

**SZCZEPAN BORKOWSKI**

**OBLICZANIE NAPRĘŻEŃ W PEWNYM TYPIE ŁUPINY  
WALCOWEJ OTWARTEJ PODDANEJ DZIAŁANIU SIŁ ODŚRODKOWYCH**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXXXII**

**TOM X • ZESZYT 3 • ROK 1962**

## SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	461
2. Podstawowe równania i wzory teorii łupin obrotowo-walcowych. Podstawowe wzory dla łupiny pierwszej	462
3. Warunki brzegowe	465
4. Składowe wektora sił powierzchniowych	466
5. Całkowanie równania	468
6. Zaburzenia brzegowe $y = 0$	471
7. Zaburzenia brzegowe $s = 0$	474
8. Podstawowe wzory dla łupiny drugiej	474
9. Tok rozwiązywania zagadnienia	475
10. Przykłady liczbowe	475
11. Wnioski końcowe	485
12. Tablice pomocnicze	494

## 1. Uwagi wstępne

Zagadnienie naprężeń w łupinach obrotowo-walcowych poddanych działaniu sił odśrodkowych w przypadku, gdy brzegi prostoliniowe łupiny są wolne od obciążeń, było przedmiotem rozważań KOWALENKI, [11], RAJERA, [19]<sup>1</sup>, i BORODAWKI, [24]. Omówienie literatury częściowo związanej z rozpatrywanym zagadnieniem znajduje się w pracy KOWALENKI, [25].

Omawiany tutaj temat jest bardzo ważny z punktu widzenia praktycznego, wystarczy bowiem wspomnieć, iż łopatki wirników (pomp, wentylatorów i sprzężarek odśrodkowych, por. np. [17]) posiadają w wielu przypadkach kształt zbliżony do łupiny walcowej.

Jeżeli chodzi o łopatki zakreślone jednym promieniem, to otrzymane w wyżej wymienionych pracach wyniki w mniejszym lub większym stopniu odzwierciedlają stan naprężeń w rzeczywistych łopatkach. Pewne dane doświadczalne odnoszące się do tych zagadnień można spotkać w literaturze, [24], [10], [18].

W przypadku łopatek promieniowych, które można potraktować jako tarcze, to zagadnienie naprężeń w takich łopatkach przedstawione zostało w pracy LEYKI, [13].

W rozwiązaniach praktycznych bardzo często łopatki posiadają zarys złożony z dwóch promieni (por. [17], s. 240), co daje w wyniku łupinę walcową, składającą się z dwóch łupin obrotowo-walcowych o różnych krzywiznach. Takie rozwiązanie podyktowane jest względami konstrukcyjnymi. Jest rzeczą oczywistą, iż w pewnym obszarze obejmującym miejsca styku tych dwóch łupin powstają naprężenia określone jako naprężenia nieciągłości, [9]. Powstanie tych naprężeń łączy się ściśle z nieciągłością krzywizny. Analogiczne zagadnienie dla łupin obrotowych zamkniętych, obciążonych symetrycznie, jest omówione w literaturze, [6] i [9].

Zagadnienie naprężeń nieciągłości w łupinie walcowej zamkniętej, posiadającej dwie osie symetrii i obciążonej od wewnątrz ciśnieniem, zostało rozwiązane przez NOWOŻIŁOWA, [16].

Przedmiotem niniejszej pracy jest rozwiązanie zagadnienia naprężeń nieciągłości w łupinie walcowej otwartej, składającej się z dwóch łupin obrotowo-walcowych

<sup>1</sup> Istnieje też druga praca Rajera omawiająca naprężenia w łupinie obrotowo-walcowej, wywołane działaniem sił odśrodkowych. Pracy tej autor nie czytał, ale jak wynika z dosyć obszernej notatki zamieszczonej w Ref. Żurn. Mech., z. 1, 1960 poz. 1303, praca ta omawia stan naprężenia w łupinie obrotowo-walcowej o zmiennej szerokości.

o różnych promieniach krzywizny, i obciążonej siłami odśrodkowymi. Łopatkę dwupromieniową traktuje się tutaj jako łupinę walcową, która przez rozcięcie sprowadza się do dwóch łupin obrotowo-walcowych. Zagadnienie rozwiązuje się w oparciu o uproszczone równania teorii łupin obrotowo-walcowych, podawane przez DONNELLA, WŁASOWA, [22], i FLÜGGEGO. Równaniem wyjściowym jest równanie w postaci zespolonej, które określa poszukiwaną, zespoloną funkcję naprężeń. Taki sposób jest w przypadku technicznej teorii najbardziej operatywny.

Spotykane w omawianym tutaj zagadnieniu łupiny należą do łupin krótkich, posiadających stałą  $\epsilon$ , [20], w granicach 0,77-10, co w zasadzie uniemożliwia stosowanie tablic podanych w pracy [20]; z uwagi na to załączono tutaj tablice niektórych współczynników.

Pewną wskazówkę dotyczącą stosowalności równań technicznej teorii można znaleźć w pracach [1], [5] i [8].

W niniejszej pracy nie uwzględniamy całego szeregu innych czynników wpływających na rozkład naprężeń w omawianym tutaj typie łupiny. Z ważniejszych można by wymienić: sprężyste zamocowanie łupiny na brzegach krzywoliniowych, działanie sił aerodynamicznych strumienia gazów czy cieczy, wpływ tarcz, do których są przymocowane łopatki, wpływy termiczne (sprężarki odśrodkowe) oraz drgania łopatek.

Niektóre z tych czynników mogą być uwzględnione jedynie drogą doświadczalną i nie jest rzeczą możliwą rozpatrywanie wszystkich tych wpływów w sposób ścisły na drodze teoretycznej.

Przyjętym tutaj warunkom brzegowym (brzegi krzywoliniowe) czynią zadość w dużym przybliżeniu łopatki o konstrukcji podanej w pracy [17], s. 258.

## 2. Podstawowe równania i wzory teorii łupin obrotowo-walcowych. Podstawowe wzory dla łupiny pierwszej

Rozpatrując łupinę walcową podaną na rys. 1 rozdzielimy ją na dwie łupiny obrotowo-walcowe (nazywać je będziemy łupiną pierwszą i łupiną drugą), obciążone w sposób pokazany na rys. 2a i 2b.

Podamy wzory na składowe stanu odkształcenia i naprężenia dla łupiny pierwszej, a otrzymane wyniki łatwo dostosujemy do innych łupin.

Przy analizowaniu stanu naprężeń w łupinie obrotowo-walcowej będziemy wychodzili z uproszczonych równań, które są podane w pracach DONNELLA, WŁASOWA, i FLÜGGEGO, [23], i które w przypadku gdy  $X, Y, Z \neq 0$  mają następującą postać, [20]:

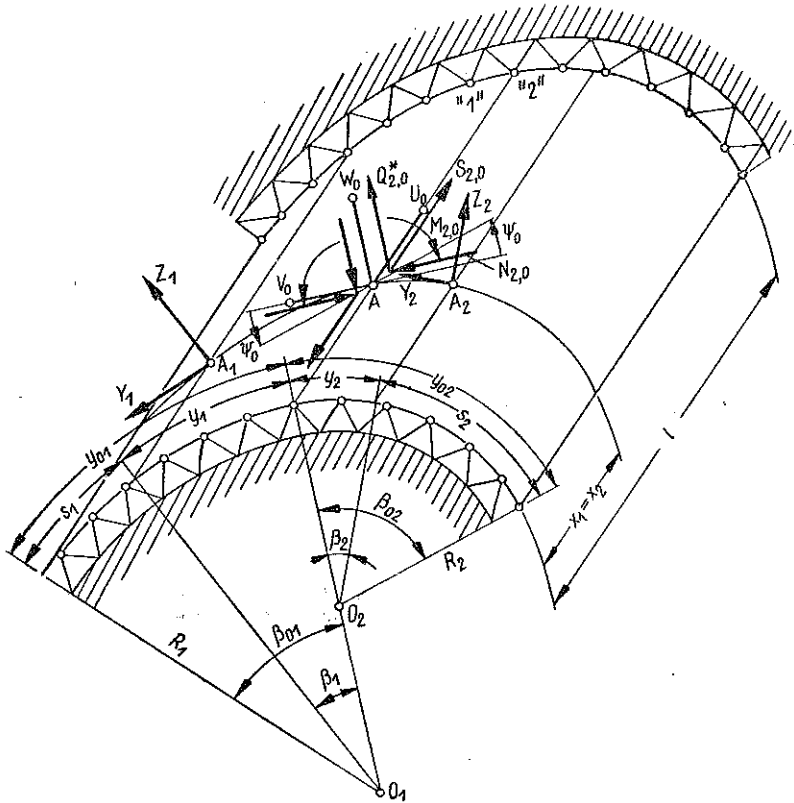
$$(2.1) \quad \nabla^4 \Phi - Ehk \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy - v \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right),$$

$$Ehc \nabla^4 w + \frac{k}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \left( Z + k \int Y dy \right)$$

podaną zgodnie z oznaczeniami stosowanymi w tej pracy. Dalszą redukcję tych równań przeprowadzimy w sposób odmienny niż w pracy [20]. Układ (2.1) zredukujemy do jednego równania wprowadzając zespoloną funkcję naprężeń

$$(2.2) \quad \tilde{F} = \Phi + iEh\psi.$$

Ścisłego wyjaśnienia i określenia funkcji (2.2) należy szukać u NOWOŻŁOWA, [2]. W ten sposób określoną funkcję w przypadku gdy  $X, Y, Z = 0$  wprowadził, jak



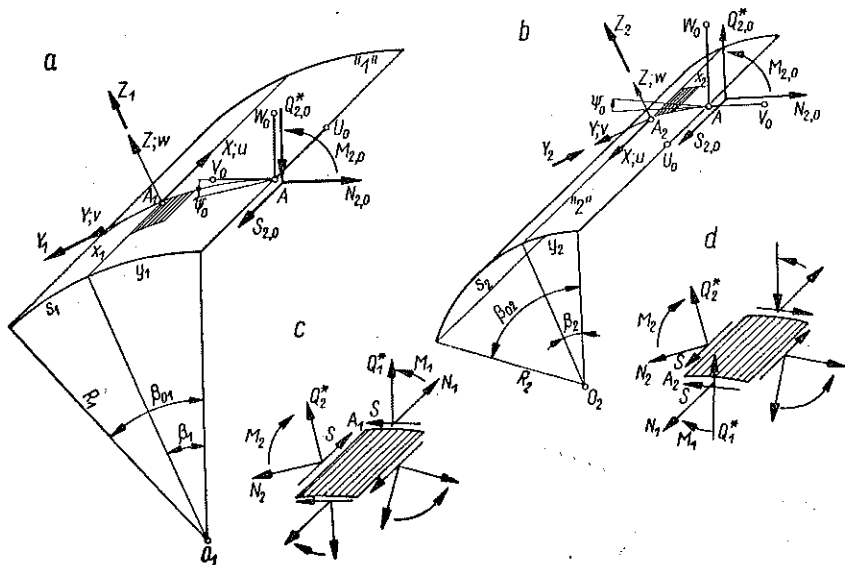
Rys. 1

się wydaje, po raz pierwszy MUSZTARI, [15]. W tym też ujęciu jak u MUSZTARIEGO używana jest ta funkcja w pracach VISĂRIONA i STANESCU, [21]. W pracy [2] funkcja ta została uogólniona na przypadek dowolnego obciążenia, porównana z innymi funkcjami stosowanymi przez GREENA i ZERNĘ, [4], i potem niezależnie przez M. MISZONOWA, [14], wreszcie powiązana z funkcją Galerkin-Własowa (podstawową funkcją w metodzie przemieszczeniowej).

Jeżeli funkcję (2.2) wprowadzimy do (2.1), to otrzymamy

$$(2.3) \quad \nabla^4 \tilde{F} + i \frac{k}{c} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} = \tilde{Z}.$$

W równaniach powyższych  $\Phi$  oznacza rzeczywistą funkcję naprężeń w normalne przemieszczenie,  $h$  grubość, a  $R = 1/k$  promień łupiny, wreszcie  $c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$  wartość stała a  $\nabla^2$  operator Laplace'a;  $x, y$  są współrzędnymi dowolnego punktu środkowej powierzchni łupiny (rys. 2).



Rys. 2

Zespolone obciążenie zewnętrzne jest określone za pomocą wzoru

$$(2.4) \quad \tilde{Z} = Z_r + iZ_i,$$

gdzie

$$(2.5) \quad Z_r = \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy - \nu \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right),$$

$$Z_i = \frac{1}{c} \left( Z + k \int Y dy \right).$$

We wzorach (2.5)  $X, Y, Z$  oznaczają składowe wektora obciążenia, przypadające na jednostkę środkowej powierzchni łupiny.

Siły wewnętrzne łupiny mogą być określone, gdy wyznaczona jest już postać funkcji (2.2), za pomocą znanych z uproszczonej teorii łupin obrotowo-walcowych wzorów:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int X dx, & N_2 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int Y dy, \\
 S &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\
 M_1 &= Ehc^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_2 &= Ehc^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 H &= -Ehc^2 (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
 Q_1 &= -Ehc^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, & Q_2 &= -Ehc^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \\
 Q_2^* &= Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x} = -Ehc^2 \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Występujące w (2.6) wielkości wewnętrzne posiadają dodatnie kierunki takie jak pokazano np. na rys. 2c. Dodatnie zaś zwroty składowych wektora przemieszczenia pokazane są np. na rys. 2a. Występująca w (2.6) siła  $Q_2^*$  jest oddziaływaniem KIRCHHOFFA.

Wyrażając odkształcenie podłużne  $\epsilon_1$  i kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$  przez siły wewnętrzne, a następnie podstawiając (2.6) otrzymamy równania, które pozwolą nam obliczyć składowe  $u$  i  $v$  wektora przemieszczenia dowolnego punktu środkowej powierzchni łupiny:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int X dx - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \int Y dy \right), \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

### 3. Warunki brzegowe

Będziemy zakładali, że na brzegach  $x = 0$ ,  $x = l$  łupina jest podparta przegubowo-przesuwnie, tzn. że spełnione są na tych brzegach następujące warunki: dla  $x = 0$ ,  $x = l$

$$v = w = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_1 = 0.
 \tag{3.1}$$

Brzeg  $s = 0$  jest wolny od obciążeń, czyli dla  $s = 0$

$$(3.2) \quad N_2 = S = 0, \quad M_2 = 0, \quad Q_2^* = 0.$$

Brzeg  $y = 0$  będzie (po rozdzieleniu łupiny na dwie łupiny obrotowo-walcowe) obciążony siłami, których wartości określimy za pomocą następujących szeregów:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} N_{2,0} &= \sum N_0 \sin \lambda x, & S_{1,0} &= S_{2,0} = \sum S_0 \cos \lambda x, \\ M_{2,0} &= c \sum M_0 \sin \lambda x, & Q_{2,0}^* &= c \sum Q_0^* \sin \lambda x, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.4) \quad \lambda = \frac{\pi n}{l},$$

przy czym we wzorach (3.3) i (3.4) przy  $N_0, S_0, M_0, Q_0^*, \lambda$  opuszczono ze względu na prostotę zapisu indeksy  $n = 1, 3, 5, \dots$ . Podobnie też będziemy postępowali w dalszych przypadkach. Sumowanie szeregów (3.3), o czym należy pamiętać dalej, odbywa się dla nieparzystych wskaźników, czego również nie będziemy zaznaczali pisząc wszędzie  $\sum$  zamiast  $\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}$ . Dla każdego z szeregów (3.3) na brzegu  $y = 0$  będą spełnione następujące warunki: dla  $y = 0$

$$(3.5) \quad N_2 = N_{2,0}, \quad S = S_{2,0}, \quad M_2 = M_{2,0}, \quad Q_2^* = Q_{2,0}^*.$$

Wielkości  $N_2, S, M_2$  i  $Q_2^*$  będą w wyniku końcowym podane też w postaci szeregów; tym samym równości (3.5) będzie można zastąpić równościami  $n$ -tych ( $n = 1, 3, \dots$ ) wyrazów odpowiadających sobie szeregów. Nieznane współczynniki  $N_0, S_0, M_0$  i  $Q_0^*$  będziemy mogli obliczyć porównując przemieszczenia i kąty obrotu obydwu łupin na brzegu  $y = 0$ , czyli dla  $y_1 = y_2 = 0$  mamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_2, & v_1 &= -v_2, & w_1 &= w_2, \\ \psi_1 &= \left( -\frac{\partial w}{\partial y} + kv \right)_1 = -\psi_2 = -\left( -\frac{\partial w}{\partial y} + kv \right)_2, \end{aligned}$$

w których indeks 1 odnosi się do wielkości występujących w łupinie «pierwszej», a 2 do łupiny drugiej.

#### 4. Składowe wektora sił powierzchniowych

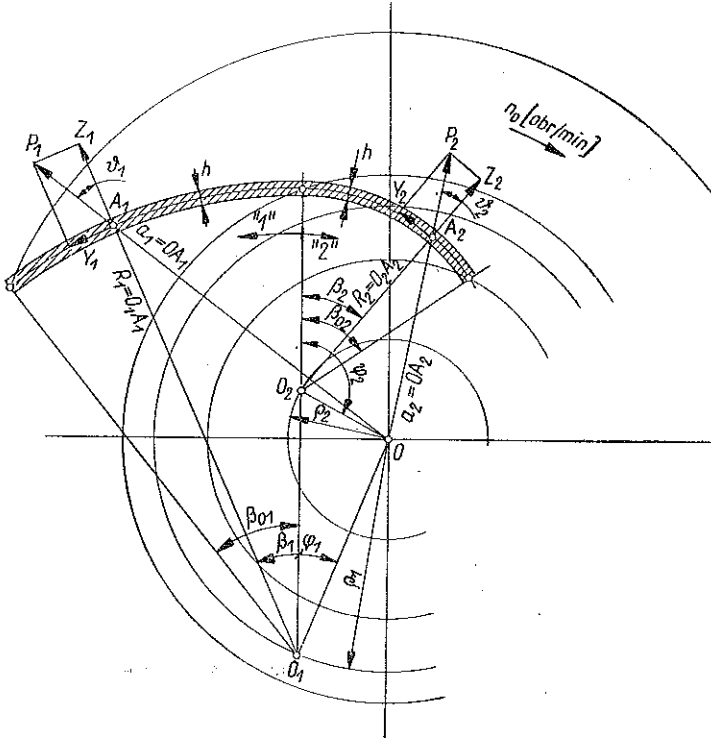
Przyjmujemy, że jedynym obciążeniem działającym na łupinę jest siła odśrodkowa, działająca na jednostkę powierzchni środkowej, którą można wyrazić wzorem (rys. 3)

$$(4.1) \quad P = \frac{\gamma \pi^2}{0,9 g_n} \left( \frac{n_0}{1000} \right)^2 ah,$$



gdzie w (4.1)  $\gamma$  oznacza ciężar właściwy w  $\text{kG/dcm}^3$ ,  $g_n$  przyspieszenie ziemskie w  $\text{cm/sek}^2$ ,  $n_0$  ilość obrotów na minutę,  $a$  i  $h$  odpowiednio promień łączący środek obrotu z dowolnym punktem łupiny oraz grubość łupiny; obie wielkości przyjąć należy w  $\text{cm}$ . Jeżeli do (4.1) wprowadzimy oznaczenie

$$(4.2) \quad f_0 \equiv f_0(n_0) = \frac{\gamma \pi^2}{0,9 g_n} \left( \frac{n_0}{1000} \right)^2,$$



Rys. 3

to składowe siły odśrodkowej  $X, Y, Z$  (w układzie osi współrzędnych tworząca-styczna normalna) będziemy mogli obliczyć za pomocą wzorów:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= f_1 \sin ky + f_2 \cos ky, \\ Z &= f_3 + f_2 \sin ky - f_1 \cos ky, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.4) \quad f_1 = f_0 h \varrho \cos \varphi, \quad f_2 = f_0 h \varrho \sin \varphi, \quad f_3 = f_0 h R.$$

Wzory (4.3) i (4.4) są słuszne dla obydwu łupin; należy tylko pamiętać, iż dla łupiny 1 należy przyjmować wartości  $\varrho_1, \varphi_1, R_1, k_1$  i  $y_1$ , a dla łupiny 2:  $\varrho_2, \varphi_2, R_2, k_2$  i  $-y_2$  (rys. 3).

### 5. Całkowanie równania

Całkowanie równania (2.3) przy przyjętych warunkach brzegowych (3.1), (3.2) i (3.5) może się odbywać metodą Lévy'ego [12], obszernie omówioną w literaturze, [7], [16] i [22].

Po przyjęciu całki równania jednorodnego w postaci

$$(5.1) \quad \tilde{F}_0 = \sum \tilde{A}(y) \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{\pi n}{l},$$

a całki szczególnej równania (2.3) w postaci

$$(5.2) \quad \tilde{F}_1 = \sum (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \cos ky + \tilde{A}_3 \sin ky) \sin \lambda x,$$

(obciążenie  $\tilde{Z}$  należy rozwinąć w szereg Fouriera) otrzymamy po prostych przekształceniach następujący wzór na całkę ogólną równania (2.3):

$$(5.3) \quad \tilde{F} = \tilde{F}_0 + \tilde{F}_1 = \sum [(A_{rs} + A_{ry} + F_{1r}) + i(A_{is} + A_{iy} + F_{1i})] \sin \lambda x.$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie występujące w nawiasie (5.2) ma budowę podobną do budowy odpowiedniego wyrażenia określającego zespolone obciążenie zewnętrzne.

We wzorze (5.3) przyjęliśmy oznaczenia

$$(5.4) \quad \begin{aligned} A_{rs} &= C_1 f_{2s} + D_1 f_{1s} + C_3 f_{4s} - D_3 f_{3s}, \\ A_{is} &= -C_1 f_{1s} + D_1 f_{2s} + C_3 f_{3s} + D_3 f_{4s}, \\ A_{ry} &= C_2 f_{2y} + D_2 f_{1y} + C_4 f_{4y} - D_4 f_{3y}, \\ A_{iy} &= -C_2 f_{1y} + D_2 f_{2y} + C_4 f_{3y} + D_4 f_{4y}. \end{aligned}$$

Funkcje powyższe są przydatne przy obliczeniu składowych stanu napięcia i odkształceń w pobliżu brzegów  $s = 0$ , ( $y = y_0$ ) oraz  $y = 0$ , ( $s = y_0$ ), w przypadku gdy odległości tych brzegów są na tyle duże, aby zaburzenia od nich pochodzące nie nakładały się. Możemy więc przyjąć, że w pobliżu brzegu  $y = 0$ , ( $s = y_0$ )

$$(5.5) \quad \tilde{F}_y = \sum [(A_{ry} + F_{1r}) + i(A_{iy} + F_{1i})] \sin \lambda x,$$

a w pobliżu brzegu  $s = 0$ , ( $y = y_0$ )

$$(5.6) \quad \tilde{F}_s = \sum [(A_{rs} + F_{1r}) + i(A_{is} + F_{1i})] \sin \lambda x.$$

Funkcje (5.5) i (5.6) otrzymamy z (5.3) uwzględniając, że przy brzegu  $y = 0$  funkcje  $A_{rs}$  i  $A_{is}$  są bardzo małe. Podobnie też postąpimy w drugim przypadku. Wynik ten jest wnioskiem z założenia o nienakładaniu się zaburzeń powstających na brzegach  $y = 0$  oraz  $s = 0$ . Występujące w (5.5) i (5.6) wartości  $F_{1r}$  i  $F_{1t}$  oraz ich pochodne zestawiono w tabelicy 3. Pochodne zaś funkcji  $A_{ry}$  i  $A_{iy}$  zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 1

$f_{iy}$	$e^{-\lambda p_1 y} \sin \lambda q_1 y$	$e^{-\lambda p_1 y} \cos \lambda q_1 y$	$e^{-\lambda p_2 y} \sin \lambda q_2 y$	$e^{-\lambda p_2 y} \cos \lambda q_2 y$
$\frac{1}{\lambda} f'_{iy}$	$-p_{11} f_{1y} + q_{11} f_{2y}$	$-q_{11} f_{1y} - p_{11} f_{2y}$	$-p_{21} f_{3y} + q_{21} f_{4y}$	$-q_{21} f_{3y} - p_{21} f_{4y}$
$\frac{1}{\lambda^2} f''_{iy}$	$p_{12} f_{1y} - q_{12} f_{2y}$	$q_{12} f_{1y} + p_{12} f_{2y}$	$p_{22} f_{3y} - q_{22} f_{4y}$	$q_{22} f_{3y} + p_{22} f_{4y}$
$\frac{1}{\lambda^3} f'''_{iy}$	$-p_{13} f_{1y} + q_{13} f_{2y}$	$-q_{13} f_{1y} - p_{13} f_{2y}$	$-p_{23} f_{3y} + q_{23} f_{4y}$	$-q_{23} f_{3y} - p_{23} f_{4y}$

$$\begin{aligned}
 p_{11} &\equiv p_1, & q_{11} &\equiv q_1, & p_{21} &\equiv p_2, & q_{21} &\equiv q_2, \\
 p_{12} &= 1+t, & q_{12} &= t, & p_{22} &= 1-t, & q_{22} &= t, \\
 p_{13} &= p_1(1+t) - q_1 t, & p_{23} &= p_2(1-t) - q_2 t, \\
 q_{13} &= p_1 t + q_1(1+t) & q_{23} &= p_2 t + q_2(1-t).
 \end{aligned}$$

Tablica 2

$A_{ry}$	$C_2 f_{2y} + D_2 f_{1y} + C_4 f_{4y} - D_4 f_{3y}$
$\frac{1}{\lambda} A'_{ry}$	$-C_2(q_{11} f_{1y} + p_{11} f_{2y}) - D_2(p_{11} f_{1y} - q_{11} f_{2y}) - C_4(q_{21} f_{3y} + p_{21} f_{4y}) +$ $+ D_4(p_{21} f_{3y} - q_{21} f_{4y})$
$\frac{1}{\lambda^2} A''_{ry}$	$C_2(q_{12} f_{1y} + p_{12} f_{2y}) + D_2(p_{12} f_{1y} - q_{12} f_{2y}) + C_4(q_{22} f_{3y} + p_{22} f_{4y}) -$ $- D_4(p_{22} f_{3y} - q_{22} f_{4y})$
$\frac{1}{\lambda^3} A'''_{ry}$	$-C_2(q_{13} f_{1y} + p_{13} f_{2y}) - D_2(p_{13} f_{1y} - q_{13} f_{2y}) - C_4(q_{23} f_{3y} + p_{23} f_{4y}) +$ $+ D_4(p_{23} f_{3y} - q_{23} f_{4y})$
$A_{iy}$	$-C_2 f_{1y} + D_2 f_{2y} + C_4 f_{3y} + D_4 f_{4y}$
$\frac{1}{\lambda} A'_{iy}$	$C_2(p_{11} f_{2y} - q_{11} f_{2y}) - D_2(q_{11} f_{1y} + p_{11} f_{2y}) - C_4(p_{21} f_{3y} - q_{21} f_{4y}) -$ $- D_4(q_{21} f_{3y} + p_{21} f_{4y})$
$\frac{1}{\lambda^2} A''_{iy}$	$-C_2(p_{12} f_{1y} - q_{12} f_{2y}) + D_2(q_{12} f_{1y} + p_{12} f_{2y}) + C_4(p_{22} f_{3y} - q_{22} f_{4y}) +$ $+ D_4(q_{22} f_{3y} + p_{22} f_{4y})$
$\frac{1}{\lambda^3} A'''_{iy}$	$C_2(p_{13} f_{1y} - q_{13} f_{2y}) - D_2(q_{13} f_{1y} + p_{13} f_{2y}) - C_4(p_{23} f_{3y} - q_{23} f_{4y}) -$ $- D_4(q_{23} f_{3y} + p_{23} f_{4y})$

Tablica 3

$F_{1r}$	$-\frac{16}{\lambda^2 \pi n k} \frac{t^4}{1+4t^4} (f_3 + 2f_2 \sin ky - 2f_1 \cos ky)$
$F'_{1r}$	$-\frac{32}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^4}{1+4t^4} (f_2 \cos ky + f_1 \sin ky)$
$F''_{1r}$	$\frac{32k}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^4}{1+4t^4} (f_2 \sin ky - f_1 \cos ky)$
$F'''_{1r}$	$\frac{32k^2}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^4}{1+4t^4} (f_2 \cos ky + f_1 \sin ky)$
$F_{1t}$	$\frac{8}{\lambda^2 \pi n k} \frac{t^2}{1+4t^4} (f_3 + 2f_2 \sin ky - 2f_1 \cos ky)$
$F'_{1t}$	$\frac{16}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^2}{1+4t^4} (f_2 \cos ky + f_1 \sin ky)$
$F''_{1t}$	$\frac{16k}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^2}{1+4t^4} (-f_2 \sin ky + f_1 \cos ky)$
$F'''_{1t}$	$-\frac{16k^2}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^2}{1+4t^4} (f_2 \cos ky + f_1 \sin ky)$

We wzorach (5.4) —  $f_{jy}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) oznaczają podstawowe funkcje występujące przy zaburzeniach brzegowych:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} f_{1y} &= e^{-\lambda p_1 y} \sin \lambda q_1 y, & f_{2y} &= e^{-\lambda p_1 y} \cos \lambda q_1 y, \\ f_{3y} &= e^{-\lambda p_2 y} \sin \lambda q_2 y, & f_{4y} &= e^{-\lambda p_2 y} \cos \lambda q_2 y. \end{aligned}$$

Funkcje  $f_{js}$  otrzymamy z (5.7) przez zamianę wskaźników. Wartości  $p_1, q_1, p_2$  i  $q_2$  oraz używana tutaj stała  $t$  mają postać następującą:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+t) + \sqrt{(1+t)^2 + t^2}}, \\ q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(1+t) + \sqrt{(1+t)^2 + t^2}}, \\ p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1-t) + \sqrt{(1-t)^2 + t^2}}, \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(1-t) + \sqrt{(1-t)^2 + t^2}}, \\ t &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\pi n} \left( \frac{l}{R} \right) \sqrt{\frac{R}{h}} \quad \text{lub} \quad 2t^2 = \frac{k}{c\lambda^2}. \end{aligned}$$

Tak określone współczynniki bywają powszechnie stosowane przy posługiwaniu się równaniami technicznej teorii łupin obrotowo-walcowych. Używana tutaj stała  $t = 1/\varepsilon$  (przy czym  $\varepsilon$  jest stałą używaną w pracy RÜDIGERA i URBANA). Wprowadzenie stałej  $t$  podyktowane jest tym, że tak określona stała daje prostsze określenie podstawowych funkcji (5.7), a poza tym (co jest bardziej istotne w rozpatrywanej tutaj grupie łupin krótkich)  $t$  wypada w granicach 0,1-1,3. Dla ostatnich wartości układ tablic jest znacznie prostszy. Podane tablice wartości  $p_1, q_1, p_2$  i  $q_2$  mogą więc być uważane za uzupełnienie niektórych tablic wzmiankowanych wyżej autorów i to dla wartości  $\varepsilon = 0,77-10$ . Wynika stąd, że istnieje jedynie bardzo wąski wspólny przedział obu stałych ( $\varepsilon = 0,77-0,9$ ). Można więc powiedzieć, iż tablice podane w [20] nie mogą być stosowane do grupy łupin rozpatrywanych w niniejszej pracy.

### 6. Zaburzenia brzegowe $y = 0$

Biorąc pod uwagę wzory (5.5) i (2.2) możemy otrzymać wartości funkcji  $\Phi$  i  $w$ :

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum (A_{ry} + F_{1r}) \sin \lambda x, \\ w &= \frac{1}{Ehc} \sum (A_{iy} + F_{1i}) \sin \lambda x. \end{aligned}$$

We wzorach określających siłę  $F_{1r}$  oraz  $F_{1i}$  (por. tablica 3) przyjęto uproszczenia

$$1 - \frac{\nu kc}{4t^2} \approx 1, \quad 1 + 2\nu kt^2 c \approx 1.$$

Ze wzorów (6.1) oraz (2.6) po uwzględnieniu tablic 1, 2 i 3 znajdziemy

$$(6.2) \quad \begin{aligned} N_1 &= \sum (N_{1y} + N_{1F}) \sin \lambda x, & N_2 &= \sum (N_{2y} + N_{2F}) \sin \lambda x, \\ S &= \sum (S_y + S_F) \cos \lambda x, & M_1 &= \sum (M_{1y} + M_{1F}) \sin \lambda x, \\ M_2 &= \sum (M_{2y} + M_{2F}) \sin \lambda x, & Q_2^* &= \sum (Q_{2y}^* + Q_{2F}^*) \sin \lambda x. \end{aligned}$$

Wzory (6.2) umożliwiają obliczenie wszystkich sił wewnętrznych. W tych wzorach indeksem  $y$  oznaczono siły powstałe od zaburzeń brzegowych, a indeksem  $F$  siły niezależne od zaburzeń rozchodzących się od brzegu  $y = 0$ . Wielkości te można obliczyć z następującego układu równań:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} N_{1y} &= (q_{12} C_2 + p_{12} D_2) f_{1y} + (p_{12} C_2 - q_{12} D_2) f_{2y} + \\ &+ (q_{22} C_4 - p_{22} D_4) f_{3y} + (p_{22} C_4 + q_{22} D_4) f_{4y}, \\ -\frac{1}{\lambda^2} N_{2y} &= D_2 f_{1y} + C_2 f_{2y} - D_4 f_{3y} + C_4 f_{4y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda^2} S_y &= (q_{11} C_2 + p_{11} D_2) f_{1y} + (p_{11} C_2 - q_{11} D_2) f_{2y} + \\
 &\quad + (q_{21} C_4 - p_{21} D_4) f_{3y} + (p_{21} C_4 + q_{21} D_4) f_{4y}, \\
 \frac{1}{c\lambda^2} M_{1y} &= [\nu q_{12} D_2 + (1 - \nu p_{12}) C_2] f_{1y} + [\nu q_{12} C_2 - (1 - \nu p_{12}) D_2] f_{2y} + \\
 (6.3) \quad &\quad + [\nu q_{22} D_4 - (1 - \nu p_{22}) C_4] f_{3y} - [\nu q_{22} C_4 + (1 - \nu p_{22}) D_4] f_{4y}, \\
 \frac{1}{c\lambda^2} M_{2y} &= [q_{12} D_2 + (\nu - p_{12}) C_2] f_{1y} + [q_{12} C_2 - (\nu - p_{12}) D_2] f_{2y} + \\
 &\quad + [q_{22} D_4 - (\nu - p_{22}) C_4] f_{3y} - [q_{22} C_4 + (\nu - p_{22}) D_4] f_{4y}, \\
 \frac{1}{c\lambda^3} Q_{2y}^* &= [(2 - \nu) p_{11} - p_{13}] C_2 - ((2 - \nu) q_{11} - q_{13}) D_2] f_{1y} - \\
 &\quad - [(2 - \nu) q_{11} - q_{13}] C_2 + ((2 - \nu) p_{11} - p_{13}) D_2] f_{2y} - \\
 &\quad - [(2 - \nu) p_{21} - p_{23}] C_4 + ((2 - \nu) q_{21} - q_{23}) D_4] f_{3y} + \\
 &\quad + [(2 - \nu) q_{21} - q_{23}] C_4 - ((2 - \nu) p_{21} - p_{23}) D_4] f_{4y}.
 \end{aligned}$$

Sily zaś ze wskaźnikami  $F$  mają postać

$$\begin{aligned}
 N_{1F} &= \frac{32k}{\lambda^2 \pi n} \frac{t^4}{1+4t^4} (f_2 \sin ky - f_1 \cos ky), \\
 N_{2F} &= \frac{16t^4 f_3}{\pi n k (1+4t^4)} + \frac{4(4t^4 - 1)}{\pi n k (1+4t^4)} (f_2 \sin ky - f_1 \cos ky), \\
 (6.4) \quad S_F &= \frac{32}{\lambda \pi n} \frac{t^4}{1+4t^4} (f_2 \cos ky + f_1 \sin ky), \\
 M_{1F} &= \frac{8c}{\pi k n} \frac{t^2}{1+4t^4} (f_3 + 2f_2 \sin ky - 2f_1 \cos ky), \\
 M_{2F} &= \nu M_{1F}, \\
 Q_{2F}^* &= \frac{16(2 - \nu)c}{\pi n} \frac{t^2}{1+4t^4} (f_2 \cos ky + f_1 \sin ky).
 \end{aligned}$$

Jeżeli teraz we wzorach (6.2) przyjmiemy  $y = 0$  i porównamy otrzymane wartości na  $N_2$ ,  $S$ ,  $M_2$  i  $Q_2^*$  z wartościami  $N_{2,0}$ ,  $S_{2,0}$ ,  $M_{2,0}$  i  $Q_{2,0}^*$  według (3.3), to otrzymamy cztery równania pozwalające wyznaczyć stałe całkowania  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $C_4$  i  $D_4$  jako funkcje współczynników  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  i  $Q_0^*$  dla każdego wyrazu szeregów (3.3) i (6.2):

$$C_2 + C_4 = \frac{1}{\lambda^2} \left[ N_0 - \frac{4}{k\pi n} \frac{4t^4(f_3 - f_1) + f_1}{1 + 4t^4} \right],$$

$$C_2 p_{11} - D_2 q_{11} + C_4 p_{21} + D_4 q_{21} = \frac{1}{\lambda^2} \left[ S_0 - \frac{8}{\lambda\pi n} \frac{4t^4 f_2}{1 + 4t^4} \right], \quad (6.5)$$

$$(6.5) \quad C_2 q_{12} + D_2 (p_{12} - \nu) - C_4 q_{22} + D_4 (p_{22} - \nu) = \frac{1}{\lambda^2} \left[ M_0 + \frac{8\nu}{\pi n k} \frac{t^2}{1 + 4t^4} (f_3 - 2f_1) \right],$$

$$C_2 [q_{13} - q_{11}(2 - \nu)] + D_2 [p_{13} - p_{11}(2 - \nu)] - C_4 [q_{23} - q_{21}(2 - \nu)] + D_4 [p_{23} - p_{21}(2 - \nu)] = \frac{1}{\lambda^3} \left[ Q_0^* - \frac{16}{\pi n} \frac{t^2}{1 + 4t^4} (2 - \nu) f_2 \right].$$

We wzorach (6.5)<sub>3</sub> oraz (6.5)<sub>4</sub> przyjęto uproszczenia

$$1 + \frac{1}{\nu} \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 \approx 1, \quad (2 - \nu) + \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 \approx 2 - \nu.$$

Równania (6.5) pozwalają wyznaczyć stałe całkowania  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $C_4$  i  $D_4$ , jako funkcje wartości  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  i  $Q_0^*$ . Mając wyznaczone stałe całkowania możemy przystąpić do wyznaczenia składowych przemieszczeń  $u$ ,  $v$ . W tym celu przedstawimy składowe przemieszczenia  $u$ ,  $v$  w postaci następujących szeregów

$$(6.6) \quad u = \sum U(y) \cos \lambda x, \quad v = \sum V(y) \sin \lambda x.$$

Podstawiając (6.6) do (2.7) i przyjmując  $y = 0$  otrzymamy następujące wartości:

$$(6.7) \quad [U]_{y=0} \equiv U_0 = -\frac{\lambda}{Eh} \left[ (p_{12} + \nu) C_2 - q_{12} D_2 + (p_{22} + \nu) C_4 + q_{22} D_4 - \frac{4\nu}{\lambda^2 \pi n k} \frac{4t^4(f_3 - f_1) + f_1}{1 + 4t^4} \right],$$

$$[V]_{y=0} \equiv V_0 = \frac{\lambda}{Eh} \left[ (p_{11}(2 + \nu) - p_{13}) C_2 - (q_{11}(2 + \nu) - q_{13}) D_2 + (p_{21}(2 + \nu) - p_{23}) C_4 + (q_{21}(2 + \nu) - q_{23}) D_4 + \frac{4}{\lambda^3 \pi n} \frac{4(3\nu + 4)t^4 + \nu}{1 + 4t^4} f_2 \right].$$

Podobnie i w tym przypadku przyjęliśmy uproszczenia

$$1 - \frac{1}{\nu} \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 \approx 1, \quad 1 + \frac{1}{2 + \nu} \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 \approx 1.$$

Ze wzoru (6.1)<sub>2</sub> otrzymamy

$$(6.8) \quad [W]_{y=0} \equiv W_0 = \frac{1}{Ehc} \left[ D_2 + D_4 + \frac{8}{\lambda^2 \pi n k} \frac{t^2}{1 + 4t^4} (f_3 - 2f_1) \right].$$

W zakończeniu pozostaje jeszcze obliczyć kąt obrotu na brzegu  $y = 0$ . Wielkość tę otrzymamy ze wzoru (3.6)<sub>4</sub> przy uwzględnieniu (6.1) oraz (6.7):

$$(6.9) \quad \Psi_0 = \frac{\lambda}{Ehc} \left( C_2 q_{11} + D_2 p_{11} - C_4 q_{21} + D_4 p_{21} - \frac{16}{\lambda^3 \pi n} \frac{t^2}{1+4t^4} f_2 \right) + kV_0.$$

### 7. Zaburzenia brzegowe $s = 0$

Zaburzenia te mogą być opisane wzorami (6.2); należy tylko pamiętać, że zamiast wskaźnika  $y$  dajemy  $s$ , zamiast stałych całkowania  $C_2, C_4, D_2$  i  $D_4$  należy wstawić  $C_1, C_3, D_1$  i  $D_3$ . Należy również zmienić znaki przy siłach  $S$  i  $Q_2^*$  (rys. 2c). Po tych przyjęciach i po uwzględnieniu warunków (3.2) otrzymamy następujące równania określające stałe całkowania zaburzeń brzegowych dla brzegu  $s = 0$  ( $y = y_0$ ):

$$(7.1) \quad \begin{aligned} C_1 + C_3 &= \frac{4}{\lambda^2 \pi n k} \frac{f_0 h}{1+4t^4} [4t^4 R + (1-4t^4) \varrho \cos(\varphi + \beta_0)], \\ C_1 p_{11} + D_1 p_{11} + C_3 p_{21} + D_3 q_{21} &= \frac{32}{\lambda^3 \pi n} \frac{f_0 h \varrho t^4}{1+4t^4} \sin(\varphi + \beta_0), \\ C_1 q_{12} + D_1 (p_{12} - \nu) - C_3 q_{22} + D_3 (p_{22} - \nu) &= \\ &= \frac{8}{\lambda^2 \pi n k} \frac{f_0 h \nu t^2}{1+4t^4} [R - 2\varrho \cos(\varphi + \beta_0)], \\ C_1 (q_{13} - (2-\nu) q_{11}) + D_1 (p_{13} - (2-\nu) p_{11}) - C_3 (q_{23} - (2-\nu) q_{21}) + \\ &+ D_3 (p_{23} - (2-\nu) p_{21}) = \frac{16(2-\nu)}{\lambda^3 \pi n} \frac{f_0 h \varrho t^2}{1+4t^4} \sin(\varphi + \beta_0). \end{aligned}$$

W równaniu (7.1)<sub>3</sub> przyjęto następujące uproszczenia

$$\nu + \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 = \nu, \quad (2-\nu) + \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 \approx 2-\nu.$$

Wyznaczając z (7.1) stałe całkowania  $C_1, D_1, C_3, D_3$  i podstawiając do (6.3) (przy uwzględnieniu uwag podanych na początku tego punktu) otrzymamy wzory określające siły wewnętrzne w pobliżu brzegu  $s = 0$ .

### 8. Podstawowe wzory dla łupiny drugiej

Jeżeli łupina druga zajmie takie położenie jak na rys. 2b, to wtedy (jak to wynika z porównania z rys. 2a) stan naprężenia i odkształcenia będzie mógł być opisany wzorami podanymi dla łupiny pierwszej z tym zastrzeżeniem, że oprócz uwzględnienia zmian podanych w punkcie 4 należy dodatkowo przyjąć



$$(8.1) \quad \begin{array}{l} Y_2 = -Y_1, \quad Z_2 = Z_1 \\ u_2 = u_1, \quad -v_2 = v_1, \quad w_2 = w_1, \quad \psi_1 = -\psi_2, \\ \beta_2 = -\beta_1. \end{array}$$

Stąd wynika praktyczny wniosek, że aby wyprowadzić ze wzorów dla łupiny pierwszej wzory dla łupiny drugiej należy zmienić współczynniki według poniższego schematu:

$$(8.2) \quad \begin{array}{l} (f_3)_1 \rightarrow (f_3)_2, \quad (f_2)_1 \rightarrow -(f_2)_2, \quad (f_1)_1 \rightarrow (f_1)_2, \\ (S_0)_1 \rightarrow -(S_0)_2, \quad (Q_0^*)_1 \rightarrow -(Q_0^*)_2. \end{array}$$

W ten sposób siły wewnętrzne występujące w łupinie drugiej będą się wyrażać wzorami (6.2), (6.3) i (6.4), przy czym wszystkie nowe współczynniki (4.4), (5.8) oraz podane w tablicy I, będą obliczone dla wymiarów łupiny drugiej. Ponadto przy siłach  $S_{y=s}$ ,  $Q_{2y=s}^*$  będą zmienione znaki oraz uwzględnione równości (8.2). Podobnie stałe całkowania zostaną obliczone z równań (6.5) i (7.1), przemieszczenia ze wzorów (6.7) oraz (6.8), a kąt obrotu ze wzorów (6.9).

### 9. Tok rozwiązywania zagadnienia

Rozwiązanie niniejszego zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia stałych całkowania z równań (6.5) i podstawienia ich do wzorów (6.7), (6.8) i (6.9), przy czym obliczenia te należy wykonać dla obydwu łupin, uwzględniając ich różne wymiary geometryczne i mając na uwadze zależności (8.2). Następnie wstawiamy te wartości do równań (3.6) i obliczamy współczynniki  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  i  $Q_0^*$  szeregów (3.3). W ten sposób określone zostają stałe całkowania  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $D_2$  i  $D_4$ , a zatem i wszystkie wielkości występujące we wzorach (6.3). Wzory ostatnie w pewnym obszarze odnoszą się do miejsc styku łupin, określać więc będą naprężenia nieciągłości w rozpatrywanej łupinie. Zaburzenia brzegowe brzegów  $s = 0$  określimy (przy podanych uprzednio zmianach) za pomocą wzorów (6.2), (6.3) i (6.4) po uprzednim wyznaczeniu z (7.1) stałych całkowania. Na koniec zauważmy, że analizę stanu naprężeń wystarczy przeprowadzić tylko dla przekroju  $x = l/2$ , gdyż w tym przekroju występują naprężenia największe.

### 10. Przykłady liczbowe

*Przykład 1.* W pierwszym przykładzie przeprowadzimy obliczenia dla wirnika o łopatkach dwupromieniowych, przy czym kształt ich podany jest na rys. 1 i 3. Wymiary geometryczne, współczynniki charakteryzujące daną łupinę pod względem stanu naprężeń i odkształceń i wreszcie współczynniki zależne od liczby obrotów rozważanego wirnika, podane są w tablicy 4 (pozycje porządkowe 1-33).

W pozycjach 34-37 tej tablicy podane są stałe całkowania zaburzeń brzegowych jako funkcje współczynników  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  i  $Q_0^*$ .

Tablica 4

Lp	Równanie, rys. lub tablica	Symbole	Łupina pierwsza		Łupina druga	
			$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$
1	Rys. 3	$R$	18			9
2		$k$	1/18			1/9
3		$h$		0,3		
4		$y_0$	9,4248			6,2832
5		$l$			3	
6		$\varphi$	40°			120°
7		$\beta_0$	30°			40°
8		$n_0$			3000	
9		$R/l$	6			3
10		$R/h$	60			30
11		$q$	7,9145			5,8743
12	(3.4)	$\lambda$		1,0472		
13		$\lambda^2$		1,0966		
14		$\lambda^3$		1,1484		
15	(4.2)	$f_0$		0,8000		
16	(4.4)	$f_1$	1,4551			-0,70492
17		$f_2$	1,2210			1,2210
18		$f_3$	4,3200			2,1600
19	(5.8)	$t$	0,52822			0,74702
20		$t^2$	0,27902			0,55803
21		$4t^4$	0,31141			1,2456
22	(5.8)	$p_{11} = p_1$	1,2540			1,3504
23		$p_{12}$	1,5282			1,7470
24		$p_{13}$	1,8052			2,1525
25	(5.8) Tabl. 1	$q_{11} = q_1$	0,21059			0,27659
26		$q_{12}$	0,52822			0,74702
27		$q_{13}$	0,98424			1,4920
28		$p_{21} = p_2$	0,76812			0,72169
29		$p_{22}$	0,47178			0,25298
30		$p_{23}$	0,18075			-0,20403
31		$q_{21} = q_2$	0,34385			0,51754
32	$q_{22}$	0,52822			0,74702	
33	$q_{23}$	0,56796			0,67004	
34	(6.5)	$D_4$	0,59445 $N_0$ + 0,77166 $S_0$ - - 0,02141 $M_0$ - 0,55191 $Q_0^*$ - - 23,775			0,21847 $N_0$ - 0,48607 $S_0$ + + 0,04711 $M_0$ + 0,44216 $Q_0^*$ - - 3,2661
35		$C_4$	- 1,5055 $N_0$ - 0,93519 $S_0$ - - 0,24637 $M_0$ - 0,30886 $Q_0^*$ + + 62,092			- 1,3678 $N_0$ + 0,72703 $S_0$ - - 0,16445 $M_0$ + 0,24595 $Q_0^*$ + + 17,141
36		$D_2$	- 0,98588 $N_0$ - 0,91231 $S_0$ + + 0,53353 $M_0$ - 0,18847 $Q_0^*$ + + 43,708			- 0,93436 $N_0$ + 0,73487 $S_0$ + + 0,46192 $M_0$ + 0,26831 $Q_0^*$ + + 14,556
37		$C_2$	0,59358 $N_0$ + 0,93519 $S_0$ + + 0,24637 $M_0$ + 0,30886 $Q_0^*$ - - 24,686			0,45588 $N_0$ - 0,72703 $S_0$ + + 0,16445 $M_0$ - 0,24595 $Q_0^*$ - - 3,8153

Tablica 4

Lp	Równanie, rys. lub tablica	Symbole	Łupina pierwsza	Łupina druga
			$n = 1$	$n = 1$
38	(6.7)	$-\frac{Eh}{\lambda} U_0$	$0,75805N_0 + 1,8776S_0 -$ $-0,03285M_0 + 0,134316Q_0^* -$ $-44,078$	$1,0380N_0 - 1,9983S_0 -$ $-0,06427M_0 - 0,23758Q_0^* -$ $-15,643$
39		$\frac{Eh}{\lambda} V_0$	$-2,1074N_0 - 0,75801S_0 +$ $+0,13705M_0 - 0,3737Q_0^* +$ $+90,270$	$-2,7998N_0 + 1,0381S_0 +$ $+0,27008M_0 + 0,68362Q_0^* +$ $+35,209$
40	(6.8)	$EhcW_0$	$-0,39143N_0 - 0,14065S_0 +$ $+0,51212M_0 - 0,74038Q_0^* +$ $+32,471$	$-0,71589N_0 + 0,24880S_0 +$ $+0,50903M_0 + 0,71047Q_0^* +$ $+29,830$
41	(6.9)	$\frac{Ehc}{\lambda} \Psi_0$	$-0,14769N_0 - 0,03666S_0 +$ $+0,78990M_0 - 0,49092Q_0^* +$ $+9,3032$	$-0,29812N_0 + 0,07448S_0 +$ $+0,79105M_0 + 0,49295Q_0^* +$ $+9,0708$
42	(3.6)	$N_0$		26,030
43		$S_0$		8,7463
44		$M_0$		-4,4978
45		$Q_0^*$		-5,2848
46	34	$D_A$	-4,3728	0,29408
47	35	$C_A$	14,201	-10,065
48	36	$D_2$	6,6705	-3,9980
49	37	$C_2$	-0,53164	-0,34676
50	(7.1)	$D_3$	-19,831	-2,3873
51		$C_3$	43,007	19,986
52		$D_1$	34,041	16,038
53		$C_1$	-14,439	-7,7460
54	(6.3) p. 7	$N_{1s}$	$48,714f_{1s} - 43,916f_{2s} +$ $+35,172f_{3s} + 10,762f_{4s}$	$24,379f_{1s} - 27,978f_{2s} +$ $+17,035f_{3s} + 3,5889f_{4s}$
55	(6.4)	$M_{1F}$	$-3,8247 - 2,1620 \sin ky +$ $+2,5765 \cos ky$	$-1,1168 + 1,2625 \sin ky -$ $-0,72893 \cos ky$
56	(6.3)	$M_{1y}$	$0,07656f_{1y} - 0,36804f_{2y} -$ $-1,2827f_{3y} + 0,14972f_{4y}$	$-0,10560f_{1y} + 0,18168f_{2y} +$ $+0,93272f_{3y} + 0,19752f_{4y}$
57	(6.3) p. 7	$M_{1s}$	$-0,24140f_{1s} - 2,0630f_{2s} -$ $-3,9885f_{3s} + 1,0164f_{4s}$	$-0,00920f_{1s} - 0,93260f_{2s} -$ $-1,8920f_{3s} - 0,22628f_{4s}$
58	(6.4)	$N_{2F}$	$23,510 - 14,693 \sin ky +$ $+17,510 \cos ky$	$13,729 - 1,5302 \sin ky +$ $+0,88346 \cos ky$
59	(6.3)	$N_{2y}$	$-7,3154f_{1y} + 0,58308f_{2y} -$ $-4,7956f_{3y} - 15,573f_{4y}$	$4,3842f_{1y} + 0,38012f_{2y} +$ $+0,32256f_{3y} + 11,037f_{4y}$
60	(6.3) p. 7	$N_{2s}$	$-37,570f_{1s} + 15,834f_{2s} -$ $-21,748f_{3s} - 47,162f_{4s}$	$-17,587f_{1s} + 8,4944f_{2s} -$ $-2,6180f_{3s} - 21,917f_{4s}$
61	(6.4)	$M_{2F}$	$-1,1474 - 0,64859 \sin ky +$ $+0,77296 \cos ky$	$-0,33504 + 0,37876 \sin ky -$ $-0,21868 \cos ky$
62	(6.3)	$M_{2y}$	$+0,41580f_{1y} + 0,78772f_{2y} +$ $+0,01288f_{3y} - 0,82156f_{4y}$	$-0,24740f_{1y} - 0,60172f_{2y} +$ $+0,06896f_{3y} + 0,74716f_{4y}$
63	(6.3) p. 7	$M_{2s}$	$3,5556f_{1s} + 3,4031f_{2s} -$ $-0,30740f_{3s} - 2,6008f_{4s}$	$2,3086f_{1s} + 1,7343f_{2s} -$ $-0,27108f_{3s} - 1,4752f_{4s}$

Pozycje 38-41 określają składowe wektora przemieszczenia wspólnego punktu oraz kąt obrotu stycznej do obydwu łupin. Składowe te są wyrażone jako funkcje wielkości  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  i  $Q_0^*$ . Porównanie tych wielkości dla obydwu łupin w miejscu ich zetknięcia daje wartości współczynników  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  i  $Q_0^*$  (pozycje 42-45) występujących w przekroju  $y = 0$ .

Pozycje 46-49 podają stałe całkowania zaburzeń pochodzących od brzegów  $y = 0$ : są to stałe  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $D_2$  i  $D_4$ . W pozycjach 50-53 zestawiono stałe całkowania  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $D_1$  i  $D_3$ . Stałe te określają zaburzenia pochodzące od brzegów  $s = 0$ .

Wreszcie w pozycjach 54-63 podano siły określające pewną praktyczną wartość naprężeń, przy czym indeks  $F$  posiadają siły niezależne od obciążeń brzegowych [wzory (6.4)], indeks  $y$  siły, które określają zaburzenia pochodzące od brzegu  $y = 0$  (6.3), zaś indeks  $s$  siły określające zaburzenia pochodzące od brzegów  $s = 0$  [wzory (6.3) z uwzględnieniem zmian podanych w p. 7].

Wielkości wyrażone wzorami (6.2) przedstawione są na wykresach 4a-4d. Łatwo na ich podstawie obliczyć naprężenia normalne (rys. 5a i 5b), które z uwagi na pominięcie naprężeń stycznych (jako względnie małych) będą odgrywały rolę naprężeń głównych. Na rys. 5c podano wykresy naprężeń zredukowanych, obliczonych na podstawie hipotezy HUBERA. Wykresy podane na rys. 5 pozwalają stwierdzić, że największe naprężenia o wartości  $360 \text{ kG/cm}^2$  powstają na brzegu  $s = 0$  w łupinie pierwszej. Jeżeli będziemy analizowali wykresy 5a i 5b, to stwierdzimy, że oprócz naprężeń ściskających pojawiają się również — i to dosyć duże — naprężenia rozciągające ( $\sigma_{1z} = 230$  oraz  $\sigma_{2z} = 160$ ) na zewnętrznej stronie łupiny. Te naprężenia mogą być niebezpieczne dla łopatek wirników wykonanych z żeliwa. Ostatni przypadek jest bardzo często spotykany w praktyce. Powyższy wniosek wymaga jednak pewnego zastrzeżenia: żeliwo jest materiałem wykazującym odchylenia od prawa Hooke'a (nieliniowość w sensie fizycznym) tak, iż stosowanie wyników teorii liniowej (w sensie fizycznym i geometrycznym), tj. tej teorii, na gruncie której jest zbudowana klasyczna teoria łupin, musi budzić poważne zastrzeżenia. Poza tym łopatki żeliwne są odlewane wspólnie z tarczami, a zatem nie spełniony jest w nich nawet w przybliżeniu warunek przegubowego podparcia.

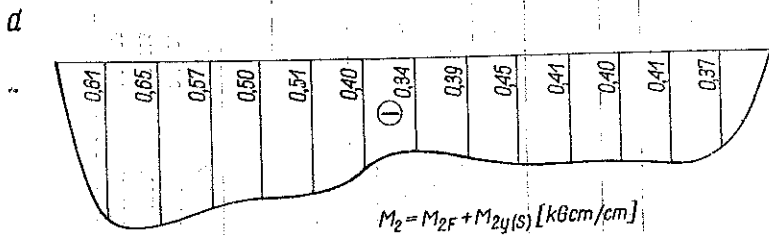
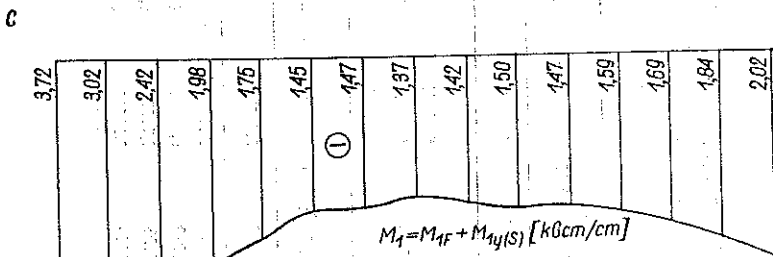
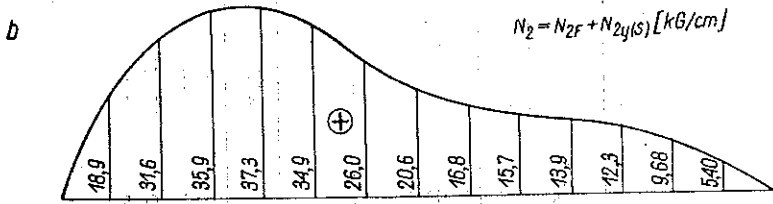
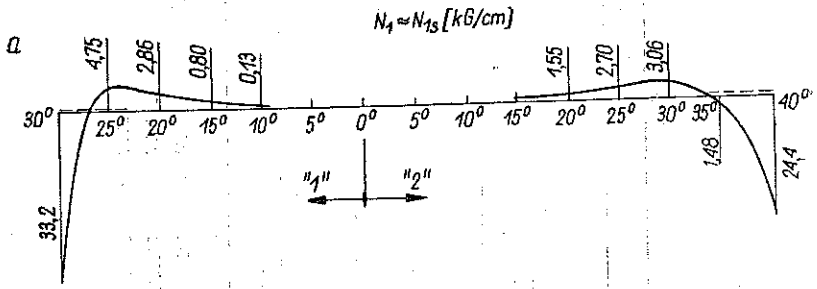
Tak więc dla łupin wykonanych z materiałów podlegających prawu Hooke'a najniebezpieczniejsze naprężenia (dla łopatek przedstawionych na rys. 1 i 3) powstają na brzegu  $s = 0$  w łupinie pierwszej. W tym przypadku łopatka ta pracuje jak łopatka jednopromieniowa. Ostatni wynik jest bardzo ważny z punktu widzenia obliczeń takiej grupy łupin: obliczenie naprężeń wystarczy bowiem przeprowadzić tylko na brzegu  $s = 0$  dla łupiny pierwszej. Odpada tym samym konieczność sporządzania tak bardzo żmudnych wykresów.

*Przykład 2.* Przykład ten obliczono dla łupiny jednopromieniowej wykonanej ze stopu lekkiego ( $\gamma = 2,8 \text{ kG/dcm}^3$ ,  $Q_r = 32 \text{ kG/mm}^2$ ).

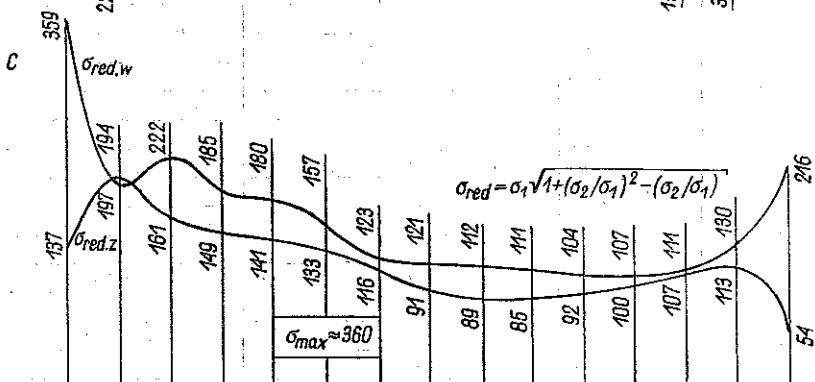
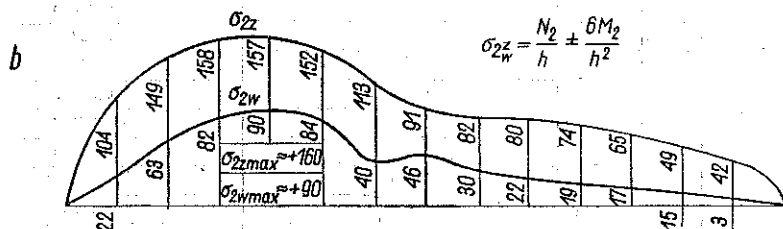
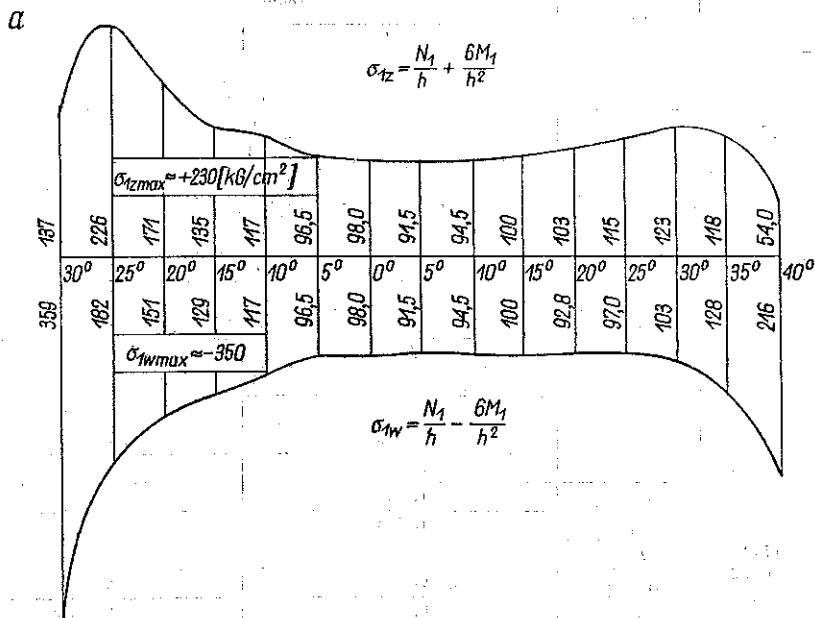
Łupinę traktuje się tutaj jako łupinę pierwszą w przykładzie pierwszym, bez obciążeń na brzegu  $y = 0$ , a naprężenia oblicza się tylko na brzegu  $s = 0$ .

Tablica 5. Wartości funkcji  $f_{jy}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) dla przykładu 1

$\beta^\circ$	0	1	2	3	4	5	7.5	10	12.5	15
$\beta$ [rad]	0,00000	0,01745	0,03491	0,05236	0,06981	0,08727	0,13090	0,17453	0,21817	0,26180
Łupina pierwsza $R/l = 6$ , $p_1 = 1,2540$ , $q_1 = 0,21059$ , $p_2 = 0,76812$ , $q_2 = 0,34385$										
$\lambda y = \pi \left( \frac{R}{l} \right) \beta$	0,00000	0,32899	0,65797	0,98696	1,31595	1,64493	2,46740	3,28987	4,11234	4,93480
$f_{1y}$	0,00000	0,04582	0,06053	0,05986	0,05248	0,04315	0,02250	0,01032	0,00439	0,00177
$f_{2y}$	1,00000	0,66036	0,43400	0,28382	0,18450	0,11955	0,03933	0,01243	0,00373	0,00104
$f_{3y}$	0,00000	0,08773	0,13537	0,15597	0,15910	0,15148	0,11274	0,07230	0,04196	0,02240
$f_{4y}$	1,00000	0,77222	0,58810	0,44184	0,32734	0,23864	0,09936	0,03400	0,00663	0,00280
Łupina druga $R/l = 3$ , $p_1 = 1,3504$ , $q_1 = 0,27659$ , $p_2 = 0,72169$ , $q_2 = 0,51754$										
$\lambda y = \pi \left( \frac{R}{l} \right) \beta$	0,00000	0,16449	0,32899	0,49348	0,65797	0,82247	1,23370	1,64494	2,05617	2,46741
$f_{1y}$	0,00000	0,03642	0,05827	0,06988	0,07403	0,07427	0,06325	0,04756	0,03353	0,02253
$f_{2y}$	1,00000	0,79998	0,63864	0,50878	0,40448	0,32087	0,17811	0,09743	0,05245	0,02772
$f_{3y}$	0,00000	0,07551	0,13330	0,17693	0,20774	0,22809	0,24467	0,22921	0,19827	0,16130
$f_{4y}$	1,00000	0,88485	0,77550	0,67764	0,58627	0,50307	0,32964	0,20082	0,11003	0,04880



Rys. 4



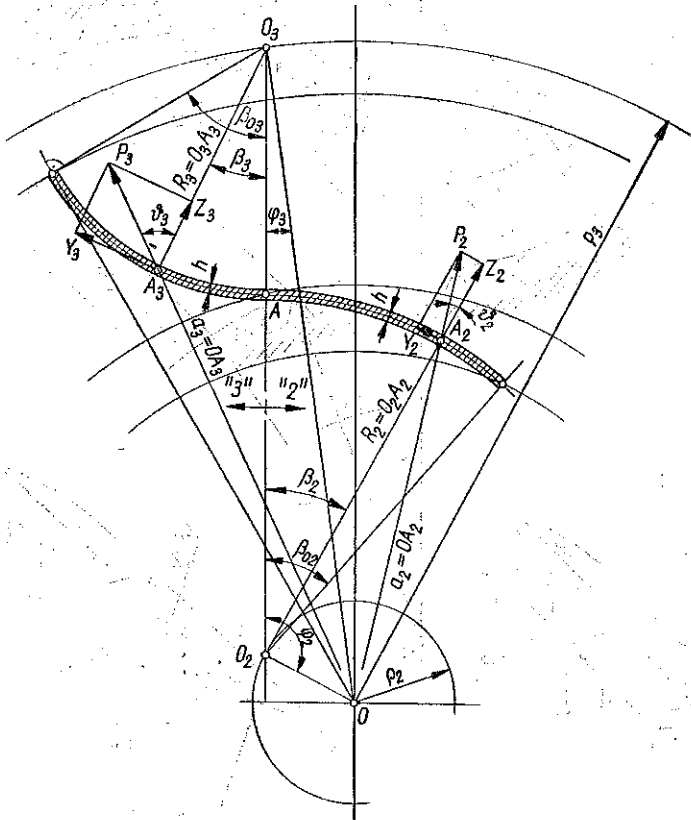
Rys. 5

Tablica 6

Lp	Równanie, rys. lub tablica	Symbole	Łupina pierwsza		
			$n = 1$	$n = 3$	
1		$R$	22,8		
2		$k$	1/22,8		
3		$h$	0,6		
4		$l$	3,6		
5	Rys. 3	$\varphi$	30° 54'		
6		$\beta_d$	36° 10'		
7		$n_0$	8550		
8		$R/l$	19/3		
9		$R/h$	38		
10		$e$	17,15		
11		(3.4)	$\lambda$	0,87266	2,6180
12		(4.2)	$f_0$	2,29	
13	(5.8)	$t$	0,39824	0,13275	
14		$t^2$	0,15860	0,01762	
15		$4t^4$	0,10061	0,00124	
16	(5.8) Tabl. 1, 8, 9, 10 i 11	$p_{11} = p_1$	1,1942	1,0661	
17		$p_{12}$	1,3982	1,1327	
18		$p_{13}$	1,6033	1,1994	
19		$q_{11} = q_1$	0,16674	0,06226	
20		$q_{12}$	0,39824	0,13275	
21		$q_{13}$	0,70871	0,21205	
22		$p_{21} = p_2$	0,81345	0,93396	
23		$p_{22}$	0,60176	0,86725	
24	(5.8) Tabl. 1, 8, 9, 10 i 11	$p_{23}$	0,39198	0,80055	
25		$q_{21} = q_2$	0,24480	0,07107	
26		$q_{22}$	0,39824	0,13275	
27		$q_{23}$	0,47124	0,18562	
28		$q_{13} - (2 - \nu) q_{11}$	0,42525	0,10621	
29	(3.1)	$p_{13} - (2 - \nu) p_{11}$	-0,42675	-0,61303	
30		$q_{23} - (2 - \nu) q_{21}$	0,05508	0,06480	
31		$p_{23} - (2 - \nu) p_{21}$	-0,99080	-0,78718	
32	(3.1)	$\lambda^2 D_3$	-336	-332	
33		$\lambda^2 C_3$	538	382	
34		$\lambda^2 D_1$	403	335	
35		$\lambda^2 C_1$	-236	-292	
36	(6.3)	$N_{1F}$	-0,123	0,00	
37	(6.4) p. 7	$N_{1s}$	-301	-89,1	
38	(6.3)	$M_{1F}$	-19,7	-0,803	
39	(6.4) p. 7	$M_{1s}$	-9,22	-0,404	
40	(6.2)	$N_1 = N_{1F} + N_{1s}$	-301	-89,1	
41		$M_1 = M_{1F} + M_{1s}$	-28,9	-1,21	
42		$\sigma_{N_1} = \frac{N_1}{h}$	-502	-148	
43		$\sigma_{M_1} = \frac{6M_1}{h^2}$	-482	-20	
44		$\sigma_{1R} = \sigma_{N_1} + \sigma_{M_1}$	-984	-168	
45		$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{13}$	-1152		



Celem przykładu jest zagadnienie zorientowania się w zbieżności otrzymanego szeregu naprężeń. Wynik prowadzi do wniosku, że drugi wyraz szeregu stanowi ok. 17% wyrazu pierwszego, a więc zbieżność jest nieco gorsza niż w metodzie przemieszczeniowej. Aby więc otrzymać wynik praktycznie wystarczający w oblicze-



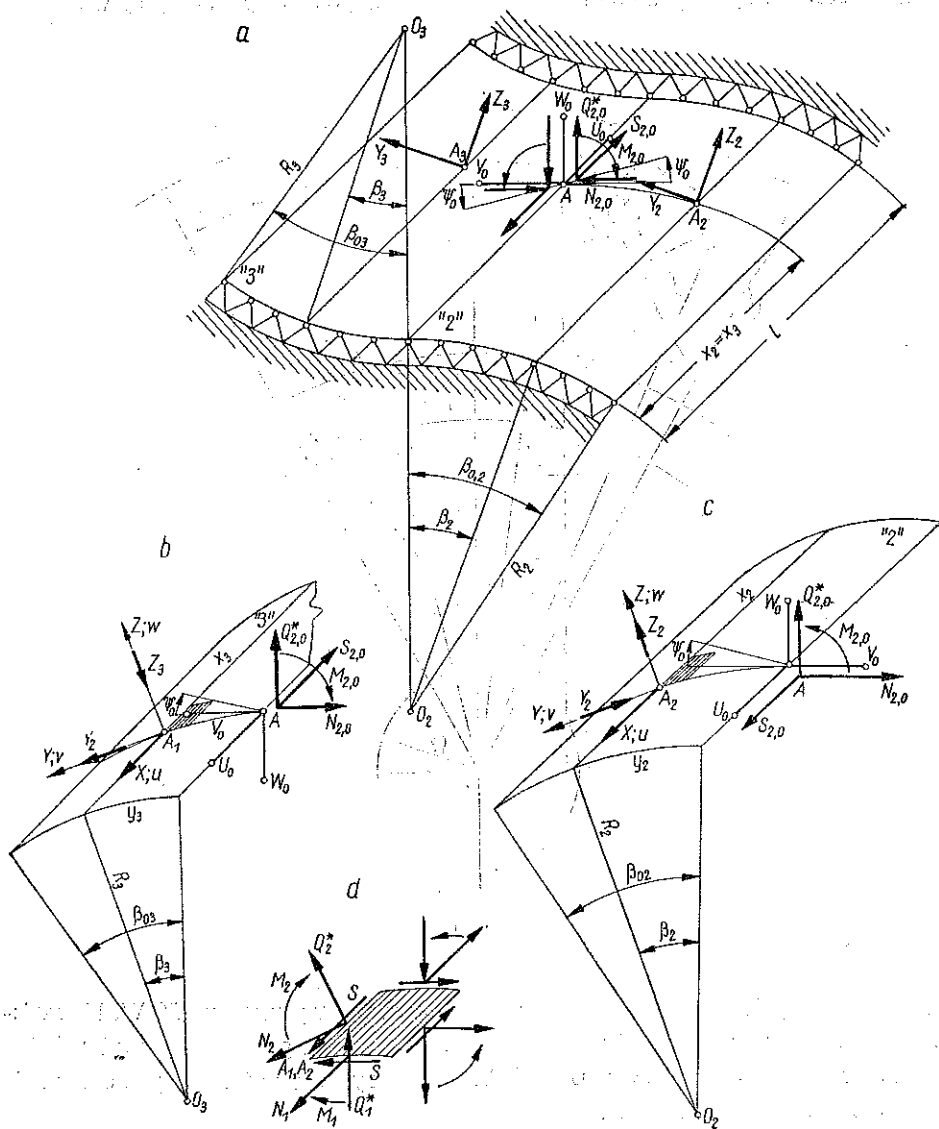
Rys. 6

niach technicznych, trzeba wziąć przynajmniej dwa wyrazy szeregu. W. W. Nowożyłow wspomina, że metoda sił zespolonych w przypadku, gdy bierzemy tylko jeden wyraz szeregu, daje błąd rzędu 10-15%. Wynik otrzymany w tym przykładzie zdaje się to stanowisko potwierdzać.

*Przykład 3.* Przykład ten obejmuje obliczenie łopaty dwupromieniowej o kształcie pokazanym na rys. 6 i 7. Takie łopaty spotyka się np. w dużych wentylatorach górniczych.

Wymiary łopaty zostały tak dobrane, aby można było wykorzystać jak najwięcej danych obliczeniowych z przykładu pierwszego.

Cały też tok postępowania jest analogiczny do zastosowanego w przykładzie pierwszym. Pewnych wyjaśnień wymaga tylko sposób przejścia ze wzorów dla łupiny pierwszej do wzorów dla łupiny trzeciej.



Rys. 7

Biorąc pod uwagę, że składowe siły odśrodkowej w łupinie trzeciej wynoszą

$$(10.1) \quad \begin{aligned} Y_3 &= f_0 h e_3 \sin(\varphi_3 + \beta_3), \\ Z_3 &= -f_0 h [R_3 - e_3 \cos(\varphi_3 + \beta_3)]. \end{aligned}$$

lub

$$(10.2) \quad \begin{aligned} Y_3 &= f_{2,3} \cos k_3 y_3 + f_{1,3} \sin k_3 y_3, \\ Z_3 &= -f_{3,3} - f_{2,3} \sin k_3 y_3 + f_{1,3} \cos k_3 y_3 \end{aligned}$$

i uwzględniając fakt, że składowa siła  $Z_3$  (rys. 6 i 7b) jest przeciwnie skierowana do przyjętego dodatniego kierunku osi, widzimy, że w danym przypadku można zastosować wzory (4.3), należy tylko zmienić w nich wszystkie współczynniki zgodnie z poniższym schematem:

$$(10.3) \quad (f_3) \rightarrow (f_3)_3, \quad (f_2) \rightarrow (f_2)_3, \quad (f_1) \rightarrow (f_1)_3,$$

natomiast w łupinie drugiej przejście tych współczynników jest takie samo jak w przykładzie pierwszym, tj.

$$(10.4) \quad (f_3) \rightarrow (f_3)_2, \quad (f_2) \rightarrow -(f_2)_2, \quad (f_1) \rightarrow (f_1)_2.$$

Wyjaśnienia wymagają jeszcze znaki sił  $M_{2,0}$ ,  $S_{2,0}$ ,  $N_{2,0}$  i  $Q_{2,0}^*$  ( $M_0$ ,  $S_0$ ,  $Q_0^*$  i  $N_0$ ). Jak wynika z porównania rys. 7c, 7d i 2d, należy w łupinie drugiej niniejszego przykładu zachować znaki takie jak w analogicznej łupinie przykładu pierwszego. Natomiast w łupinie trzeciej (por. rys. 7b, 7d i 2a) należy w odpowiednich wzorach przykładu pierwszego zmienić znak przy siłach  $Q_{2,0}^*$  i  $M_{2,0}$ , co pociąga za sobą zmianę znaków przy wartościach  $Q_0^*$  i  $M_0$ .

W końcu z porównania przemieszczeń punktu  $A$  oraz kąta obrotu wspólnej stycznej (rys. 7b i 7c) otrzymamy zamiast równości (3.6), następujące zależności:

$$(10.5) \quad (u_0)_3 = (u_0)_2, \quad (v_0)_3 = -(v_0)_2, \quad (w_0)_3 = (w_0)_2, \quad (\psi_0)_3 = (\psi_0)_2.$$

W tablicy 7 podano tylko te wyniki, które na skutek powyższych zmian dają inne wartości niż w przykładzie pierwszym.

Z uwagi na analogiczny sposób budowy wykresów w tym przykładzie oraz w przykładzie pierwszym nie będziemy się nad tą sprawą zatrzymywać i przejdziemy do analizy wykresów końcowych (rys. 9): tutaj wielkości maksymalnych naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  nie leżą na żadnym z brzegów i w celu zorientowania się o ich wielkości należy przeprowadzić analizę stanu naprężeń dla całego przekroju  $x = l/2$  łupiny trzeciej. Wynik ten komplikuje bardzo rozwiązanie i zmusza do obliczeń żmudnych i wymagających dużego nakładu pracy.

W przykładzie niniejszym największe naprężenie zredukowane wynosi  $\sigma_{red} = 630 \text{ kG/cm}^2$ .

## 11. Wnioski końcowe

Reasumując przeprowadzone tutaj wywody możemy zestawić następujące wnioski:

1. Przeprowadzona analiza przykładów liczbowych wskazuje, że w przypadku łopatek o kształcie podanym na rys. 1 i 3 (przykład 1), największe naprężenia występują na brzegu  $s = 0$ , tj. na brzegu najbardziej oddalonym od osi obrotu.

Tablica 7

Lp	Równanie, rys. lub tablica	Symbole	Łupina trzecia	Łupina druga
			$n = 1$	$n = 1$
4	Tabl. 1 Rys. 3 Rys. 6	$\gamma_0$	13,823	
6		$\varphi$	9°39'	
7		$\beta_0$	44°	
11		$\varrho$	30,366	
16	(4.4)	$f_1$	+7,1849	
34	(6.5)	$D_4$	0,59445 $N_0$ +0,77166 $S_0$ + +0,02141 $M_0$ +0,55191 $Q_0^*$ - -64,053	
35		$C_4$	-1,5055 $N_0$ -0,93519 $S_0$ + +0,24637 $M_0$ +0,30886 $Q_0^*$ + +174,15	
36		$D_2$	-0,98588 $N_0$ -0,91231 $S_0$ - -0,53353 $M_0$ +0,18847 $Q_0^*$ + +93,792	
37		$C_2$	0,59358 $N_0$ +0,93519 $S_0$ - -0,24637 $M_0$ -0,30886 $Q_0^*$ - -73,866	
38		(6.7)	$-\frac{Eh}{\lambda} U_0$	0,75805 $N_0$ +1,8776 $S_0$ + +0,03285 $M_0$ -0,13431 $Q_0^*$ - -114,10
39	$\frac{Eh}{\lambda} V_0$		-2,1074 $N_0$ -0,75801 $S_0$ - -0,13705 $M_0$ +0,37378 $Q_0^*$ + +230,97	
40	(6.8)	$Ehc W_0$	-0,39143 $N_0$ -0,14065 $S_0$ - -0,51212 $M_0$ +0,74038 $Q_0^*$ - -59,635	
41	(6.9)	$\frac{Ehc}{\lambda} \psi_0$	-0,14769 $N_0$ -0,03666 $S_0$ - -0,78990 $M_0$ +0,49092 $Q_0^*$ - -7,0060	
42	(3.6)	$N_0$		71,119
43		$S_0$		29,003
44		$M_0$		-15,857
45		$Q_0^*$		72,627
46	34	$D_3$	40,348	29,539
47	35	$C_3$	58,483	-38,577
48	36	$D_2$	19,366	-18,419
49	37	$C_2$	-23,052	-12,950
50	(7.1)	$D_3$	-47,960	
51		$C_3$	110,26	
52		$D_1$	62,556	
53		$C_1$	-41,417	
54	(6.3) p. 7	$N_{18}$	80,845 $f_8$ -105,65 $f_{28}$ + +88,682 $f_8$ +29,264 $f_{18}$	

Lp	Równanie, rys. lub tablica	Symbole	Łupina trzecia	Łupina druga
			$n = 1$	$n = 1$
55	(6.4)	$M_{1F}$	$-3,8248 - 2,1620 \sin ky +$ $+ 12,722 \cos ky$	
56	(6.3)	$M_{1y}$	$-0,93732f_{1y} - 1,4078f_{2y} -$ $-4,3617f_{3y} - 4,3710f_{4y}$	$-1,0245f_{1y} + 0,58373f_{2y} +$ $+ 4,2082f_{3y} - 1,8569f_{4y}$
57	(6.3) p. 7	$M_{1s}$	$-1,2460f_{1s} - 4,0260f_{2s} -$ $-8,6669f_{3s} + 2,3594f_{4s}$	
58	(6.4)	$N_{2F}$	$23,510 - 14,693 \sin ky +$ $+ 86,462 \cos ky$	
59	(6.3)	$N_{2y}$	$-21,237f_{1y} + 25,280f_{2y} +$ $+ 44,247f_{3y} - 64,134f_{4y}$	$20,199f_{1y} + 14,201f_{2y} +$ $+ 32,393f_{3y} + 42,305f_{4y}$
60	(6.3) p. 7	$N_{2s}$	$-68,600f_{1s} + 45,418f_{2s} -$ $-52,594f_{3s} - 120,91f_{4s}$	
61	(6.4)	$M_{2F}$	$-1,1474 - 0,64859 \sin ky +$ $+ 3,8167 \cos ky$	
62	(6.3)	$M_{2y}$	$3,8372f_{1y} + 1,1557f_{2y} +$ $+ 3,1220f_{3y} - 2,3854f_{4y}$	$0,49572f_{1y} - 3,6166f_{2y} +$ $+ 2,3773f_{3y} + 2,7308f_{4y}$
63	(6.3) p. 7	$M_{2s}$	$8,3539f_{1s} + 5,4711f_{2s} -$ $-0,63642f_{3s} - 6,6185f_{4s}$	

Zauważono też, że w tego typu łopatkach po stronie zewnętrznej powstają naprężenia rozciągające rzędu naprężeń maksymalnych, co w przypadku materiałów takich jak żeliwo powinno być brane pod uwagę.

2. Dla łopatek o kształcie podanym na rys. 6 i 7 (przykład 3), należy przeprowadzić pełną analizę stanu naprężeń w całym przekroju  $x = l/2$  tylko dla łupiny trzeciej. Odpada tym samym analiza stanu naprężeń w całej łopatce. Należy się więc ograniczyć do wykresów naprężeń w łopatce dalej położonej w stosunku do osi obrotu.

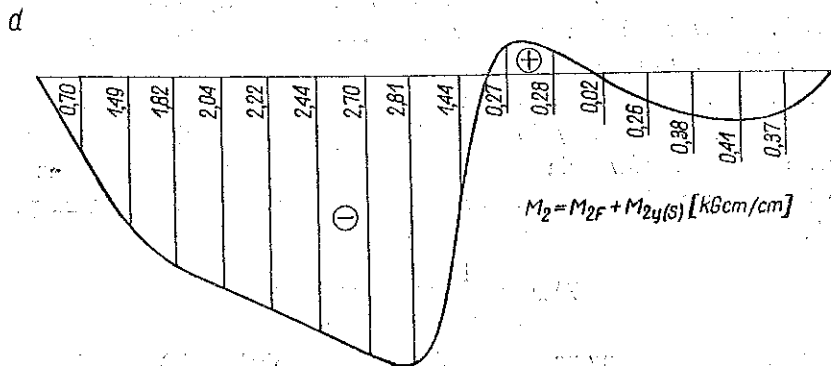
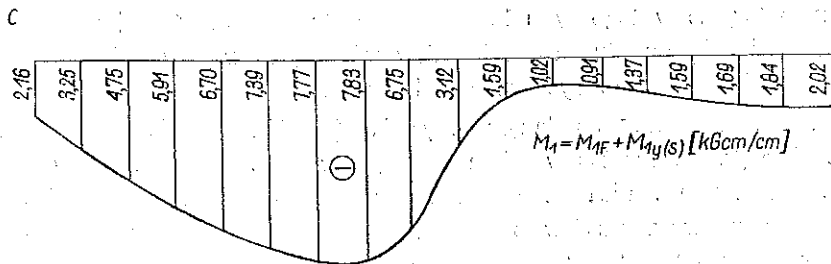
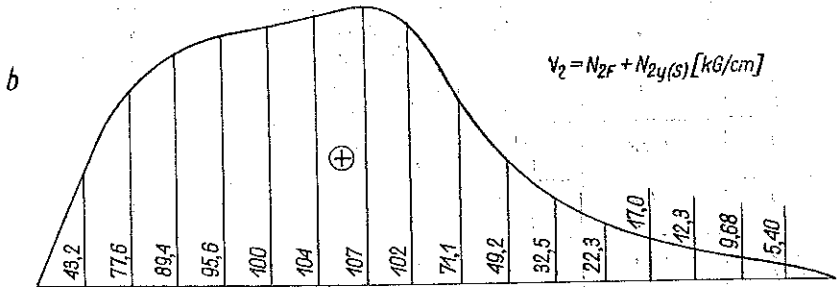
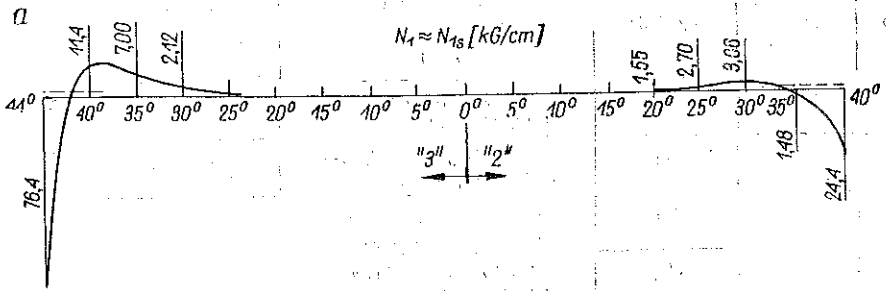
3. Przykład drugi wskazuje, że dla otrzymania praktycznie wystarczającego przybliżenia należy wziąć dwa wyrazy w szeregach sił wewnętrznych, czyli obliczenia przeprowadzić dla  $n = 1, 3$ .

4. Z uwagi na pewne uproszczenia, które stosowano w obliczeniach, nasuwa się spostrzeżenie, że można by do obliczeń łupin bardzo krótkich stosować równania jeszcze prostsze. Równania te składają się z «nałożonych» równań stanu płytowego i tarczowego (por. 7). Ponieważ stan płytowy określić można za pomocą równania

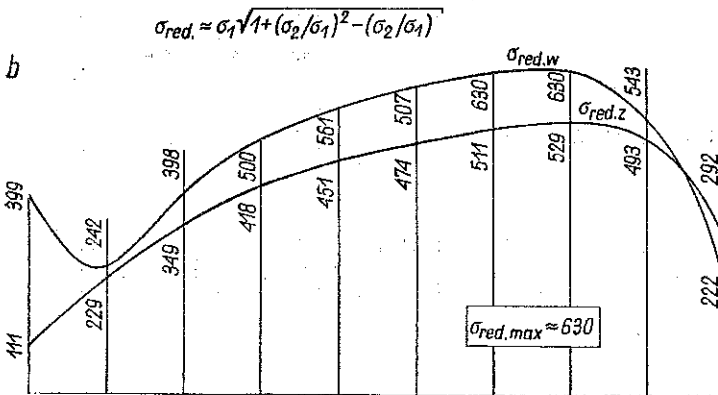
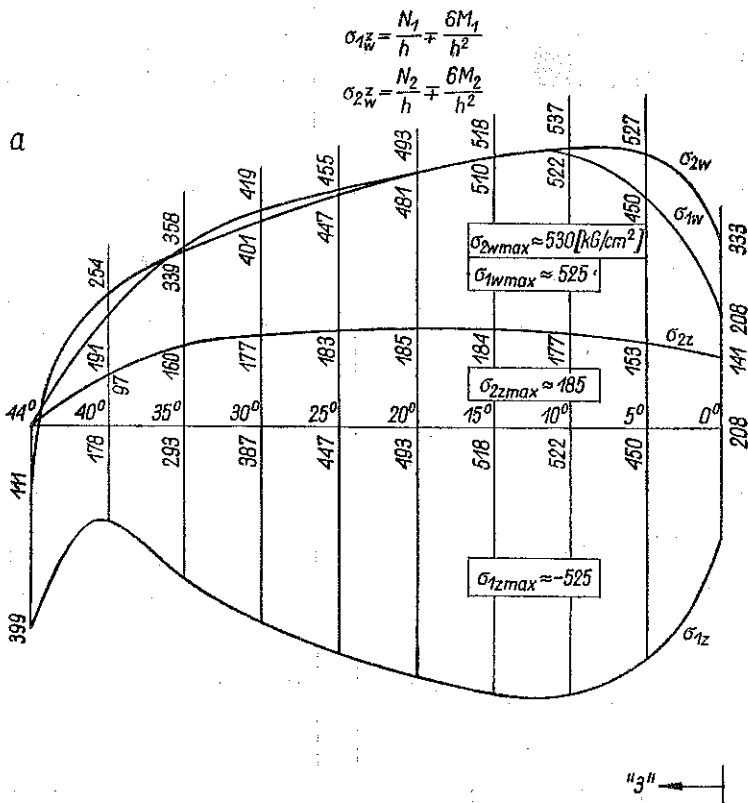
$$(11.1) \quad \nabla^4 w = \frac{1}{Ehc^2} Z_i, \quad Z_i = Z,$$

a stan tarczowy (uogólniony na przypadek dowolnego obciążenia) może być opisany uogólnioną funkcją Airy'ego, którą określić można z równania

$$(11.2) \quad \nabla^4 \varphi = Z_r,$$



Rys. 8



Rys. 9

Tablica 8. Wartości współczynnika  $p_1$

$r = q_{12} = q_{22}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1	1,04989	1,05485	1,05981	1,06477	1,06971	496	496	496	494	494
0.2	1,09922	1,10410	1,10898	1,11385	1,11871	488	488	487	486	485
0.3	1,14764	1,15243	1,15720	1,16197	1,16672	479	477	477	475	474
0.4	1,19499	1,19967	1,20433	1,20898	1,21361	468	466	465	463	463
0.5	1,24120	1,24575	1,25030	1,25483	1,25935	455	455	453	452	451
0.6	1,28623	1,29067	1,29510	1,29952	1,30393	444	443	442	441	439
0.7	1,33013	1,33445	1,33877	1,34308	1,34737	432	432	431	429	429
0.8	1,37291	1,37713	1,38134	1,38554	1,38972	422	421	420	418	418
0.9	1,41463	1,41875	1,42286	1,42695	1,43104	412	411	409	409	407
1.0	1,45535	1,45937	1,46337	1,46737	1,47136	402	400	400	399	398
1.1	1,49510	1,49903	1,50294	1,50685	1,51075	393	391	391	390	388
1.2	1,53395	1,53778	1,54161	1,54543	1,54924	383	383	382	381	381
0.1	1,07465	1,07958	1,08450	1,08941	1,09432	493	492	491	491	490
0.2	1,12356	1,12839	1,13322	1,13804	1,14285	483	483	482	481	479
0.3	1,17146	1,17619	1,18091	1,18561	1,19031	473	472	470	470	468
0.4	1,21824	1,22285	1,22746	1,23205	1,23663	461	461	459	458	457
0.5	1,26386	1,26836	1,27284	1,27732	1,28178	450	448	448	446	445
0.6	1,30832	1,31271	1,31708	1,32144	1,32579	439	437	436	435	434
0.7	1,35166	1,35593	1,36019	1,36444	1,36868	427	426	425	424	423
0.8	1,39390	1,39807	1,40223	1,40637	1,41051	417	416	414	414	412
0.9	1,43511	1,43918	1,44324	1,44728	1,45132	407	406	404	404	403
1.0	1,47534	1,47931	1,48327	1,48722	1,49117	397	396	395	395	393
1.1	1,51463	1,51851	1,52239	1,52625	1,53010	388	388	386	385	385
1.2	1,55305	1,55685	1,56063	1,56441	1,56818	380	378	378	377	376



Tablica 9. Wartości współczynnika  $q_1$

$f = q_{12} = q_{22}$	0	$\delta$	1	$\delta$	2	$\delta$	3	$\delta$	4	$\delta$
0,1	0,04762	452	0,05214	447	0,05661	444	0,06105	439	0,06544	435
0,2	0,09097	413	0,09510	409	0,09919	406	0,10325	402	0,10727	398
0,3	0,13070	380	0,13450	376	0,13826	374	0,14200	371	0,14571	368
0,4	0,16736	352	0,17088	349	0,17437	347	0,17784	344	0,18128	341
0,5	0,20142	327	0,20469	326	0,20795	323	0,21118	322	0,21440	319
0,6	0,23324	307	0,23631	305	0,23936	304	0,24240	301	0,24541	300
0,7	0,26313	290	0,26603	287	0,26890	286	0,27176	285	0,27461	283
0,8	0,29135	274	0,29409	272	0,29681	271	0,29952	270	0,30222	268
0,9	0,31810	260	0,32070	259	0,32329	258	0,32587	256	0,32843	255
1,0	0,34356	248	0,34604	247	0,34851	246	0,35097	244	0,35341	244
1,1	0,36787	237	0,37024	236	0,37260	235	0,37495	235	0,37730	233
1,2	0,39115	227	0,39342	227	0,39569	226	0,39795	225	0,40020	223
			6	7	8	9				
0,1	0,06979	431	0,07410	428	0,07838	425	0,08261	420	0,08681	416
0,2	0,11125	396	0,11521	392	0,11913	389	0,12302	386	0,12688	382
0,3	0,14939	365	0,15304	362	0,15666	359	0,16025	357	0,16382	354
0,4	0,18469	340	0,18809	336	0,19145	335	0,19480	332	0,19812	330
0,5	0,21759	317	0,22076	315	0,22391	313	0,22704	311	0,23015	309
0,6	0,24841	298	0,25139	296	0,25435	295	0,25730	292	0,26022	291
0,7	0,27744	281	0,28025	280	0,28305	278	0,28583	277	0,28860	275
0,8	0,30490	267	0,30757	265	0,31022	264	0,31286	263	0,31549	261
0,9	0,33098	254	0,33352	253	0,33605	252	0,33857	250	0,34107	249
1,0	0,35585	243	0,35828	241	0,36069	240	0,36309	239	0,36548	239
1,1	0,37963	232	0,38195	232	0,38427	230	0,38657	229	0,38886	229
1,2	0,40243	223	0,40466	223	0,40689	221	0,40910	221	0,41131	221

Tablica 10. Wartości współczynnika  $p_2$

$t = q_{12} = q_{22}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,95014	0,94519	0,94025	0,93532	0,93041	—495	—494	—493	—491	—490
0,2	0,90128	0,89650	0,89175	0,88702	0,88232	—478	—475	—473	—470	—466
0,3	0,85486	0,85042	0,84603	0,84168	0,83739	—444	—439	—435	—429	—425
0,4	0,81275	0,80885	0,80502	0,80125	0,79755	—390	—383	—377	—370	—363
0,5	0,77689	0,77371	0,77061	0,76759	0,76465	—318	—310	—302	—294	—286
0,6	0,74870	0,74633	0,74404	0,74183	0,73970	—237	—229	—221	—213	—205
0,7	0,72855	0,72696	0,72544	0,72399	0,72262	—159	—152	—145	—137	—131
0,8	0,71576	0,71484	0,71398	0,71317	0,71243	—92	—86	—81	—74	—69
0,9	0,70906	0,70867	0,70833	0,70803	0,70778	—39	—34	—30	—25	—21
1,0	0,70711	0,70712	0,70718	0,70726	0,70738	+1	6	8	12	15
1,1	0,70871	0,70903	0,70937	0,70974	0,71013	32	34	37	39	41
1,2	0,71293	0,71347	0,71403	0,71460	0,71520	54	56	57	60	61
0,1	0,92551	0,92063	0,91576	0,91091	0,90609	—488	—487	—485	—482	—481
0,2	0,87766	0,87303	0,86843	0,86387	0,85934	—463	—460	—456	—453	—448
0,3	0,83314	0,82895	0,82481	0,82073	0,81671	—419	—414	—408	—402	—396
0,4	0,79392	0,79037	0,78689	0,78348	0,78014	—355	—348	—341	—334	—325
0,5	0,76179	0,75901	0,75631	0,75369	0,75116	—278	—270	—262	—253	—246
0,6	0,73765	0,73567	0,73378	0,73196	0,73022	—198	—189	—182	—174	—167
0,7	0,72131	0,72007	0,71889	0,71779	0,71674	—124	—118	—110	—105	—98
0,8	0,71174	0,71110	0,71051	0,70998	0,70950	—64	—59	—53	—48	—44
0,9	0,70757	0,70740	0,70727	0,70718	0,70712	—17	—13	—9	—6	—1
1,0	0,70753	0,70771	0,70791	0,70815	0,70842	18	20	24	27	29
1,1	0,71054	0,71098	0,71144	0,71192	0,71242	44	46	48	50	51
1,2	0,71581	0,71643	0,71707	0,71773	0,71840	62	64	66	67	68

Tablica 11. Wartości współczynnika  $q_2$

$t = q_{11} = q_{22}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,05262	557	0,05819	562	0,06381	568	0,06949	575	0,07524	580
0,2	0,11095	617	0,11712	623	0,12335	630	0,12965	635	0,13600	642
0,3	0,17547	679	0,18226	686	0,18912	692	0,19604	697	0,20301	704
0,4	0,24608	737	0,25345	741	0,26086	747	0,26833	751	0,27584	756
0,5	0,32180	778	0,32958	782	0,33740	784	0,34524	787	0,35311	788
0,6	0,40069	798	0,40867	798	0,41665	798	0,42463	798	0,43261	798
0,7	0,48040	794	0,48834	791	0,49625	790	0,50415	788	0,51203	786
0,8	0,55885	771	0,56656	769	0,57425	766	0,58191	762	0,58953	760
0,9	0,63464	740	0,64204	737	0,64941	734	0,65675	730	0,66405	726
1,0	0,70711	705	0,71416	702	0,72118	698	0,72816	695	0,73511	691
1,1	0,77606	670	0,78276	667	0,78943	664	0,79607	660	0,80267	657
1,2	0,84159	637	0,84796	635	0,85431	631	0,86062	627	0,86689	625
0,1	0,08104	586	0,08690	592	0,09282	598	0,09880	605	0,10485	610
0,2	0,14242	649	0,14891	654	0,15545	661	0,16206	667	0,16873	674
0,3	0,21005	709	0,21714	715	0,22429	721	0,23150	726	0,23876	732
0,4	0,28340	760	0,29100	765	0,29865	768	0,30633	772	0,31405	775
0,5	0,36099	791	0,36890	793	0,37683	794	0,38477	796	0,39273	796
0,6	0,44059	798	0,44857	797	0,45654	797	0,46451	795	0,47246	794
0,7	0,51989	784	0,52773	782	0,53555	779	0,54334	777	0,55111	774
0,8	0,59713	757	0,60470	753	0,61223	751	0,61974	747	0,62721	743
0,9	0,67131	723	0,67854	719	0,68573	716	0,69289	713	0,70002	709
1,0	0,74202	688	0,74890	684	0,75574	681	0,76255	677	0,76932	674
1,1	0,80924	654	0,81578	650	0,82228	647	0,82875	644	0,83519	640
1,2	0,87314	622	0,87936	619	0,88555	615	0,89170	613	0,89783	610

gdzie

$$(11.3) \quad Z_r = \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy - \nu \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right),$$

to w takim przypadku stan nałożony otrzymamy połączywszy równania (11.1) i (11.2). Możemy tego dokonać wprowadzając zespoloną funkcję naprężeń

$$(11.4) \quad \bar{F} = \Phi + iEh\epsilon w.$$

Stąd otrzymamy

$$(11.5) \quad \nabla^4 \bar{F} = \bar{Z},$$

gdzie

$$(11.6) \quad \bar{Z} = Z_r + iZ_i.$$

Funkcja  $\bar{F}$  w tym przypadku może być określona z równania (11.5), a siły wewnętrzne ze wzorów (2.6). Składowe przemieszczenia możemy wyznaczyć za pomocą równań podanych uprzednio.

Całkowanie równania (11.5) dla warunków przegubowego podparcia można przeprowadzić za pomocą metody Lévy'ego. Całkę szczególną można przyjąć w postaci funkcji (5.2), natomiast całkę równania jednorodnego, które jest równaniem biharmonicznym, można przyjąć dla omawianych warunków brzegowych w postaci znanej z teorii płyt

$$(11.7) \quad \bar{F} = \sum (\bar{A}_1 \operatorname{ch} \lambda_1 y + \bar{A}_2 \operatorname{sh} \lambda_1 y + \bar{A}_3 y \operatorname{ch} \lambda_1 y + \bar{A}_4 y \operatorname{sh} \lambda_1 y) \sin \lambda x,$$

gdzie  $\bar{A}_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) przedstawiają stałe zespolone.

## 12. Tablice pomocnicze

W tablicach 8-11 podano wartości współczynników  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $p_2$  i  $q_2$ , określonych za pomocą wzorów (5.8). Podane tablice ułożono dla zakresów wartości  $t = 0, 1, 1, 3$ . W przypadku wartości nie pokrywających się z szeregiem podstawowej stałej  $t$ , można stosować interpolację liniową. Potrzebne do takiej interpolacji poprawki (oznaczone w tablicach przez  $\delta$ ) umieszczone są w pośrodku wartości przyjętego szeregu stałej  $t$ .

## Literatura cytowana w tekście

- [1] С. А. Амбарцумян, *К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 3, 18 (1954), 303.
- [2] S. BORKOWSKI, *Metoda zespolonej funkcji naprężeń w teorii łupin małowyniosłych*, Spr. Od. Gliw. PTMTS-u, 7, 1961, 17.
- [3] В. А. Бородавко, *Экспериментальные дослідження напруженого стану, лопаток шахтних відцентрових вентиляторів*, Прикл. Мех., 1, 4 (1958), 97.
- [4] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

- [5] N. J. HOFF, *The Accuracy of Donnell's Equations*, J. Appl. Mech., September, 22 (1955), 329.
- [6] В. И. Феодосьев, *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. II. г. 1, ч. III; под ред. С. Д. Пономарева, Москва 1958.
- [7] А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Москва 1953.
- [8] J. KEMPNER, *Remarks on Donnell's Equations*, J. Appl. Mech., March., 22 (1955), 117.
- [9] Z. KLĘBOWSKI, *Wytrzymałość przemysłowych naczyń ciśnieniowych*, Warszawa 1960.
- [10] З. Д. Костюк, *Експериментальне дослідження напруженого стану пологих циліндричних оболонок*, Прикл. Мех., 2, 1 (1955), 224.
- [11] А. Д. Коваленко, *Пластини и оболочки в роторах турбомашин*, Киев 1955.
- [12] M. LÉVY, *Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire*, Comptes Rendus, 15, CXXXIX (1899), 535.
- [13] J. LEYKO, *Stan naprężenia w wirniku o promieniowych łopatkach położonych po jednej stronie* Arch. Bud. Masz., 3, 7 (1960), 267.
- [14] М. Мишоноф, *К теории пологих оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 5, 22 (1958), 691.
- [15] X. М. Мушгари, *Инвариантные уравнения равновесия пограничной зоны упругой оболочки в комплексной форме*, Прикл. Мат. Мех., 2, 12 (1948), 129.
- [16] В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, 1951.
- [17] Ц. Пфлейдерер, *Лопаточные машины для жидкостей и газов*, Москва 1960.
- [18] А. М. Пеньков, А. С. Бондарчук, *Дослідження напружень у деталях робочого колеса шахтного відцентрового вентилятора*, Прикл. Мех., 3, 1 (1955), 281.
- [19] Г. А. Раер, *Расчет на прочность лопаток колеса центробежного вентилятора*, Энерго-машиностроение, 9 (1956), 6.
- [20] D. RÜDIGER, J. URBAN, *Lupiny walcowe o przekroju kołowym*, Warszawa 1958.
- [21] C. STANESCU, V. VISĂRION, *Исследование квазиинвариантов статико-геометрической аналогии для тонких упругих оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 1, 25 (1961), 68.
- [22] В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.
- [23] S. WOKOWSKI, *Z teorii łupin obrotowo-walcowych*, Spr. Od. Gliw. PTMTS, 5, 1961, 7.
- [24] В. А. Бородавко, *Розрахунок лопаток відцентрових вентиляторів на міцність*, Прикл. Мех., 3, 4 (1958), 302.
- [25] А. Д. Коваленко, *Огляд досліджень з теорії пластин і оболонок в роторах турбомашин*, Прикл. Мех., 2, 1 (1955), 131.

## Резюме

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕКОТОРОМ ТИПЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Дается решение задачи, касающейся местных напряжений разрывности для цилиндрической оболочки в форме, представленной на рис. 1-7. Такие оболочки составляют лопатки роторов насосов, компрессоров, центробежных вентиляторов. Рассматриваемая оболочка представляет собой после разреза — две вращательно-цилиндрические оболочки, с различными радиусами кривизны. Решение сводится к определению постоянных интегрирования из уравнений (6.5) и подстановке их в формулы (6.7), (6.8) и (6.9), при чем это следует сделать для обеих оболочек, учитывая их различные размеры и принимая во внимание зависимости (8.2). Затем подставляем эти значения в уравнение (3.6) и определяем коэффициенты  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0^*$  для рядов (3.3). Таким способом определяются постоянные интегрирования,  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $D_2$  и  $D_4$ , а как из этого следует также и все напряжения [уравнение (6.3)], которое в некоторой области, охватывающей место стыка оболочек, определяют напряжения раз-

рывности в рассматриваемой оболочке. Для оболочки, показанной на рис. 7, следует дополнительно учесть уравнения (10.4) и (10.5).

Анализ числовых примеров показывает, что в случае оболочек приведенных на рис. 1 и 3, наибольшие напряжения появляются на краю  $s = 0$ ; в случае же оболочки, показанной на рис. 6 и 7, следует составить диаграммы напряжений для третьей оболочки. Для получения практически удовлетворительного приближения следует учесть два выражения ( $n = 1, 3$ ) рядов для внутренних сил. Подчеркивается, что расчет очень коротких оболочек можно проводить более простым способом, используя уравнение (11.5).

На табл. 8-11 приводятся, для облегчения исчисления, значения коэффициентов  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $p_2$ ,  $q_2$  для постоянной, характеризующей оболочку в пределах 0,1-1,3.

### Summary

#### STRESS COMPUTATION IN AN OPEN CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO THE ACTION OF CENTRIFUGAL FORCES.

This part gives a solution of the problem of discontinuity stress for a cylindrical shell of which the form is represented by Fig. 1-7. Shells of this type are used for blades of radial pumps, compressors and blowers. The shell under consideration is composed of two cylindrical shells with different radii of curvature. The solution is reduced to the obtainment of the integration constants from the equations (6.5) and the substitution in (6.7), (6.8), (6.9). This must be done for both shells taking into consideration the fact that their dimensions are different and bearing in mind (8.2). Next, these values are inserted in (3.6) to compute the coefficients  $N_0$ ,  $S_0$ ,  $M_0$  and  $Q_0^*$  of the series (3.3). In this manner are determined the integration constants  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $D_2$  and  $D_4$ , and, therefore, all the stresses [Eq. (6.3)], which determine in a certain region including the line of contact between the shells the discontinuity stresses in the shell. For the shell of Fig. 7 the equations (10.4) and (10.5) should be taken into consideration additionally.

An analysis of the numerical examples shows that in the case of the shells of Figs. 1 and 3 the maximum stresses are observed at the  $s = 0$  edge and in the case of the shell of Figs. 6 and 7 diagrams of stresses should be made for the third shell. To obtain a practically sufficient approximation it suffices to take two terms ( $n = 1, 3$ ) of the series for the internal forces. It is observed that very short shells can be computed in a much simpler way by means of Eq. (11.5).

In Tables 8-11 are collated, for the purpose of facilitating the computation, values of the coefficients  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $p_2$  and  $q_2$  of the constant characterizing the shell,  $t$ , in the interval 0,1-1,3.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA  
GLIWICE

*Praca została złożona w Redakcji dn. 13 listopada 1961 r.*