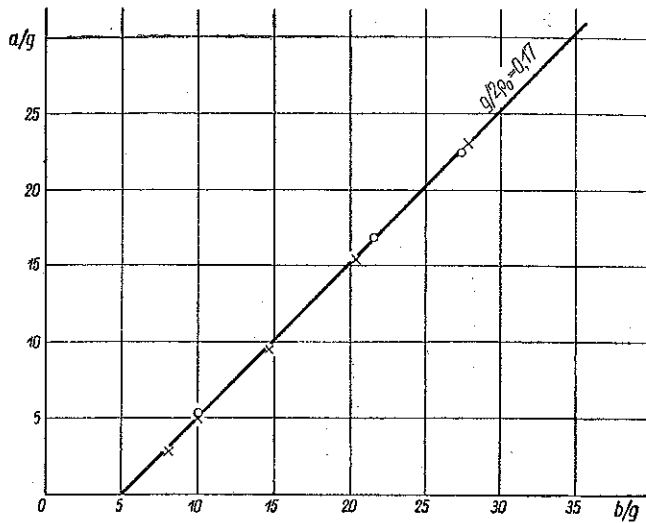
Rys. 5 Deformacja przekroju poprzecznego szerokiego pasa

Pomiary przeprowadzono na odpowiednio powiększonych zdjęciach fotograficznych, ponieważ metoda ta zapewniała wystarczającą dokładność. Na rysunku 6 przedstawiono wykres powiększania się strefy płaskiego stanu odkształcania w miarę zwiększania się szerokości próbek. Zarówno dla stali jak i dla mosiądzu jest to linia prosta nachylona pod kątem 45° , przecinająca oś odciętych w punkcie $b/g = 5$ ($a/g = 0$ dla $b/g = 5$). Można stwierdzić więc, że szerokość stref brzegowych pozostaje stała wraz ze wzrostem szerokości zginanego pasma i wielkość każdej z nich wynosi $2,5 g$. Stwierdzono również brak zależności szerokości tej strefy od krzywiznienia w dużym ich zakresie z wyjątkiem małych wartości, gdy strefa dopiero formuje się.

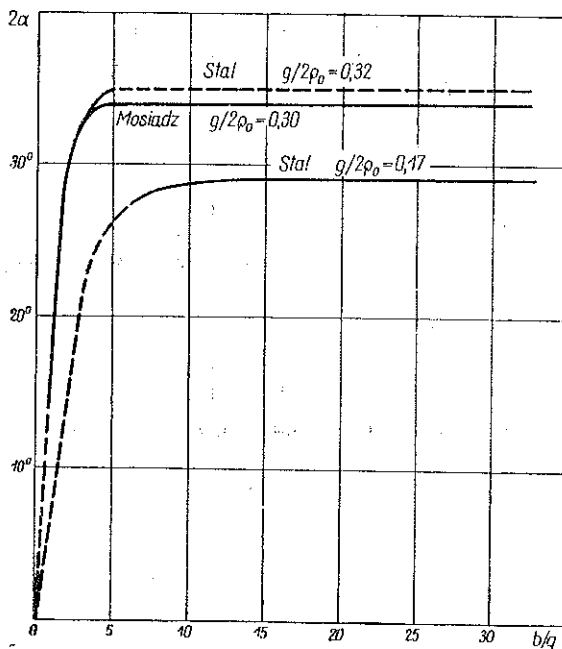
W świetle tych wyników należy podkreślić ograniczoną stosowalność wzoru (3.2), który jest w zasadzie słuszny dla $b \leq 5 g$ oraz $g/2\varrho_0 \leq 0,11$, a więc w zakresie małych krzywizn zginanego pasma.

Na rysunku 7 podano wykres zmiany nachylenia ścian bocznych stref brzegowych dla stali i mosiądzu w zależności od szerokości próbek przy $g/2\varrho_0 = \text{const}$. Z wykresu wynika, że dla wartości $b/g < 5$ kąt 2α rośnie; możliwa jest wówczas

swobodna zmiana wymiarów poprzecznych. Dla $b/g > 5$ pojawia się strefa płaskiego stanu odkształcania, dalszy przyrost kąta jest utrudniony i jego wartość ustala się



Rys. 6. Wykres $a/g = f(b/g)$, x — miękka stal, o — mosiądz

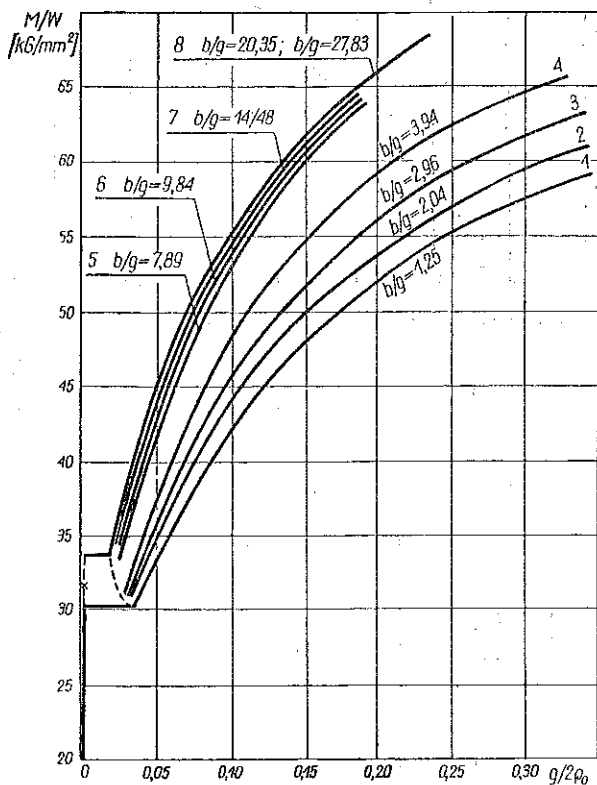


Rys. 7. Wykresy $2\alpha = f(b/g)$ dla $g/2\rho_0 = \text{const}$

dla poszczególnych $g/2\rho_0 = \text{const}$. Przyrost kąta w miarę wzrostu krzywizny giętego pasa jest stosunkowo powolny.

4. Wpływ szerokości na M/W

Jak wspomniano poprzednio, po opracowaniu danych doświadczalnych zbudowano powierzchnie gięcia dla dwu materiałów: miękkiej stali i miedzi. Na rysunku 8 przedstawiono rzuty przekrojów powierzchni gięcia miękkiej stali na płaszczyznę M/W , $g/2\rho_0$ dla poszczególnych rosnących wartości b/g . Łatwo zauważyć, iż w miarę wzrostu wartości b/g zachodzi stopniowe przejście od płaskiego stanu naprężenia do płaskiego stanu odkształcania w części środkowej zginanego pasma, a tym samym widoczny jest wzrost wartości M/W .

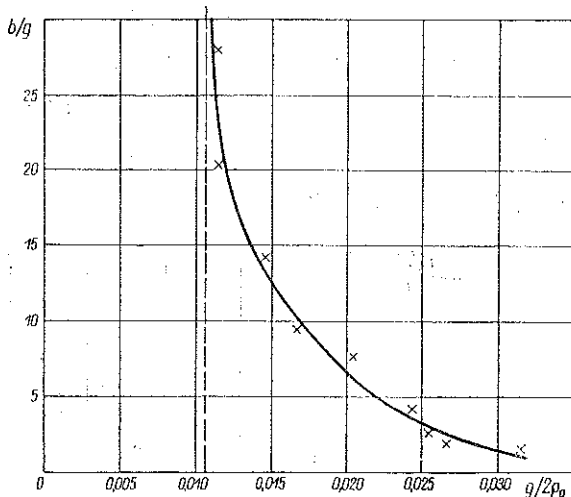


Rys. 8. Przekroje powierzchni gięcia miękkiej stali zrzutowane na płaszczyznę M/W , $g/2\rho_0$ dla poszczególnych wartości b/g ; x — punkt obliczony analitycznie $M/W = 4\sigma_p/3$. Krzywa 8 — krzywa gięcia nieskończenie szerokiego pasma

Wartość M/W można nazwać zastępczym naprężeniem przy gięciu, posiada bowiem wymiar kG/mm^2 . Iloraz ten może jedynie służyć jako pewna wartość porównawcza, ponieważ nie opisuje rzeczywistego naprężenia w zginanym materiale.

Przy wzroście b/g krzywe gięcia zdążają do krzywej otrzymanej dla dostatecznie szerokiego pasma; na rys. 8 jest to krzywa oznaczona cyfrą 8, otrzymana dla dwu

wartości $b/g = 20,35$ i $b/g = 27,83$, a właściwie są to dwie krzywe pokrywające się lub dwa przekroje powierzchni gięcia przy dwu różnych wartościach b/g . Taką krzywą można nazwać krzywą gięcia dla nieskończenie szerokiego pasma. Musi zatem istnieć taka wartość b/g , powyżej której rzuty na płaszczyznę M/W , $g/2\rho_0$ pokrywają się, tym samym powierzchnia gięcia powyżej tej wartości staje się powierzchnią walcową. Takie wartości b/g zarówno dla miękkiej stali jak i dla mosiądzu zostaną podane poniżej. Aby nie zaciemniać wykresów $M/W = f(g/2\rho_0)$, dla miękkiej stali wrysowano schematycznie tylko dwa przystanki plastyczne, dolny dla małej szerokości giętego pasma $b/g = 1,25$ oraz górny dla krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma $b/g > 20,35$.



Rys. 9. Wykres zmiany długości przystanku plastycznego w zależności od b/g ; x punkty otrzymane eksperymentalnie

Można zaobserwować, że długości przystanków plastycznych wyraźnie maleją wraz ze wzrostem b/g dążąc do pewnej wartości na krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma. Zmianę długości przystanków plastycznych naniesiono jako linię kreskową na rys. 8. Po dokładnych pomiarach przystanku plastycznego sporządzono wykres jego długości w zależności od b/g przedstawiony na rys. 9.

Wykres na rysunku 9, jak łatwo zauważyć, jest odpowiednio powiększonym rzutem powierzchni gięcia na płaszczyznę b/g , $g/2\rho_0$, gdzie połączono linią tylko końce przystanków plastycznych. W ten sam sposób sporządzono krzywe gięcia mosiądzu przy rosnących wartościach b/g . Krzywe te przedstawiono na rys. 10. Z ich analizy wynika, że charakter zachodzących zjawisk jest ten sam co dla stali. A więc istnieje taka wartość b/g , powyżej której powierzchnia gięcia staje się powierzchnią walcową. Krzywa gięcia oznaczona numerem 5 na rys. 10 pokrywa się z trzema rzutami przekrojów powierzchni gięcia, a mianowicie

$$b/g = 10,17, \quad b/g = 21,53 \quad \text{oraz} \quad b/g = 27,40.$$

Dla mosiądzu więc powierzchnia gięcia staje się powierzchnią walcową powyżej wartości $b/g = 10,17$. Dalszy przyrost szerokości nie powoduje wzrostu momentu zginającego, który przypada na jednostkę szerokości giętego pasma.

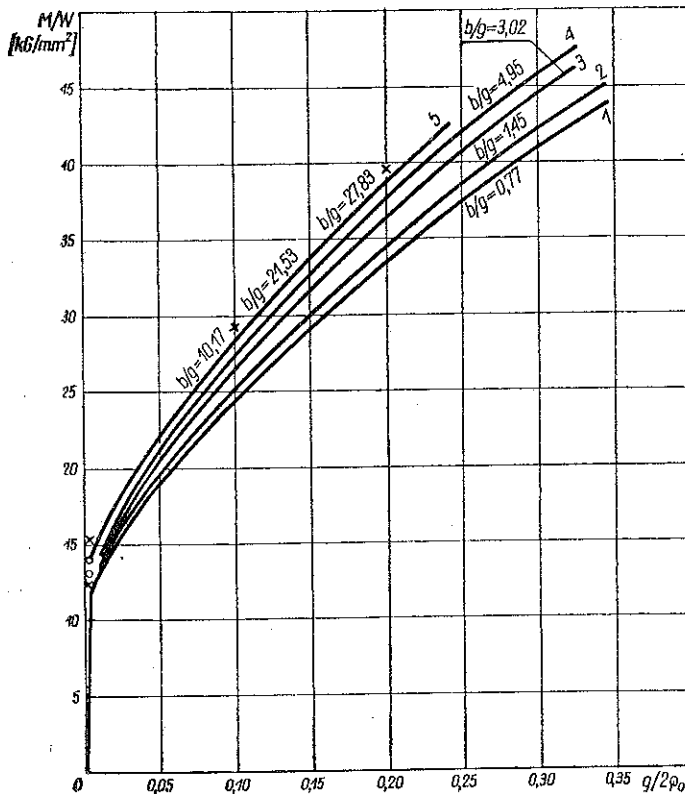
Na podstawie wykresów z rys. 8 i 10 można sporządzić wykresy spadku wartości M/W w porównaniu z krzywą zginania nieskończenie szerokiego pasma [$-\Delta \times (M/W) = f(g/2\rho_0)$, $b/g = \text{const}$] w miarę zmniejszania się b/g dla różnych wartości

$g/2 \varrho_0$. Oczywiście przyrost $\Delta (M/W)$ jest największy dla pasów stosunkowo wąskich. Wykresy przedstawiono na rys. 11.

Większą wartość ma jednak porównanie krzywych gięcia w stosunku do krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma (rys. 13). Po wprowadzeniu oznaczeń podanych na rysunku 12 i wprowadzając współczynnik osłabienia

$$(4.1) \quad K = \frac{M/W}{(M/W)_{\max}}$$

otrzymujemy wykresy $K = f(g/2\varrho_0)$, $b/g = \text{const}$.



Rys. 10. Przekroje powierzchni gięcia mosiądzu zrzutowane na płaszczyznę M/W , $g/2\varrho_0$ dla poszczególnych wartości b/g ; x — punkty obliczone analitycznie, o odpowiadające im punkty otrzymane eksperymentalnie. Krzywa 5 — krzywa gięcia nieskończenie szerokiego pasma

Przy założeniu, że mamy prostokątny rozkład naprężeń σ_1 w zginanym pasie (co jest równoważne całkowitemu uplastycznieniu przekroju dla materiału bez umocnienia), znane są rozwiązania dla belki (płaski stan naprężenia) oraz dla płyty

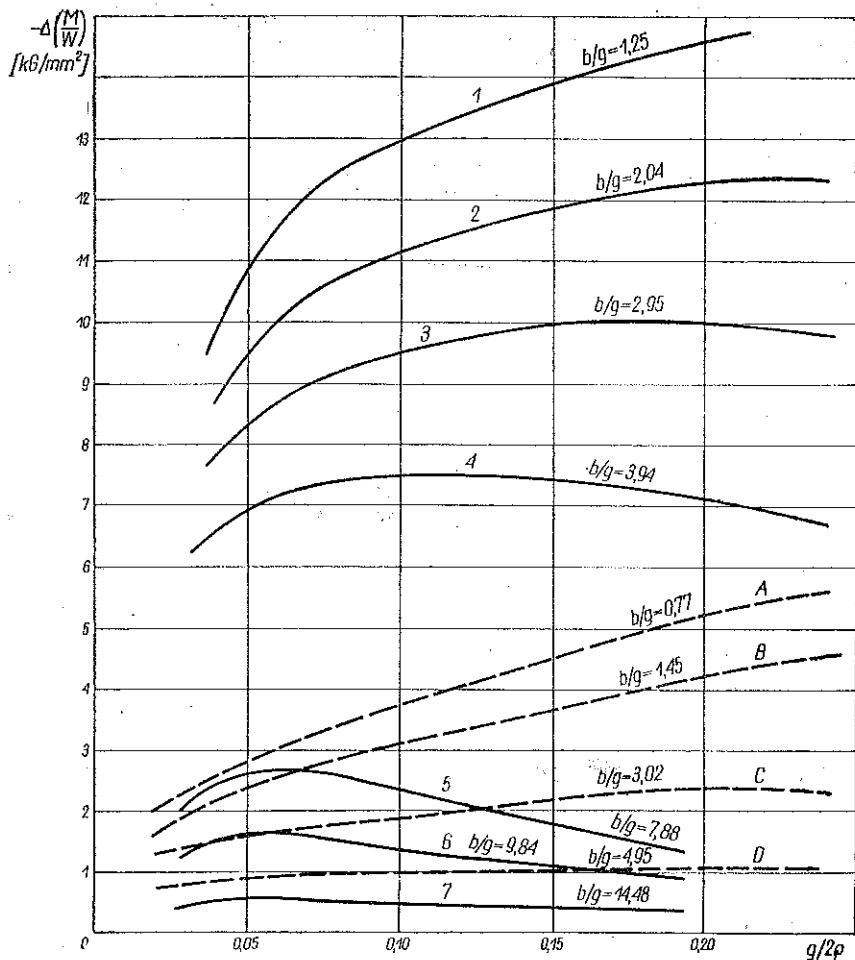
(płaski stan odkształcenia). Są to rozwiązania R. Hilla i J. D. Lubahn, oraz G. Sachs'a

$$(4.2) \quad M_g = \frac{bg^2}{4} \sigma_p \Rightarrow \frac{M_g}{W} = \frac{3}{2} \sigma_p$$

$$(4.3) \quad (M_g)_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{bg^2}{4} \sigma_p \Rightarrow \left(\frac{M_g}{W} \right)_{\max} = \sqrt{3} \sigma_p$$

Stąd więc

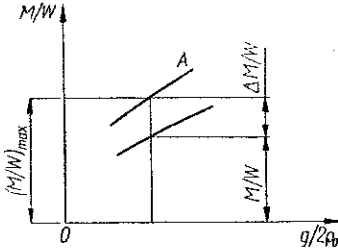
$$(4.4) \quad K = \frac{M_g/W}{(M_g/W)_{\max}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



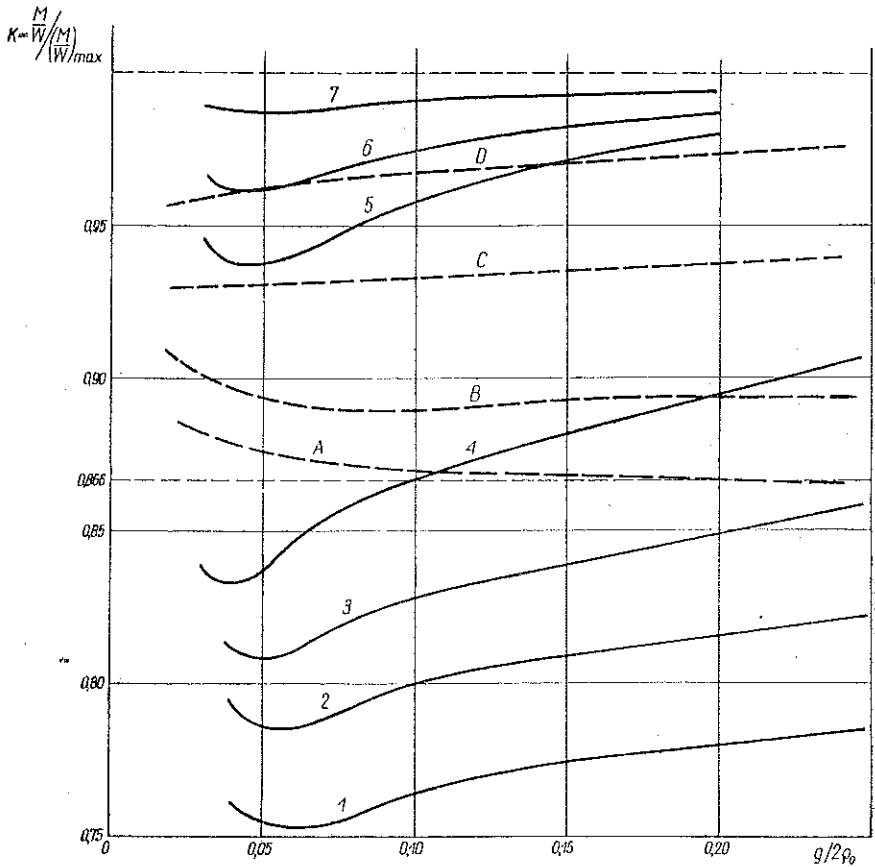
Rys. 11. Wykresy $-\Delta (M/W) = f(g/2p)$, $b/g = \text{const}$. Krzywe od 1 do 7 dla miękkiej stali, krzywe A, B, C, D dla miedzi

Wartość współczynnika $K = 1$ odpowiada krzywym «nieosłabionym», tzn. krzywym gięcia dla nieskończenie szerokiego pasma. Na wykresie (rys. 13) podano

również prostą $K = \sqrt{3}/2 \approx 0,866$. Współczynnik osłabienia K miękkiej stali obniża się dość znacznie dochodząc do wartości $K = 0,75$ dla $b/g = 1,25$, istnieje więc osłabienie około 25% w stosunku do pasma o nieskończenie dużej szerokości. Dla miedzi czynnik osłabienia nie osiąga tak niskich wartości i dochodzi do $K = 0,86$ przy $b/g = 0,77$. W celu praktycznego wykorzystania można przyjąć, iż współczynnik K pozostaje stały w czasie procesu zginania dla poszczególnych wartości b/g , co jest widoczne szczególnie w przypadku miedzi. Na podstawie tego założenia spo-

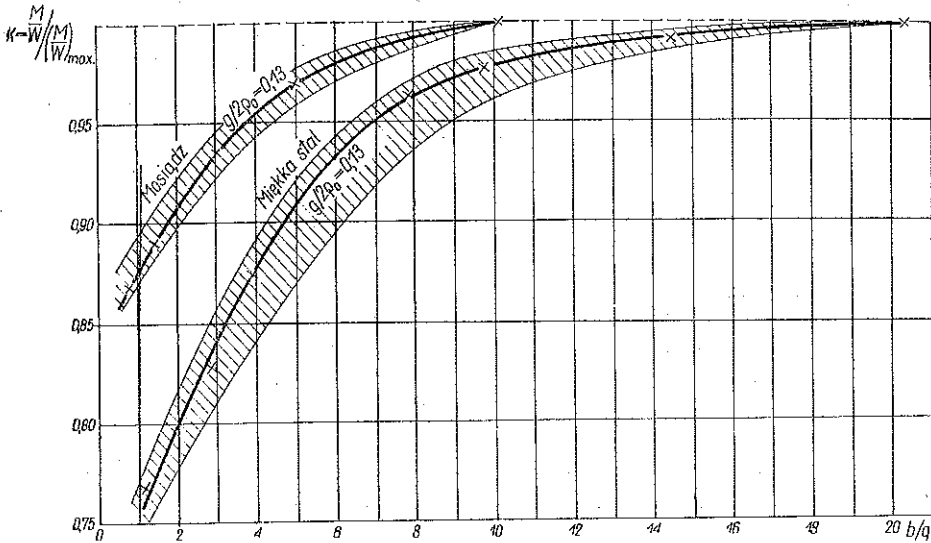


Rys. 12. Schematyczne przedstawienie oznaczeń przyjętych w definicji K . A krzywa gięcia nieskończenie szerokiego pasma



Rys. 13. Wykresy współczynnika osłabienia $K = f(g/2g_0)$, $b/g = \text{const.}$ Poszczególne wartości b/g podano na rys. 11

rzędzono wykres $K = f(b/g)$ przy średniej wartości $g/2\varrho_0 = 0,13$ dla obu badanych materiałów (rys. 14).



Rys. 14. Wykresy $K = f(b/g)$ dla miękkiej stali i mosiądzu $g/2\varrho_0 = 0,13$

Obszary zakreskowane przedstawiają zakres zmienności współczynnika osłabienia K przy poszczególnych wartościach $g/2\varrho_0$. Punkty, w których krzywe osiągną prostą $K = 1$, wyznaczają takie wartości b/g powierzchni gięcia, powyżej których powierzchnia ta staje się walcowa. Wartość tę można oznaczyć przez $(b/g)_0$. Wszystkie przekroje powierzchni gięcia dla wartości $b/g > (b/g)_0$ zrzutowane na płaszczyznę M/W , $g/2\varrho_0$ dają tę samą krzywą; krzywą gięcia nieskończenie szerokiego pasma.

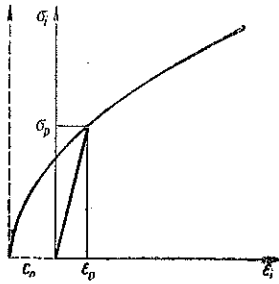
Otrzymane doświadczalnie wartości $(b/g)_0$ wynoszą: dla miękkiej stali $(b/g)_0 \approx 20$, dla mosiądzu $(b/g)_0 \approx 10$. Zakładając znajomość krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma oraz mając dany wykres $K = f(b/g)$, łatwo daje się znaleźć krzywą gięcia pasma o dowolnej szerokości. W celu łatwiejszego posługiwania się wykresem $K = f(b/g)$ uzupełniono go tablicą 1.

Tablica 1. Wartość współczynnika osłabienia K dla poszczególnych wartości b/g przy średniej wartości $g/2\varrho_0 = 0,13$ dla przedziałów: miękka stal $0,03 < g/2\varrho_0 < 0,30$, mosiądz $0,02 < g/2\varrho_0 < 0,30$

b/g		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
K	Stal	—	0,755	0,779	0,802	0,824	0,843	0,863	0,877	0,893	0,907
	Mosiądz	0,860	0,876	0,891	0,906	0,920	0,933	0,944	0,954	0,963	0,970
b/g		5,5	6,0	7,0	8,0	9,0	10	11	12	15	20
K	Stal	0,920	0,932	0,952	0,965	0,975	0,980	0,984	0,987	0,992	1,000
	Mosiądz	0,976	0,980	0,987	0,993	0,997	1,000	—	—	—	—

5. Analityczne obliczenie krzywej gięcia dla materiału ze wzmocnieniem

Krzywa podstawowa, tj. krzywa gięcia nieskończenie szerokiego pasma może być otrzymana na drodze empirycznej lub analitycznej. Na podstawie istniejących rozwiązań opracowano wykreślno-analityczną metodę obliczania krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma z uwzględnieniem umocnienia się materiału. Prawo umocnienia przyjmiemy w postaci dającej dostateczną dokładność np. dla mosiądzu. Można je stosować zarówno w strefie rozciąganej jak i ściskanej zginanego pasma. Mianowicie przyjmujemy



Rys. 15. Wykres zależności $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ dla przyjętego modelu (5.1)

$$(5.1) \quad \epsilon_i = C\sigma_i^m - C_0, \quad \sigma_i = \frac{1}{m\sqrt{C}}(\epsilon_i + C_0),$$

gdzie ϵ_i oznacza intensywność deformacji, σ_i intensywność naprężenia oraz C, C_0, m stałe materiałowe.

Założono nieściśliwość oraz warunek płaskiego stanu odkształcenia w zginanym pasie. Kierunki główne naprężenia i odkształcenia podano na rys. 4 i 16.

$$(5.2) \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3).$$

W zakresie dużych odkształceń zginanych pasów naprężenie promieniowe σ_3 nie jest już pomijalnie małe w porównaniu z pozostałymi składowymi i należy je uwzględnić. Jako pierwsze przybliżenie przyjęto wartość naprężenia promieniowego σ_3 z rozwiązania R. Hilla dla materiału bez umocnienia:

strefa rozciągana

$$(5.3.1) \quad \sigma_3' = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i \ln \frac{\varrho_z}{\varrho}, \quad \varrho_z > \varrho > \varrho_0;$$

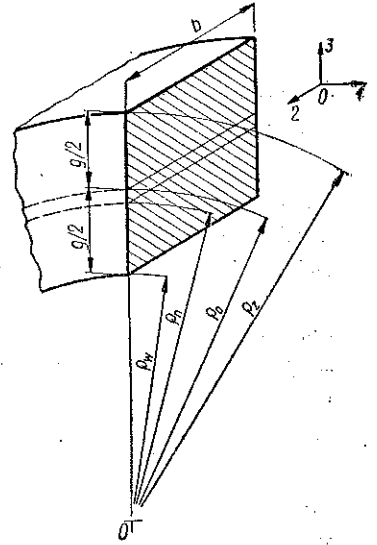
strefa ściskana

$$(5.3.2) \quad \sigma_3'' = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i \ln \frac{\varrho}{\varrho_w}, \quad \varrho_n > \varrho > \varrho_w.$$

Granice zmienności ϱ zostały pokazane na rys. 16.

Na rysunku tym ϱ_n oznacza chwilowy promień warstwy obojętnej, ϱ_w promień wewnętrznej powierzchni zginanego pasma, ϱ_z promień zewnętrznej powierzchni zginanego pasma. Wskaźnikami przy poszczególnych wartościach oznaczono strefy o różnych znakach naprężenia σ_1 , np. σ_3' oznacza strefę rozciąganą, a σ_3'' strefę ściskaną. Mamy również

$$(5.4) \quad \varrho_n = \sqrt{\varrho_w \varrho_z}, \quad \varrho_n < \varrho_0.$$



Rys. 16. Oznaczenia przyjęte w zależnościach

Wzór (5.4) określa położenie warstwy, w której naprężenie σ_1 zmienia znak (rozwiązanie R. Hilla, J. D. Lubahn i G. Sachsa). Jako granicę całkowania naprężeń przyjęto wartości ϱ podane wraz ze wzorami (5.3), opuszczając warstwę $\varrho_0 - \varrho_n$, w której materiał jest poddawany zmiennym naprężeniom i odkształceniom wraz z postępującym procesem zginania. Jako warunek plastyczności przyjęto warunek Hubera-Misesa zapisany w głównych naprężeniach:

$$(5.5) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Po podstawieniu zależności (5.2) do warunku plastyczności (5.5) otrzymamy (5.6)

$$(5.6) \quad \sigma_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3),$$

stąd

$$(5.6.1) \quad \sigma'_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i + \sigma_3, \quad \sigma''_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i + \sigma_3.$$

Po wykorzystaniu zależności (5.3.1) i (5.3.2) otrzymamy

$$(5.7) \quad \sigma'_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \left(1 - \ln \frac{\varrho_z}{\varrho}\right), \quad \sigma''_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \left(1 + \ln \frac{\varrho}{\varrho_w}\right).$$

Obecnie wykorzystamy zależność określającą intensywność odkształcenia dla kierunków głównych

$$(5.8) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}.$$

Uwzględniając warunek nieściśliwości otrzymamy $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$ przy $\varepsilon_2 = 0$. Wprowadzamy logarytmiczną miarę odkształcenia

$$(5.9) \quad \varepsilon'_1 = \ln \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad \varepsilon''_1 = \ln \frac{\varrho_0}{\varrho}.$$

Po uwzględnieniu zależności (5.9) oraz warunku nieściśliwości w wyrażeniu (5.8) otrzymamy

$$(5.10) \quad \varepsilon'_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

$$\varepsilon''_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\varrho_0}{\varrho}.$$

Po wykorzystaniu (5.1), (5.7), (5.10) i odpowiednim przekształceniu otrzymujemy

$$(5.11) \quad \sigma'_1 = C_1 \left(\ln C_2 \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{1/m} \ln e \frac{\varrho}{\varrho_z}, \quad \varrho_z > \varrho > \varrho'_p,$$

$$\sigma''_1 = -C_1 \left(\ln C_2 \frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{1/m} \ln e \frac{\varrho}{\varrho_w}, \quad \varrho''_p > \varrho > \varrho_w,$$

gdzie ϱ'_p i ϱ''_p są to odpowiednio promienie rozgraniczające strefy plastyczne od sprężystej.

Wzory (5.11) są spełnione tylko w strefach plastycznych zginanego pasma

$$(5.12) \quad C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{C\sqrt{3}} \right)^{1/m}$$

$$(5.13) \quad C_2 = e^{(\sqrt{3}/2)C_0}$$

Po przeprowadzeniu analogicznego postępowania do poprzedniego znajdujemy wartości $(\sigma'_1)_s$ i $(\sigma''_1)_s$ w zakresie sprężystym zginanego pasma

$$(5.14) \quad (\sigma'_1)_s = \frac{4}{3} E \ln \frac{\varrho}{\varrho_0} \ln e \frac{\varrho}{\varrho_z}, \quad \varrho_0 < \varrho < \varrho'_p,$$

$$(\sigma''_1)_s = -\frac{4}{3} E \ln \frac{\varrho_0}{\varrho} \ln e \frac{\varrho}{\varrho_w}, \quad \varrho''_p < \varrho < \varrho_n.$$

Aby rozwiązanie miało wspólny punkt na wykresie M , $1/\varrho_0$ w zależnościach (5.14) przyjęto, że współczynnik Poissona jest równy $\nu = 0,5$. Jak wynika z doświadczeń, tego rodzaju założenie nie powoduje zbyt dużych błędów.

Wzajemną granicę między strefami sprężystą i plastyczną łatwo wyznaczyć zarówno dla obszaru rozciągania jak i ściskania zginanego pasma. Wykorzystując zależność (5.10) oraz traktując promień warstwy środkowej ϱ_0 jako parametr, mamy

$$(5.15) \quad \varrho'_p = \varrho_0 e^{(\sqrt{3}/2)\varepsilon_p},$$

$$\varrho''_p = \varrho_0 e^{-(\sqrt{3}/2)\varepsilon_p}.$$

Wartość momentów gnących dla obu stref (rozciąganej i ściskanej) otrzymamy całkując naprężenie σ_1 po grubości zginanego pasma

$$(5.16) \quad M' = b \left[\int_{\varrho_w}^{\varrho'_p} (\sigma'_1)_s (\varrho - \varrho_0) d\varrho + \int_{\varrho'_p}^{\varrho_z} \sigma'_1 (\varrho - \varrho_0) d\varrho \right],$$

$$M'' = b \left[\int_{\varrho''_p}^{\varrho_n} (\sigma''_1)_s (\varrho_0 - \varrho) d\varrho + \int_{\varrho_w}^{\varrho''_p} \sigma''_1 (\varrho_0 - \varrho) d\varrho \right].$$

Suma momentów (5.16) daje całkowity moment zginający

$$(5.17) \quad M = M' + M''.$$

Po podstawieniu zależności (5.11)₁ i (5.14)₁ do (5.16)₁ oraz (5.11)₂ i (5.14)₂ do (5.16)₂ oraz wprowadzeniu uproszczeń, które są możliwe dla strefy sprężystej odpowiednio dla rozciągania i ściskania

$$\ln \frac{\varrho}{\varrho_0} \approx \frac{\varrho}{\varrho_0} - 1, \quad \ln \frac{\varrho_0}{\varrho} \approx \frac{\varrho_0}{\varrho} - 1,$$

otrzymujemy podstawowe wzory, określające momenty gnące stref ściskanej i rozciąganej, prz padające na jednostkę szerokości dla $b/g > (b/g)_0$:

$$(5.18) \quad \frac{M'}{b} = \frac{4}{3} \frac{E}{\varrho_0} \int_{\varrho_0}^{\varrho_p'} (\varrho - \varrho_0)^2 \left(\ln e \frac{\varrho}{\varrho_z} \right) d\varrho + C_1 \int_{\varrho_p'}^{\varrho_z} \left(\ln C_2 \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{1/m} \left(\ln e \frac{\varrho}{\varrho_z} \right) (\varrho - \varrho_0) d\varrho,$$

$$\frac{M''}{b} = \frac{4}{3} E \int_{\varrho_p''}^{\varrho_n} (\varrho_0 - \varrho)^2 \left(\ln e \frac{\varrho}{\varrho_w} \right) \frac{d\varrho}{\varrho} + C_1 \int_{\varrho_w}^{\varrho_p''} \left(\ln C_2 \frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{1/m} \left(\ln e \frac{\varrho}{\varrho_w} \right) (\varrho_0 - \varrho) d\varrho.$$

Gdy zginane pasmo znajduje się jeszcze w całości w stanie sprężystym, całki części plastycznych momentu są tożsamościowo równe zero. W miarę wzrostu krzywizny zginanego pasma grubość strefy sprężystej bardzo prędko maleje, od pewnego momentu więc całki części sprężystych momentu można pominąć. Graniczną wartością w tym przypadku jest punkt, gdzie $\varrho_p'' = \varrho_n$, a więc jest to punkt spotkania się promienia warstwy obojętnej z promieniem rozgraniczającym obszar uplastyczniony od sprężystego w ściskanej części zginanego pasma.

Jeżeli zginane pasmo znajduje się wyłącznie w stanie sprężystym, równania (5.18) przyjmują postać

$$(5.19) \quad \frac{M'}{b} = \frac{4}{3} \frac{E}{\varrho_0 \varrho_z} \int_{\varrho_0}^{\varrho_z} (\varrho - \varrho_0)^2 \varrho d\varrho, \quad \frac{M''}{b} = \frac{4}{3} \frac{E}{\varrho_w} \int_{\varrho_w}^{\varrho_0} (\varrho_0 - \varrho)^2 d\varrho.$$

Po scałkowaniu i dodaniu funkcji (5.19) otrzymano następujące zależności $M = f(g/2\varrho_0)$:

$$(5.20) \quad M = \frac{2}{9} Ebg^2 \frac{\eta}{1-\eta^2},$$

gdzie oznaczono $\eta = g/2\varrho_0$, lub

$$(5.21) \quad \frac{M}{W} = \frac{4}{3} E \frac{\eta}{1-\eta^2}.$$

Ze wzorów (5.20) i (5.21) wynika, że ściśle biorąc zależność $M/W = f(g/2\varrho_0)$ nawet w zakresie sprężystym jest nieliniowa, jednak wyraz η^2 można oczywiście w tym zakresie (małe wartości $g/2\varrho_0$) pominąć jako małą drugiego rzędu.

Przy większych krzywiznach, gdy warstwa sprężysta stanowi tylko części grubości zginanego pasma, naprężenie promieniowe σ_3 jest stosunkowo duże, całki części sprężystych momentu należy całkować w postaciach podanych we wzorach (5.18). Po wykonaniu całkowania otrzymamy

$$(5.22) \quad M' = \frac{4}{3} Eb \left[\frac{\rho}{\rho_0} \left[\frac{\rho^2}{3} \left(\ln e^{2/3} \frac{\rho}{\rho_z} \right) - \rho_0 \rho \ln \frac{e^{1/2}}{\rho_z} \rho + \rho_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_z} \right] \right]_{\rho_0}^{\rho_p},$$

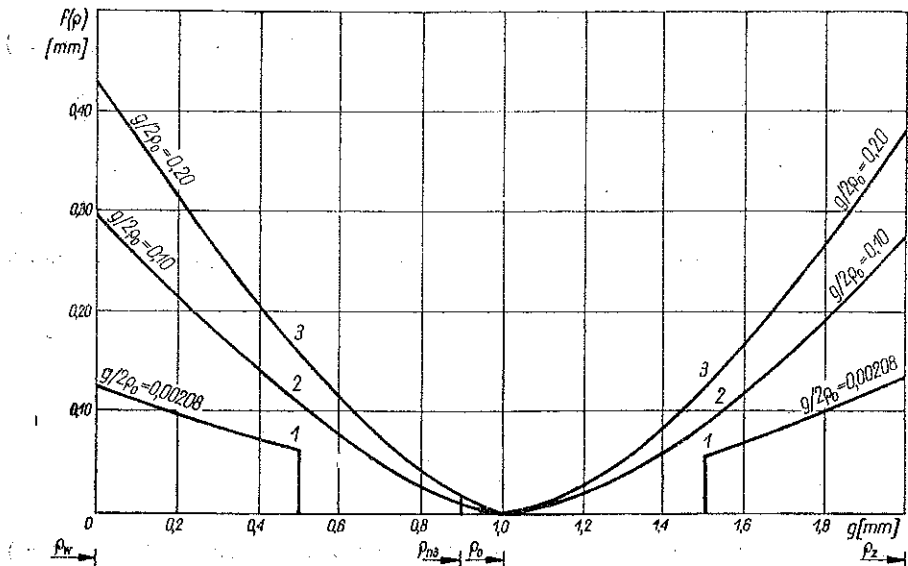
$$M'' = \frac{4}{3} Eb \left[\frac{1}{2} \rho^2 \left(\ln e^{1/2} \frac{\rho}{\rho_w} \right) - 2\rho_0 \rho \left(\ln \frac{\rho}{\rho_w} \right) + \rho_0^2 \ln \rho \ln \frac{e}{\rho_w} \rho^{3/4} \right]_{\rho_0}^{\rho_n}.$$

Całki odnoszące się do części plastycznych momentu nie całkują się w postaci zamkniętej; całkując przez części otrzymuje się po n całkowaniach

$$(5.23) \quad M = \Psi(\rho) + f(\rho) \xi(\rho) d\rho,$$

gdzie przez $f(\rho)$ oznaczono funkcję podcałkową całek części plastycznych momentu zginającego. Gdy $n > 2$, funkcja $\Psi(\rho)$ staje się dość skomplikowana. Jedną z możliwych metod znalezienia w prosty sposób wartości całek części plastycznych momentu zginającego jest metoda przedstawiona niżej.

Obierając pewną wartość promienia warstwy środkowej ρ_0 , traktowanego w równaniach jako parametr przy znanej grubości zginanego materiału i szerokości $b/g \geq (b/g)_0$, można znaleźć wartości granic całkowania: $\rho_w, \rho_p', \rho_n, \rho_p''$ i ρ_z . Przy przyjęciu prawa umocnienia o postaci (5.1) dla wyprowadzonych zależności można wykreślić funkcje podcałkowe całek części plastycznych momentu zginającego



Rys. 17. Wykresy funkcji podcałkowych części plastycznych momentu zginającego dla próbek mosiężnej o grubości 2 mm, $b/g < (b/g)_0$

w uprzednio obliczonych granicach dla strefy ściskanej i rozciąganej. Płanimetrując wykreślone funkcje, otrzymuje się wartości części plastycznych momentu zginającego. Wartości części sprężystych momentu zginającego znajdujemy na podstawie wzorów (5.22)₁ i (5.22)₂. Po dodaniu tych czterech wielkości otrzymuje się wartość momentu zginanego dla danej wartości $g/2\varrho_0$, a więc punkt na wykresie $M/W = f(g/2\varrho_0)$ krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma. Jest możliwe więc otrzymanie w ten sposób krzywej gięcia nieskończenie szerokiego pasma na drodze wykreślno-analitycznej. Obliczono tą metodą trzy punkty wykresu zginania dla badanego mosiądzu, którego pozostałe własności są następujące: $\varepsilon_p = 0,0012$, $\sigma_p = 9,5 \text{ kG/mm}^2$, $E = 0,792 \cdot 10^4 \text{ kG/mm}^2$. Prawo umocnienia dla tego materiału przyjmuje postać

$$(5.24) \quad \varepsilon_i = 0,00123 \sigma_i^{1,58} - 0,04192,$$

która dostatecznie dokładnie przybliża rzeczywistą krzywą rozciągania.

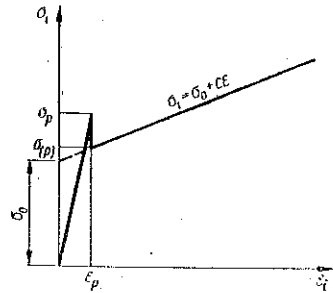
Na rysunku 17 przedstawiono wykresy funkcji podcałkowych dla obliczonych trzech punktów z podaniem granic całkowania; wartości całek sprężystych obliczono z zależności (5.22)₁ i (5.22)₂. Obliczone w ten sposób punkty zaznaczono krzyżykami na rys. 10. Największą różnicą w stosunku do krzywej eksperymentalnej wynoszącą około 6% otrzymano dla wartości $g/2\varrho_0 = 0,00208$ (pół grubości zginanego pasma znajduje się w stanie sprężystym). Dla dalszych punktów różnice maleją i wynoszą odpowiednio:

$$\frac{g}{2\varrho_0} = 0,10, \quad \Delta \frac{M}{W} = 4,6\%,$$

$$\frac{g}{2\varrho_0} = 0,20, \quad \Delta \frac{M}{W} = 2,3\%.$$

Największą rozbieżność obliczonego momentu zginającego w pobliżu punktu załamania krzywej $M/W = f(g/2\varrho_0)$ należy tłumaczyć niedokładnym odwzorowaniem krzywej $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ w pobliżu punktu $(\sigma_p, \varepsilon_p)$ przez prawo typu (5.1). Gdy prawo umocnienia posiada postać liniową, całki części plastycznych momentu zginającego całkują się w postaci zamkniętej.

Liniowe prawo umocnienia można przyjmować np. dla miękkiej stali, należy jednak pamiętać, aby linia opisująca to prawo przechodziła przez dolną granicę plastyczności (rys. 18).



Rys. 18. Liniowe prawo $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford 1950.
- [2] O. HOFFMAN, G. SACHS, *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, Warszawa 1959.
- [3] J. KLEPACZKO, J. LITOŃSKI, *Własności materiałów przy gięciu walcowym*, Rozpr. Inżyn., 4, 4 (1961).

[4] J. D. LUBAHN, J. D. SACHS, *Bending of an Ideal Plastic Metal*, Trans. ASME, 72 (1950), 201-208.

[5] Z. MARCINIAK, *O uwzględnieniu własności materiałów przy gięciu blach*, Obróbka Plastyczna 2, 1 (1958).

[6] Z. MARCINIAK, *Mechanika procesów tłoczenia blach*, Warszawa 1961.

Резюме

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЛИЯНИЯ ШИРИНЫ ИЗГИБАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ПОЛОСЫ НА ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ В ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Приводятся экспериментальные результаты исследований над поведением изгибаемых цилиндрически полос разной ширины, ограничиваясь полосами прямоугольного сечения. На основании полученных результатов констатируется, что процесс изгиба можно описать поверхностью в трехразмерном пространстве, используя координаты: M/W , $g/2\rho_0$, b/g , где M — изгибающий момент, W — показатель сечения, g — толщина изгибаемой полосы и ρ_0 — радиус срединного слоя изгибаемой полосы.

Приводится анализ деформирования поперечного сечения, изгибаемой полосы для больших и малых значений b/g (относительная ширина полосы), а также анализ влияния ширины на изгибающий момент, приходящийся на единицу ширины изгибаемой полосы.

Для двух материалов: мягкой стали и латуни определяются экспериментально такие максимальные значения $(b/g)_0$, выше которых изгибающий момент, приходящийся на единицу ширины изгибаемой полосы — остается постоянным.

Для мягкой стали $(b/g)_0 \approx 20$, а для латуни $(b/g)_0 \approx 10$.

На основании существующих решений, составляются аналитические зависимости, описывающие процесс изгиба полосы при плоском деформированном состоянии $b/g > (b/g)_0$, с учетом степенного закона упрочнения материала в виде:

$$\varepsilon_i = C\sigma_i^m - C_0.$$

Для значений $b/g < (b/g)_0$ приводится полученный экспериментально коэффициент ослабления K , изгибаемой полосы по отношению к бесконечной полосе.

Представленный в работе графически-аналитический метод дает возможность получить диаграмму $M - 1/\rho_0$ для больших кривизн. Этот метод проверен экспериментально для латуни до значения $g/2\rho_0 = 0,3$ с точностью порядка 5%.

Summary

TESTS OF THE INFLUENCE OF THE WIDTH OF A STRIP SUBJECT TO CYLINDRICAL BENDING ON THE BENDING MOMENT IN THE PLASTIC STATE

The present paper is concerned with the results of an investigation of strips of various width subjected to cylindrical bending. The work is confined to rectangular profiles. On the basis of the results obtained it is found that the bending process can be described by a surface in a three-dimensional space using M/W , $g/2\rho_0$, b/g as coordinates, where M is the bending moment, W — the section index, g — the thickness of the strip, b — its width and ρ_0 — the radius of the middle layer.

The deformation of the cross-section of the strip is analysed for large and small values of b/g (the relative width of the strip). The paper presents also an analysis of the influence of the width

on the bending moment per unit width of the strip. The maximum values of $(b/g)_0$ have been found experimentally for two materials: soft steel and brass. Above these values the bending moment per unit width of the strip remains constant. For mild steel we have $(b/g)_0 \approx 20$ and for brass $(b/g)_0 \approx 10$.

On the basis of the known solutions mathematical relations are proposed to describe the bending process of the strip for plane strain, and assuming, the power law of strain hardening $\varepsilon_i = C\sigma_i^m - C_0$. For the value $b/g < (b/g)_0$ is given the experimental coefficient K of weakening of the bent strip in relation to a strip with infinite width.

The graphoanalytic method proposed enables us to obtain the $M - 1/\varrho_0$ diagram for large curvatures. This method has been verified experimentally for brass up to the value of $g/2\varrho_0 = 0,3$ with the degree of accuracy of the order of 5%.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1962 r.