ZBIGNIEW BACZYŃSKI

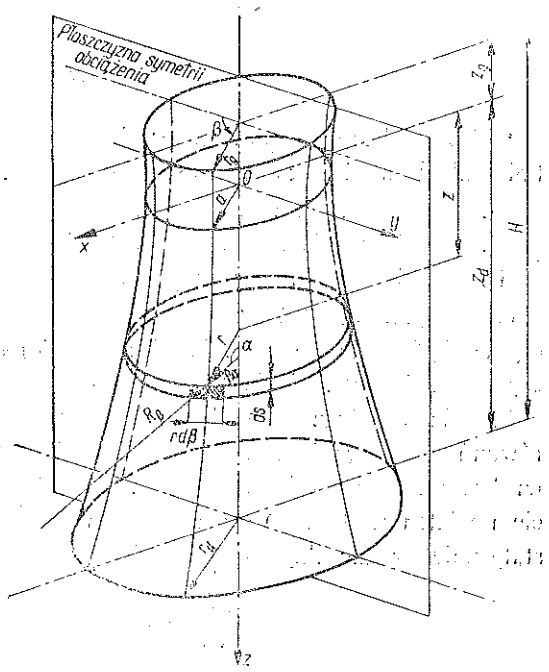
O METODACH I WYNIKACH OBLICZEŃ HIPERBOLOIDALNEJ POWŁOKI OBCIĄŻONEJ PARCIEM WIATRU

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXV

TOM X • ZESZYT 3 • ROK 1962

1. Przedmiotem niniejszej pracy jest przegląd metod i porównanie wyników obliczeń wielkości statycznych hiperboloidalnej powłoki żelbetowej, uzyskanych w oparciu o trzy różne metody. Obliczenia te przeprowadzono dla powłoki o tym samym kształcie, wymiarach oraz wielkości i charakterze obciążenia.

W przypadku powłoki hiperboloidalnej jako komina wieży chłodniczej wpływy obciążeń są różnorodne, a wyznaczenie wielkości statycznych niektórych z nich nasuwa duże trudności. Rozpatrzono tutaj jedynie zasadniczy wpływ obciążeń, parcie wiatru. Ustrój, będący tematem tych rozważań, traktuje się jako pozostający w błonowym stanie napięcia. Czyniąc takie założenia nie uwzględnia się naprężeń wtórnych, jakie wynikają z odkształcenia stanu błonowego, a które, jak wykazują dokładniejsze rozważania nad stanem odkształcenia, [2], [6], nie przekraczają kilku procent. Należy również podkreślić, że nie zajmujemy się tutaj wpływem specjalnie ukształtowanego brzegu górnego i dolnego, które zmieniają stan błonowy wywołując dodatkowe siły i momenty zginające.



Rys. 1

2. Obiektem przyjętym do wyznaczenia wielkości statycznych (sił błonowych) jest żelbetowa powłoka chłodni kominowej w kształcie jednopowłokowej hiperboloidy obrotowej, o równaniu południka

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

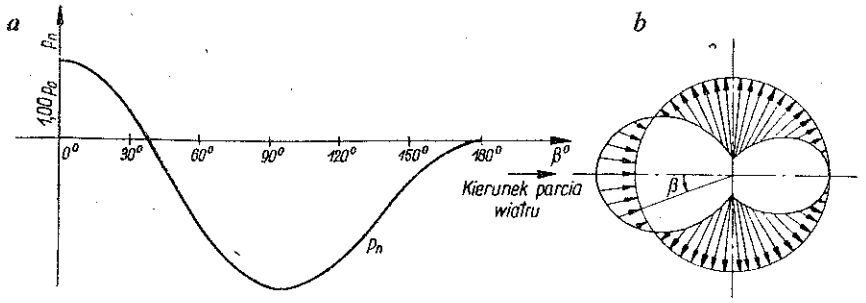
w układzie współrzędnych prostokątnych (rys. 1). Przyjęto dla powłoki następujące wielkości geometryczne: $H = 52{,}20$ m, $a = 11{,}90$ m, $r_d = 20{,}95$ m, $r_g = 12{,}30$ m, $z_d = 44{,}10$ m, $z_g = 8{,}10$ m. Przyjmuje się tutaj, że parcie wiatru działa normalnie do powierzchni powłoki, czyli składowe styczne obciążenia są równe zeru.

Funkcja opisująca rozkład ciśnień parcia wiatru na obwodzie równoleżnika ma postać [1]

$$p_n = p_0 (-0{,}7+0{,}5 \cos \beta+1{,}2 \cos 2\beta) \sin \alpha. \tag{2}$$

We wzorze tym przyjęto następujące oznaczenie: p_0 jest parciem podstawowym przyjętym zgodnie z danymi według normy jako stałe na wysokości powłoki i równe 0,110 T/m^2 powierzchni pionowej, α kątem zmiennym jaki tworzy normalna do powierzchni powłoki z jej osią (rys. 1); β kątem zmiennym w płaszczyźnie poziomej.

Postać funkcji (2) przedstawia rys. 2*a* i 2*b*.



Rys. 2

3. Za podstawę rozważań przyjęto trzy metody obliczania powłoki hiperboloidalnej według teorii błonowej, mianowicie:

I. metodę całkowania równań różniczkowych równowagi wewnętrznej, [6],

II. metodę różnic skończonych, [7] i [4],

III. metodę kratownic zastępczych, [3].

Nie przytaczamy tutaj teoretycznych podstaw wymienionych metod, a ograniczymy się jedynie do podania ich syntezy i niektórych wzorów dla wprowadzenia czytelnika do zagadnienia.

Metoda I polega na całkowaniu równań różniczkowych cząstkowych, jako równań równowagi wewnętrznej powłoki przy danych warunkach obciążenia na brzegu. Gdy przyjąć oznaczenia z rys. 3*a*, to przy przyjętym obciążeniu parciem wiatru według (2) wyznaczenie sił wewnętrznych w powłoce jest zadaniem statycznie wyznaczalnym i prowadzi do rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (N_\alpha r)}{\partial s} + N_\beta \cos \alpha - \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0, \\ &\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial (N_{\alpha\beta} r)}{\partial s} + + N_{\alpha\beta} \cos \alpha = 0, \\ &\frac{N_\alpha}{R\beta} - \frac{N_\beta}{r} \sin \alpha = p_n. \end{aligned} \tag{3}$$

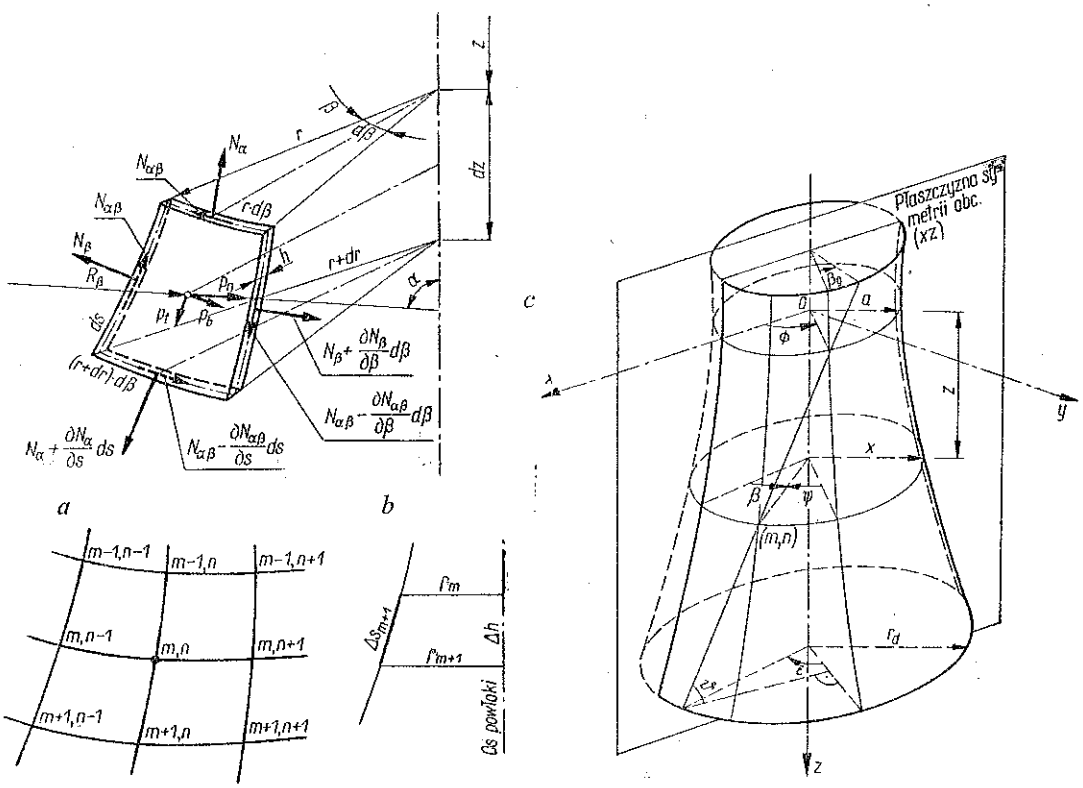
[1] Najczęściej przyjmowana postać parcia wiatru obowiązująca w Niemczech i zawarta w DIN 1055.

Symbol N_α oznacza siłę południkową, N_β siłę równoleżnikową i $N_{\alpha\beta}$ siłę styczną działającą w przekrojach południkowych i równoleżnikowych. Pozostałe wielkości wyjaśnia rys. 3*a*.

W wyniku rozwiązania układu równań (3) przy określonych warunkach brzegowych mamy siły wyrażone następująco:

$$
\begin{aligned}
N_\alpha &= N_{\alpha,0}+N_{\alpha,1}\cos\beta+N_{\alpha,2}\cos 2\beta,\\
N_\beta &= N_{\beta,0}+N_{\beta,1}\cos\beta+N_{\beta,2}\cos 2\beta,\\
N_{\alpha\beta} &= N_{\alpha\beta,0}+N_{\alpha\beta}\sin\beta+N_{\alpha\beta,2}\sin 2\beta,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

gdzie $N_{\alpha,0}, \ldots, N_{\beta,0}, \ldots, N_{\alpha\beta,0}, \ldots$ itd. są siłami składowymi kolejnych harmonicznych obciążenia p_n.



Rys. 3

Istotą metody II jest zastąpienie w układzie równań (3) odpowiednich pochodnych cząstkowych przez ilorazy różnicowe. Jakkolwiek w ogólności zastąpienie równań różniczkowych różnicowymi prowadzi do odpowiedniego układu równań liniowych,

to w danym przypadku wykorzystanie warunków brzegowych daje możność otrzymania bezpośrednich wzorów, wyrażających siły w przekrojach poziomych i pionowych powłoki. Tok obliczenia w tym przypadku jest rekurencyjny, jak to wynika z budowy wzorów:

$$
\begin{aligned}
N_{\alpha}^{m+1,n} &= N_{\alpha}^{m,n}\frac{r_m}{r_{m+1}} + N_{\beta}^{m,n}\frac{\Delta s_{m+1}\cos\alpha_m}{2\Delta\beta r_{m+1}} - \\
&\qquad - (N_{\alpha\beta}^{m,n+1} - N_{\alpha\beta}^{m,n-1})\frac{\Delta s_{m+1}}{2\Delta\beta r_{m+1}}, \\
N_{\beta}^{m,n} &= N_{\alpha}^{m,n}\,K_m - p_n^{m,n}\,R\alpha_m, \\
N_{\alpha\beta}^{m+1,n} &= N_{\alpha\beta}^{m,n}\frac{r_m}{r_{m+1}} - \frac{\Delta s_{m+1}\cos\alpha_m}{r_{m+1}} - (N_{\beta}^{m,n+1} - N_{\beta}^{m,n-1})\frac{\Delta s_{m+1}}{2\Delta\beta r_{m+1}},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

gdzie N_α, N_β i $N_{\alpha\beta}$ mają znaczenie poprzednie, zaś pozostałe wielkości wchodzące w te wzory są wielkościami geometrycznymi, które wyjaśniają rys. 3*b* i 3*c*. Liczby m oznaczają tutaj kolejny przekrój poziomy (postępując z góry ku dołowi), natomiast n odpowiadają pewnemu podziałowi kątowemu. W ten sposób punkty siatki odpowiadającej podziałowi powloki południkami i równoleżnikami są oznaczone dwiema liczbami (m, n).

Metoda III polega na rozwiązaniu pewnej kratownicy przestrzennej wpisanej w środkową powierzchnię hiperboloidalną, której postać jest związana z prostokreślną powierzchnią obrotową. Rozważając kratownicę o dużej ilości węzłów jako odpowiednika powłoki można przejść od sił osiowych w prętach tak przyjętej kratownicy do sił błonowych w powłoce, badając wyrażenia tych pierwszych w granicy (przy warunku, że długość prętów dąży do zera). Otrzymuje się wtedy proste wzory wyrażające siły błonowe, mianowicie

$$
\begin{aligned}
N_{\alpha}^{m,n} &= A\cos^2\beta + B\cos\beta + C, \\
N_{\beta}^{m,n} &= \overline{C}\,p_n^{m,n} + A_0\,N_{\alpha}^{m,n}, \\
N_{\alpha\beta}^{m,n} &= A_1\sin\beta + B_1\sin 2\beta,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gdzie $A, B, C, \overline{C}, A_0, A_1$ i B_1 są wielkościami geometrycznymi, a pozostałe wielkości mają znaczenie poprzednie. Wprowadzając oznaczenia z rys. 3*c*, wielkości geometryczne wyrażają się następująco:

$$
\begin{aligned}
A &= 4C_0\cos\delta\,(C_4\cos 2\varphi - C_3\sin 2\varphi), \\
B &= 2C_0\cos\delta\,(C_2\cos\varphi - C_1\sin\varphi), \\
C &= 2C_0\cos\delta\,(C_3\sin 2\varphi + C_4\cos 2\varphi),
\end{aligned}
$$

$$\overline{C} = -\frac{a|\sin\alpha|}{h\cos\psi},$$

$$A_0 = \operatorname{tg}^2\delta,$$

$$A_1 = 2C_0 \sin\delta\,(C_1\cos\psi + C_2\sin\psi),$$

$$B_1 = 2C_0 \sin\delta\,(C_3\cos 2\psi + C_4\sin 2\psi),$$

przy czym a oznacza kąt, jaki tworzy normalna do środkowej powierzchni powłoki z jej osią, δ połowę kąta ostrego pomiędzy prostymi ściśle stycznymi w punkcie (m, n) do powierzchni środkowej, h grubość powłoki, ψ kąt dwuścienny pomiędzy płaszczyzną wyznaczoną przez oś zz i punkt (m, n) powierzchni środkowej powłoki, a płaszczyzną wyznaczoną przez oś zz i punkt przebicia okręgu szyjnego z tworzącą przechodzącą przez punkt (m, n) oraz C_0, C_1, C_2, C_3 i C_4 funkcje trygonometryczne kątów β_g i ψ.

4. Dla celów projektowania wystarczy zwykle określić siły w tych przekrojach, w których przybierają one ekstremalne wartości. W przypadku przyjętej powłoki wyznaczone zostały siły wewnętrzne N_α, N_β i $N_{\alpha\beta}$ w punktach podziału (poziomego i kątowego). Dokonano mianowicie podziału wzdłuż wysokości co $\Delta h = 4{,}0$ m i podziału kątowego co $\Delta\beta = 30°$.

Wykorzystane zostały dalej wyniki obliczeń, [1], do sporządzenia wykresów sił w charakterystycznych przekrojach. Dla uwidocznienia zmiany sił w zależności od kąta poziomego sporządzony został wykres 4, na którym zostały naniesione wartości odpowiadające najniższemu przekrojowi poziomemu o współrzędnej $z = 44{,}10$ m; zmianę sił wzdłuż wysokości przedstawiają wykresy 5, 6 i 7 odpowiadające kolejno przekrojom pionowym o kącie $\beta = 0°$, $\beta = 90°$ i $\beta = 180°$. Z powodu symetrii obciążenia względem płaszczyzny $\beta = 0°$ wykresy sporządzone zostały dla połowy powłoki. Oznaczenia poszczególnych krzywych $N_\alpha^{\mathrm{I}}, \ldots, N_\beta^{\mathrm{I}}, \ldots, N_{\alpha\beta}^{\mathrm{I}}, \ldots$, z indeksem I, II i III należy rozumieć jako wartości odpowiadające wynikom otrzymanym na podstawie metod I, II i III.

5. Jeśli za podstawę przyjąć wyniki obliczeń metodą I uważając je za dokładne, to wtedy wyniki pozostałych metod różnią się w pewnym stopniu, co wskazują niżej podane liczby. Interesować tu będą nas przede wszystkim odchylenia wartości sił, mające istotny wpływ na wymiarowanie, a więc sił w tych przekrojach, w których występują ich ekstremalne wartości. Przeprowadzając porównanie dochodzimy do następujących wartości:

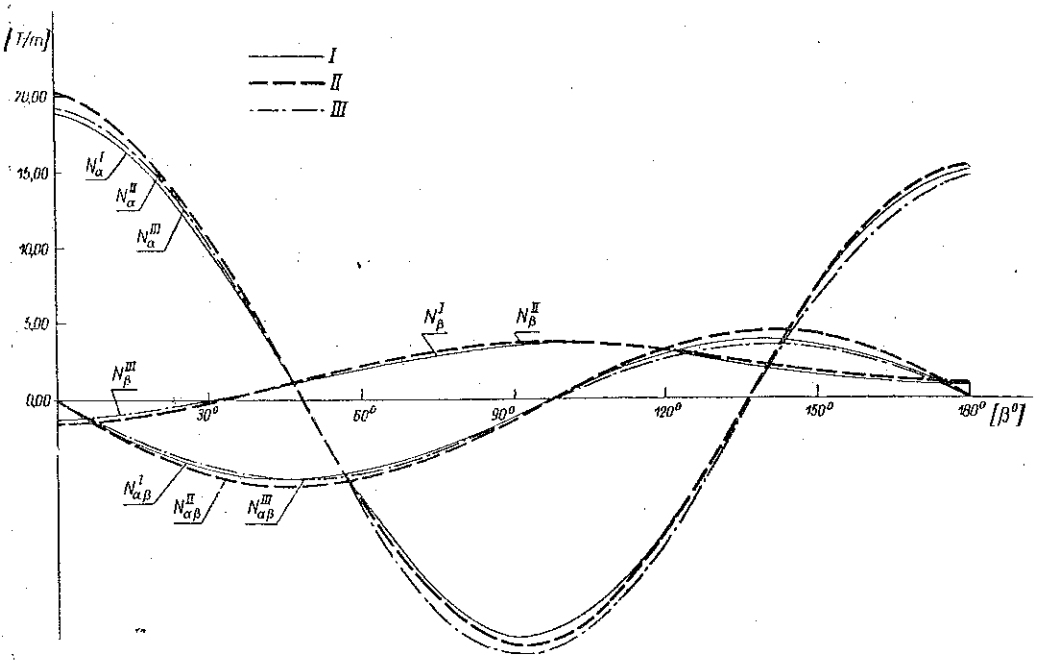
W przekroju poziomym dolnym ($x = 44{,}10$ m) mamy przy $\beta = 0°$ różnicę sił południkowych wynoszących dla N_α^{II} 7,9%, a dla N^{III} 1,1%; przy kącie $\beta = 90°$ siły południkowe N_α^{II} odchylają się o 3,2% a N_α^{III} o 7,0%; wreszcie przy $\beta = 180°$ siły N_α^{II} różnią się o 2,8% i N_α^{III} również o 2,8%. Podobnie w przekroju tym wartości sił stycznych $N_{\alpha\beta}^{\mathrm{II}}$ i $N_{\alpha\beta}^{\mathrm{III}}$ dają różnicę nie przekraczającą 9,0%. Z przebiegu sił w przekrojach poziomych wynika, że procentowe odchylenia dla innych wartości β nie

są większe od przytoczonych wyżej liczb. Biorąc w końcu pod uwagę wykresy 5, 6 i 7 widzimy, że najbliższe są sobie wartości sił według metody I i III. Wyniki metody II można przybliżyć do wyników metody I i III, gdy tylko przyjmie się odpowiednio gęstszą siatkę od tej, która przyjęta została w niniejszej pracy; wzrastają wtedy oczywiście obliczenia. Z porównania tych metod pod względem dokładności obliczeń dochodzimy do wniosku, że są one równorzędne pod względem dokładności wyników.

Jeśli chodzi o nakład pracy przy sporządzaniu takich obliczeń, to dla metody III okazuje się najmniejszy, a największy dla metody I i II.

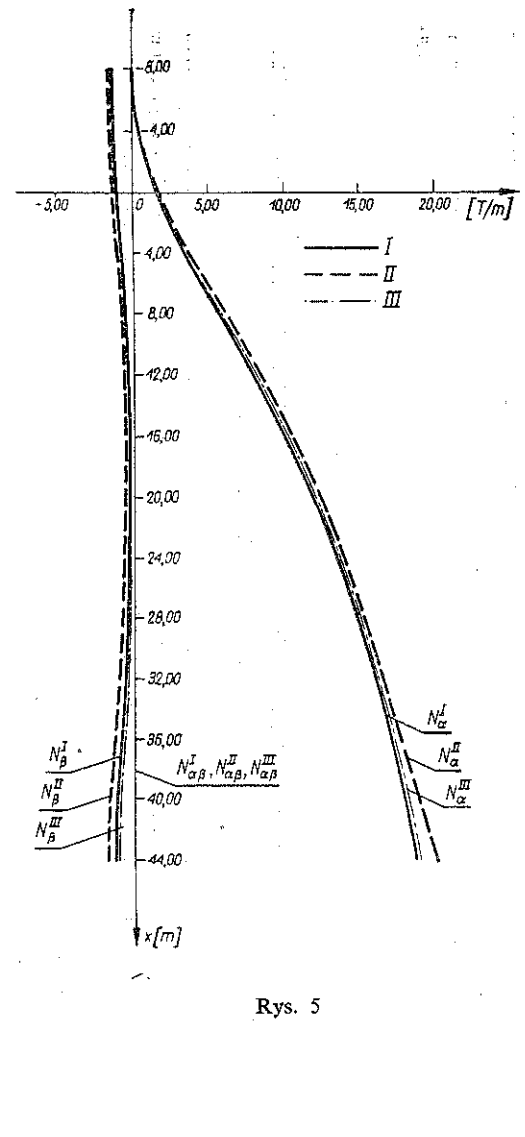
Warto także wspomnieć, że na podstawie wzorów wyrażających wielkości przekrojowe w metodzie III łatwo można wyznaczyć przekroje wielkości ekstremalnych. Tak więc przy projektowaniu proces obliczeń można ograniczyć do tych tylko przekrojów.

6. Przedstawiony stan naprężenia powłoki hiperboloidalnej wymaga omówienia warunków brzegowych, które pozwalają na wyznaczenie stałych całkowania, a także sposobu wyznaczania naprężeń w obszarach podparcia powłoki.

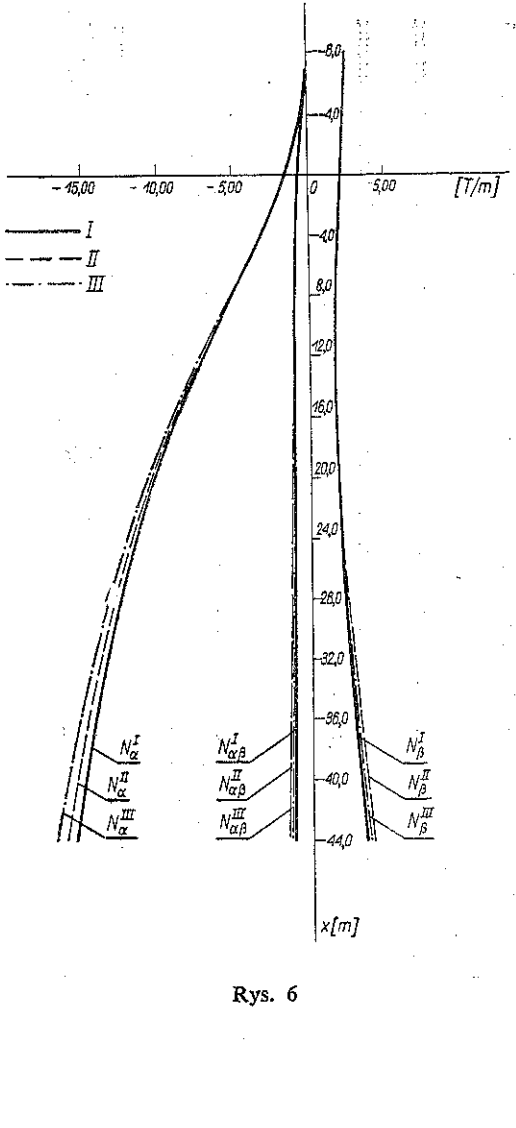


Rys. 4

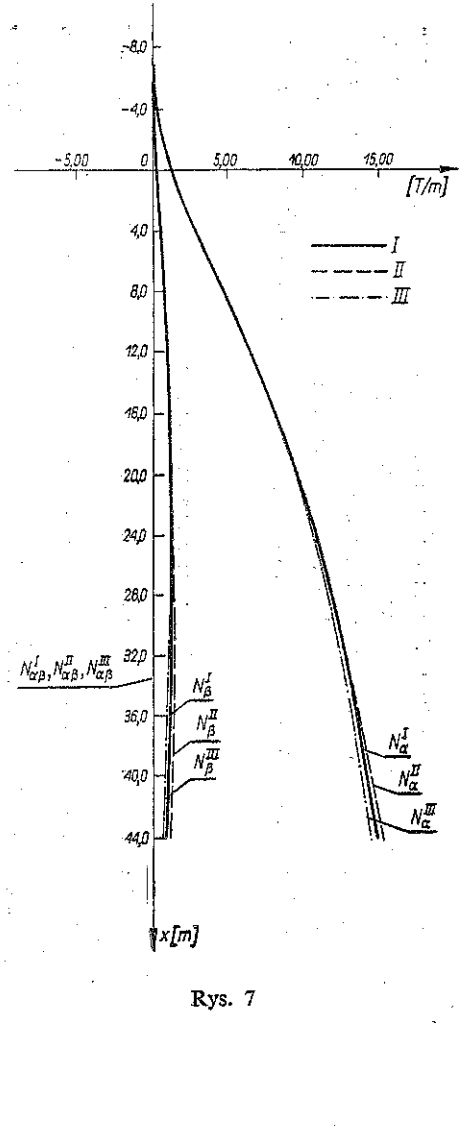
Schemat statyczny przedstawia w naszym przypadku powłokę o swobodnym brzegu górnym i podparciu odcinkowym brzegu dolnego. W ten sposób na brzegu górnym znane są siły $N_\alpha = 0$, $N_{\alpha\beta} = 0$ i $N_\beta \neq 0$, określone wprost przez przyjętą funkcję obciążenia wiatrem, zaś na brzegu dolnym narzucony jest ściśle określony rozkład sił błonowych, który ilustruje wykres na rys. 4.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Z technicznego punktu widzenia dolny obszar powłoki hiperboloidalnej można uważać za tarczę zakrzywioną w planie, podpartą na obwodzie odcinkowo i obciążoną w sposób ciągły. Jako obciążenie dolnego brzegu przyjmujemy siły wewnętrzne stanu błonowego. Ścisła metoda obliczania tarcz zakrzywionych w planie, [5], wykazuje, że przebieg sił jest podobny do przebiegu sił w tarczach prostych.

Literatura cytowana w tekście

[1] Z. BACZYŃSKI, *Studium porównaweze metod obliczania hiperboloidalnej żelbetonowej powłoki chłodni kominowej* (Praca dyplomowa), Politechnika Śląska, Gliwice 1958.

[2] Z. BRZOSKA, *Projekt hiperboloidalnej chłodni kominowej żelbetowej 8000 m3/h*, Biprohut, Gliwice.

[3] Z. GRODECKI, *Próba uproszczenia obliczeń chłodni kominowych*, Budownictwo III, Wrocław 1956.

[4] J. LEDWOŃ, *Metoda sukcesywnego obliczania sił wewnętrznych w hiperboloidalnych chłodniach wieżowych obciążonych wiatrem*, Inżyn. Budown., **6** (1957).

[5] R. OHLIG, Beton Stahlbetonbau, **10** (1953), 233.

[6] R. RABICH, *Die Membrantheorie der einschalig hyperboloischen Rotationschalen*, Bauplannung u. Bautechnik, **7** (1953).

[7] M. SOARE, *Die Anwendung der Differenzen-Gleichungen beim Studium der Schalen*, Bauplannung u. Bautechnik, **10** (1956).

Резюме

О МЕТОДАХ И РЕЗУЛЬТАТАХ РАСЧЕТА ГИПЕРБОЛОИДНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ДАВЛЕНИЯ ВЕТРА

В работе приводится обзор известных в литературе методов расчета гиперболоидной оболочки согласно безмоментной теории, под давлением ветра, сравнивая результаты расчета некоторого типа гиперболоиды этими методами.

Рассматриваются три метода: I. метод интегрирования дифференциальных уравнений, II. метод конечных разностей, III. метод эквивалентных ферм.

Кратко обсуждаются теоретические основы этих методов. Приводятся результаты расчетов в виде диаграмм безмоментных сил, а затем уточняются разницы между значениями соответствующих себе сил для этой модели оболочки.

В результате этих рассуждений сделано заключение, что для практических расчетов приведенные методы в той же степени точны, и, что наиболее выгодным является метод эквивалентных ферм.

Summary

METHODS AND RESULTS OF COMPUTATION OF A HYPERBOLOIDAL SHELL LOADED BY WIND PRESSURE

This is a survey of computation methods of a hyperboloidal shell loaded by wind pressure according to the membrane theory; known in the literature, and a comparison of the computation results of a hyperboloidal shell which have been carried out by various methods.

Three methods are chosen for considerations:

I. The integration method of the differential equations,

II. Method of finite differences,

III. Method of substitute lattices.

As an introduction, the theoretical foundations of these methods are discussed. The results are represented in the form of diagrams of membrane forces. Then, the differences between the values of the corresponding forces are analysed for the same shell model.

It is concluded that for practical computations the methods are of the same order of accuracy and that for design purposes the method of substitute lattices is the most convenient.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 listopada 1961 r.