

ANTONI JAKUBOWICZ

**TECHNICZNA TEORIA ZGINANIA PRĘTÓW DLA PEWNEGO
PRZYPADKU MATERIAŁU FIZYKALNIE NIELINIOWEGO**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXXI**

TOM X · ZESZYT 3 · ROK 1962

1. Zagadnienie zginania prętów dla nieliniowego prawa wiążącego odkształcenia z naprężeniami wprowadził jeszcze Saint-Venant w swym komentarzu do książki L. Naviera, [1]. Od tego czasu jest ono tematem poruszonym marginesowo w obszerniejszych podręcznikach o wytrzymałości materiałów. Bardziej szczegółowe rozważania można znaleźć w pracach [2], [3] i [4]. Dość często w zagadnieniu zginania posługiwano się «potęgowym» prawem, [5] i [6]; znalazło ono szerokie zastosowanie w zagadnieniach pełzania prętów zginanych, [7], [8] i [9]. W rozwiązaniach tych ograniczono się do przypadków, gdy kierunek wektora momentu gnącego był normalny do osi symetrii figury przekroju pręta. Podobne ograniczenia spotykamy w podstawowych monografiach teorii plastyczności, [10], [11], [12] i [13]. Można jednak wymienić liczne prace o charakterze bardziej specjalnym, [14], [15], [16] i [17], których autorzy podają metody rozwiązania zagadnienia zginania ukośnego prętów z materiałów idealnie sprężysto-plastycznych lub plastycznych.

W pracy niniejszej rozpatrzono czyste zginanie pręta dla dowolnego kierunku wektora momentu gnącego i «potęgowego» prawa wiążącego (2.1) i uzyskano rozwiązania znajdujące również zastosowania w przypadku liniowo sprężystego jak też i idealnie plastycznego materiału.

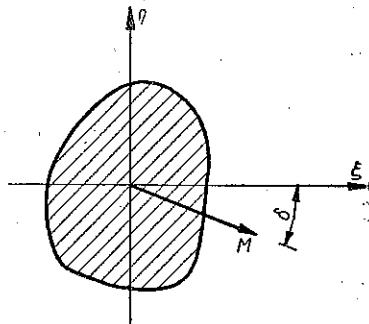
2. Załóżmy, że dla rozpatrywanego materiału prawo wiążące w jednoosiowym stanie naprężenia można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \sigma a |\sigma|^n,$$

gdzie a oraz n są stałymi charakteryzującymi własności materiału.

Rozpatrzmy pręt o dowolnym stałym przekroju poddany wyłącznie działaniu momentu gnącego M (rys. 1). Pręt taki wygnie się, co geometrycznie wyrazi się obrotem płaskich przekrojów¹ około osi obojętnej. To założenie płaskich przekrojów wyraża się zależnością

$$(2.2) \quad |\varepsilon| = \frac{|\eta|}{\rho},$$



Rys. 1

¹ Uzasadnienie dopuszczalności tych założeń w zagadnieniach «nieliniowego zginania» można znaleźć u KAUDERERA, [4].

gdzie ρ jest promieniem krzywizny osi ugiętej. W przypadku ogólnym kierunek wektora momentu gnącego M nie będzie się pokrywał z osią obojętną ξ . Zakładamy ponadto, że w pręcie wystąpi jednoosiowy stan naprężenia, przy czym $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \eta$.

Z zależności (2.1) i (2.2) wynika

$$(2.3) \quad \sigma = \text{sgn } \eta \kappa |\eta|^{\frac{1}{n}},$$

gdzie

$$(2.4) \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt[n]{a|\rho|}}.$$

Warunki równowagi elementarnego odcinka pręta prowadzą do równań

$$(2.5) \quad \int_A \sigma dA = 0, \quad \int_A \sigma \xi dA = M \sin \delta, \quad \int_A \sigma \eta dA = M \cos \delta,$$

które po uwzględnieniu zależności (2.3) przyjmują postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \kappa \int_A \text{sgn } \eta |\eta|^{\frac{1}{n}} dA &= 0, \\ \kappa \int_A \text{sgn } \eta |\eta|^{\frac{1}{n}} \xi dA &= M \sin \delta, \\ \kappa \int_A \text{sgn } \eta |\eta|^{\frac{1}{n}} \eta dA &= \kappa \int_A |\eta|^{1+\frac{1}{n}} dA = M \cos \delta. \end{aligned}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(2.7) \quad S_{\xi}^* = \int_A \text{sgn } \eta |\eta|^{\frac{1}{n}} dA,$$

$$(2.8) \quad D_{\xi\eta}^* = \int_A \text{sgn } \eta |\eta|^{\frac{1}{n}} \xi dA,$$

$$(2.9) \quad I_{\xi}^* = \int_A |\eta|^{1+\frac{1}{n}} dA.$$

Wielkości S^* , D^* i I^* nazwiemy ogólnie momentami powierzchniowymi figury przekroju pręta.

Stosując wprowadzone oznaczenia napiszemy równania równowagi w postaci

$$(2.10) \quad \kappa S_{\xi}^* = 0, \quad \kappa D_{\xi\eta}^* = M \sin \delta, \quad \kappa I^* = M \cos \delta.$$

Warunek (2.10)₁ ustala dla obranego kierunku osi obojętnej jej położenie w rozpatrywanym przekroju. Dla przekrojów środkowo symetrycznych oś obojętna musi zawsze (niezależnie od wielkości n) przejść przez środek przekroju.

Z równań (2.10)₂ i (2.10)₃ wyznaczmy δ , kąt określający kierunek wektora momentu gnącego M względem osi obojętnej ξ :

$$(2.11) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{D_{\xi\eta}^*}{I_{\xi}^*}.$$

Jak wynika z (2.11) i (2.10)₁ kąt zawarty między kierunkiem wektora i osią obojętną oraz położenie osi obojętnej dla określonego jej kierunku są zależne wyłącznie od geometrycznych własności przekroju, jednego parametru materiałowego n i kierunku wektora momentu gnącego; natomiast nie są zależne od jego modułu.

Jeżeli więc podczas zginania pręta wielkość momentu gnącego powiększa się, położenie osi obojętnej pozostaje ustalone.

Można tu zwrócić uwagę, że w przypadku gdyby prawo wiążące w rozpatrywanym zakresie było określone nie jedną funkcją $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (materiał idealnie sprężysto-plastyczny) lub gdyby funkcja ta nie była jednorodna, położenie osi obojętnej zależałoby również od modułu momentu gnącego, [4].

Wykonajmy w (2.10) podstawienie

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{I_{\xi}^*}{\sqrt{I_{\xi}^{*2} + D_{\xi\eta}^{*2}}}.$$

Uzyskujemy następujący wynik

$$(2.12) \quad \kappa = M \frac{1}{\sqrt{I_{\xi}^{*2} + D_{\xi\eta}^{*2}}}$$

lub

$$(2.13) \quad \kappa = MB,$$

gdzie

$$(2.14) \quad B = \frac{1}{\sqrt{I_{\xi}^{*2} + D_{\xi\eta}^{*2}}}.$$

Podstawiając w równaniu (2.3) $\kappa = MB$ uzyskujemy formułę określającą wielkość naprężenia w dowolnym miejscu przekroju:

$$(2.15) \quad \sigma = \operatorname{sgn} \eta MB |\eta|^{\frac{1}{n}}.$$

Jeżeli przez e oznaczymy największą odległość skrajnego włókna przekroju, to

$$(2.16) \quad |\sigma|_{\max} = MB e^{\frac{1}{n}}$$

lub inaczej

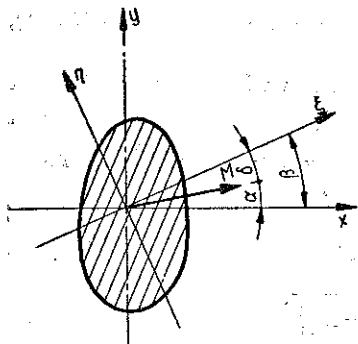
$$(2.17) \quad |\sigma|_{\max} = \frac{M}{W^*},$$

gdzie: η — kierunek osi obojętnej ξ — kierunek osi obojętnej ξ — kierunek osi obojętnej

$$(2.18) \quad W^* = \frac{1}{I^*} \cdot Be^n$$

Z równania (2.4) wyznaczamy krzywiznę osi ugiętej pręta:

$$(2.19) \quad \frac{1}{|\rho|} = aM^n B^n,$$



Rys. 2

skąd, stosując znane z wytrzymałości materiałów uproszczenia, uzyskamy równanie różniczkowe osi ugiętej:

$$(2.20) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \pm M^n a B^n.$$

Wielkość $1/aB^n$ wyraża sztywność zginania.

3. Wyprowadzone zależności pozwalają na rozwiązanie następującego zadania: określić dla przyjętego kierunku osi obojętnej kierunek momentu gnącego i dla określonej jego wartości wyznaczyć wielkości naprężeń w dowolnych punktach, jak też krzywiznę osi pręta lub jej przemieszczenia wywołane zginaniem. Przypuśćmy, że zadanie jest sformułowane odwrotnie; w obranym układzie osi x, y (rys. 2) kierunek wektora momentu M wyznacza kąt α , należy określić kierunek osi obojętnej ξ . Uwzględniając $\delta = \beta - \alpha$ wstawiamy w równanie (2.11)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha}$$

i uzyskujemy

$$(3.1) \quad \left(\frac{D_{\xi\eta}^*}{I_{\xi}^*} \right) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha}.$$

Oznaczamy $(D_{\xi\eta}^*/I_{\xi}^*)_{\beta} = \Phi_{\beta}$ i uzyskujemy z równania (3.1) zależność

$$(3.2) \quad \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta - \Phi_{\beta}}{\Phi_{\beta} \operatorname{tg} \beta + 1}.$$

Nie dysponując w przypadku ogólnym ($n \neq 1$) wzorami transformacyjnymi dla momentów I^* i D^* , musimy dla każdego przekroju oddzielnie określić funkcje $I_{\xi}^* = f_1(\beta)$ $D_{\xi\eta}^* = f_2(\beta)$ tabelarycznie lub wygodniej wykreślić (rys. 4 i 5), następnie funkcję Φ_{β} . Korzystając z zależności (3.2) możemy sporządzić wykres (rys. 6), z którego od razu odczytujemy dla danego kąta α wielkości kąta β . Wyznaczenie naprężeń jak też przemieszczeń podobnie jak uprzednio nie nastręcza już trudności.

4. Wielkość momentów $I_{\xi}^* = f_1(\beta)$ i $D_{\xi\eta}^* = f_2(\beta)$ wyznaczono przykładowo dla przekroju prostokątnego (rys. 3): dla $0 < \beta \leq \text{arc tg } k$

$$(4.1) \quad I_{\xi}^* = \int_A |\eta|^{1+\frac{1}{n}} dA = \frac{b^{3+\frac{1}{n}} n^2}{2^{2+\frac{1}{n}} ac (2n+1)(3n+1)} \left[(a+ck)^{3+\frac{1}{n}} - (-a+ck)^{3+\frac{1}{n}} \right];$$

dla $\text{arc tg } k \leq \beta < \pi/2$

$$(4.2) \quad I_{\xi}^* = \frac{b^{3+\frac{1}{n}} n^2}{2^{2+\frac{1}{n}} ac (2n+1)(3n+1)} \times \left[(-a-ck)^{3+\frac{1}{n}} - (a-ck)^{3+\frac{1}{n}} \right];$$

dla $0 < \beta \leq \text{arc tg } k$

$$(4.3) \quad D_{\xi\eta}^* = \int_A \text{sgn } \eta \xi |\eta|^{\frac{1}{n}} dA = \frac{b^{3+\frac{1}{n}} k^{3+\frac{1}{n}} n^2}{a^2 c 2^{2+\frac{1}{n}}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{c^2 (2n+1) + na^2}{c (n+1) (2n+1) (3n+1)} \left[\left(c + a \frac{1}{k} \right)^{3+\frac{1}{n}} - \left(c - a \frac{1}{k} \right)^{3+\frac{1}{n}} \right] - \frac{1}{(n+1) (2n+1)} \left[\left(c + a \frac{1}{k} \right)^{2+\frac{1}{n}} - \left(c - a \frac{1}{k} \right)^{2+\frac{1}{n}} \right] \right\};$$

dla $\text{arc tg } k \leq \beta < \pi/2$

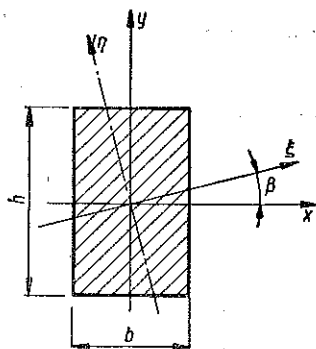
$$(4.4) \quad D_{\xi\eta}^* = \frac{b^{3+\frac{1}{n}} n^2}{2^{2+\frac{1}{n}} ac^2} \left\{ \frac{a^2 (2n+1) + nc^2}{a (n+1) (2n+1) (3n+1)} \left[(-a+ck)^{3+\frac{1}{n}} - (-a-ck)^{3+\frac{1}{n}} \right] + \frac{1}{(n+1) (2n+1)} \left[(-a+ck)^{2+\frac{1}{n}} - (-a-ck)^{2+\frac{1}{n}} \right] \right\};$$

gdzie $a = -\sin \beta$, $c = \cos \beta$, $k = h/b$.

Dla $\beta \doteq 0$ ($\xi \equiv x$) wielkość I_x^* wyrazi się za pomocą wzoru

$$(4.5) \quad I_x^* = \frac{2nb^{3+\frac{1}{n}} k^{2+\frac{1}{n}}}{2^{2+\frac{1}{n}} (2n+1)}$$

zaś $D_{xy}^* = 0$.



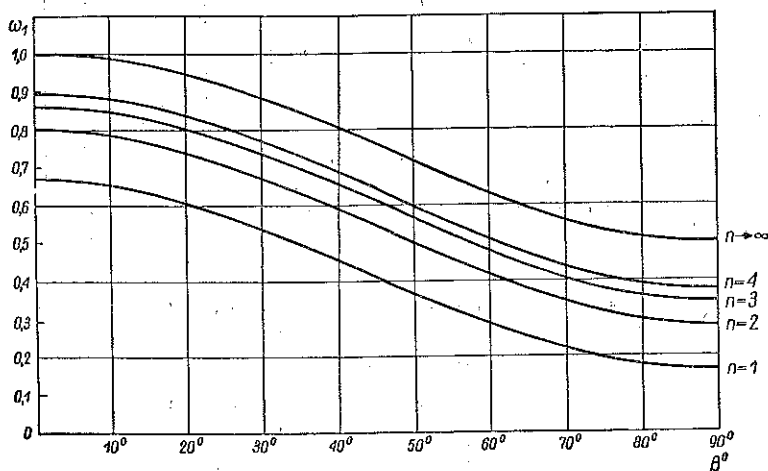
Rys. 3

Jak wynika z przytoczonych wzorów, wielkości I_{ξ}^* i $D_{\xi n}^*$ dadzą się przedstawić w postaci:

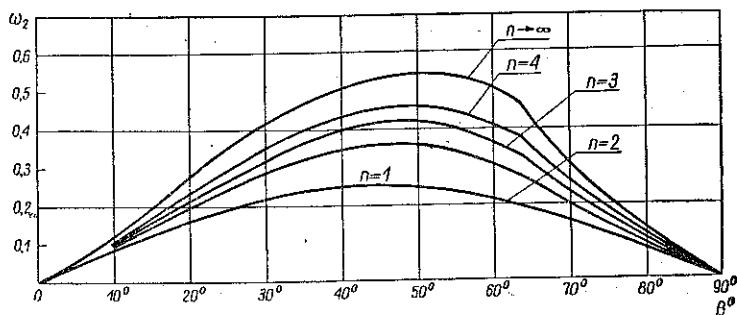
$$(4.6) \quad I_{\xi}^* = \omega_1 b^{3 + \frac{1}{n}},$$

$$(4.7) \quad D_{\xi n}^* = \omega_2 b^{3 + \frac{1}{n}}.$$

Rysunki 4 i 5 przedstawiają wykresy współczynników ω_1 i ω_2 , rys. zaś 6 zależność kątów β i α ; wszystkie wykresy dla przekrojów prostokątnego $k = 2$ i kilku wartości n .



Rys. 4



Rys. 5

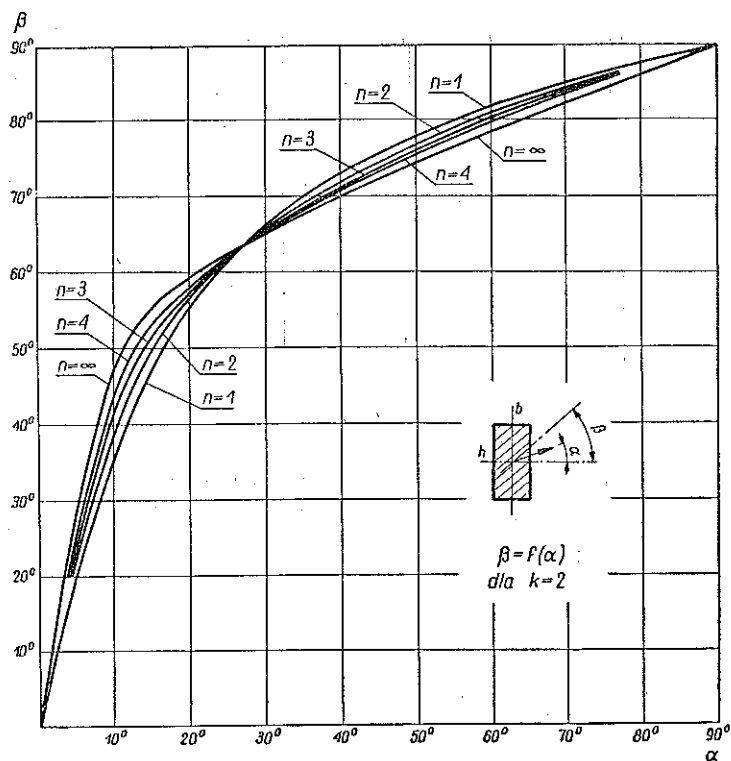
5. Dla nieregularnych bądź skomplikowanych przekrojów analityczne wyznaczenie momentów S^* , I^* i D^* może okazać się nader uciążliwe; z powodzeniem posłużymy się w tych przypadkach metodą rachunkowo-wykreslną. W celu wyznaczenia

dla figury przedstawionej na rys. 7 momentu S_{ξ}^* kreślimy wykres funkcji $x_1 = |\eta|^{\frac{1}{n}}$, a następnie wykres $z_s = ux_1 \operatorname{sgn} \eta$. Wielkość $S_{\xi}^* = \int_A \operatorname{sgn} \eta |\eta|^{\frac{1}{n}} dA = \int_A z_s d|\eta|$ wyznaczamy planimetrując pole A_s .

Dla wyznaczenia I_{ξ}^* należy nakreślić wykres funkcji $x_2 = |\eta|^{1+\frac{1}{n}}$, a następnie wykres $z_1 = ux_2$. Wartość

$$I_{\xi}^* = \int_A |\eta|^{\frac{1}{n}} dA = \int_{A_1} z_1 d|\eta|$$

wyznaczymy planimetrując pole A_1 .



Rys. 6

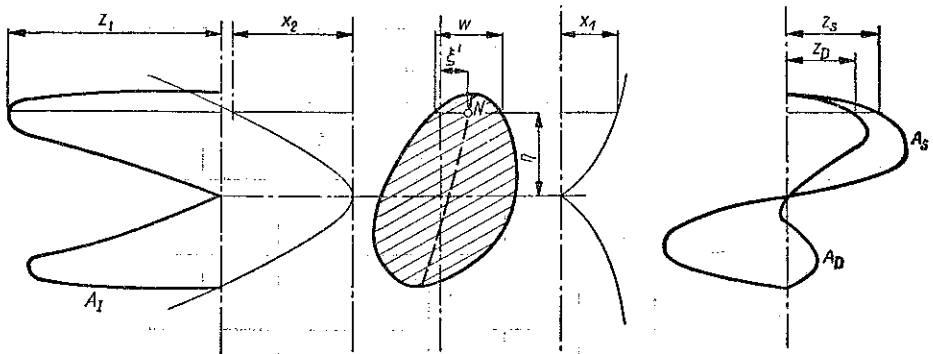
Dla wyznaczenia wielkości $D_{\xi_1}^*$ należy wyznaczyć punkty N będące środkami odcinków u o współrzędnych ξ' (ich miejscem geometrycznym jest na rys. 7 krzywa przerywana), następnie należy nakreślić wykres z_D , gdzie $z_D = ux_1 \xi' \operatorname{sgn} \eta = u |\eta|^{\frac{1}{n}} \xi' \operatorname{sgn} \eta$.

Moment

$$D_{\xi\eta}^* = \int_A \operatorname{sgn} \eta |\eta|^n \xi' dA = \int_{A_D} z_D d|\eta|$$

wyznamy przez splanimetrowanie pola A_D .

6. Prawo Hooke'a rządzące sprężystymi odkształceniami można uważać za szczególny przypadek sformułowanego na początku prawa (2.1); podstawiając $n = 1$, $a = 1/E$ uzyskujemy $\varepsilon = \sigma/E$. Nie trudno zauważyć, że przy tych założeniach $S_{\xi}^* = S_{\xi}$ (moment statyczny figury przekroju względem ξ), $D_{\xi\eta}^* = D_{\xi\eta}$ (moment zbieżenia figury przekroju w układzie osi ξ, η), zaś $I_{\xi}^* = I_{\xi}$ (moment bezwładności figury przekroju względem osi ξ).



Rys. 7

Dla wyznaczenia w sprężystym zginaniu ukośnym kąta δ określającego kierunek wektora momentu względem osi obojętnej ξ uzyskamy formułę (nie spotykaną w wytrzymałości materiałów):

$$(6.1) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{D_{\xi\eta}}{I_{\xi}}$$

Wyznaczenie z zależności (3.1) kąta β dla danego α nie nastęrcza już żadnych trudności. Zakładamy, że osie x, y są głównymi centralnymi osiami bezwładności figury przekroju; korzystając ze znanych wzorów transformacyjnych wstawiamy w lewą stronę zależności (3.1):

$$I_{\xi} = I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta,$$

$$D_{\xi\eta} = (I_x - I_y) \sin \beta \cos \beta,$$

$$\frac{(I_x - I_y) \sin \beta \cos \beta}{I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha}$$

skąd otrzymujemy

$$(6.2) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha$$

wzór dobrze znany z wytrzymałości materiałów,

Dla wyznaczenia naprężeń w zginaniu ukośnym możemy zastosować formułę (2,15), która przybierze postać

$$(6.3) \quad \sigma = \frac{M}{\sqrt{I_\xi^2 + D_{\xi\eta}^2}} \eta.$$

Tę wygodną, lecz również nie spotykaną w wytrzymałości materiałów formułę można (wyrażając podobnie jak poprzednio I_ξ i $D_{\xi\eta}$ przez momenty główne I_x i I_y i wstawiając $\eta = y \cos \alpha - x \sin \alpha$) po przekształceniach doprowadzić do ogólnie znanej postaci

$$(6.4) \quad \sigma = M \left(\frac{y \cos \alpha}{I_x} - \frac{x \sin \alpha}{I_y} \right).$$

Równanie zaś różniczkowe osi ugiętej przybierze zwięzłą postać:

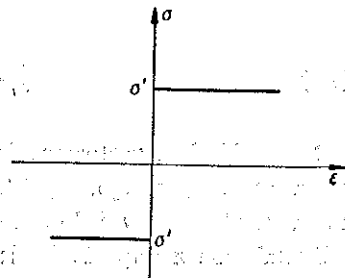
$$(6.5) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \pm \frac{M}{E \sqrt{I_\xi^2 + D_{\xi\eta}^2}}.$$

7. Jeżeli właściwości materiału zezwalają na rozpatrywanie go po przekroczeniu granicy plastyczności jako idealnie plastycznego (rys. 8), to możemy za punkt wyjścia do oceny nośności pręta przyjąć wielkość granicznego momentu gnącego M' , tzn. tej wartości momentu gnącego, dla której w całym obszarze przekroju zostanie osiągnięty stan plastyczny ($\sigma = \sigma'$). Dla przeprowadzenia analizy zginania pręta w tak pojętym stanie plastycznym należy w wyprowadzonych uprzednio relacjach przejść do granicy $n \rightarrow \infty$. Jest rzeczą oczywistą, że przy poczynionych założeniach wyznaczanie wydłużeń lub krzywizny osi ugiętej pręta traci jakikolwiek sens. Na podstawie jednak wyprowadzonych wzorów możemy wysnuć wnioski dotyczące orientacji osi obojętnej i wielkości momentu granicznego.

Warunek (2.10)₁ przybiera obecnie postać

$$(7.1) \quad \int_A \operatorname{sgn} \eta \, dA = 0.$$

Całka ta wyraża po prostu różnicę pól przekroju położonych po obu stronach osi obojętnej, warunek więc (5.6) prowadzi do stwierdzenia, że oś obojętka musi dzielić przekrój na dwa równe pola.



Rys. 8

Momenty I_{ξ}^* i $D_{\xi\eta}^*$ przybiorą następującą postać:

$$(7.2) \quad I_{\xi n \rightarrow \infty}^* = \int_A |\eta| dA = I_{\xi}^*,$$

$$(7.3) \quad D_{\xi\eta n \rightarrow \infty}^* = \int_A \operatorname{sgn} \eta \xi dA = D_{\xi\eta}^*,$$

Ze wzoru (2.11) wyznaczamy kąt zawarty między kierunkiem osi obojętnej i wektorem momentu:

$$(7.4) \quad \operatorname{tg} \delta_{n \rightarrow \infty} = \operatorname{tg} \delta' = \frac{D_{\xi\eta}'}{I_{\xi}'},$$

zaś dla danego kąta β kąt α' z odpowiedniego wykresu (rys. 6), na podstawie zaś wzoru (2.15) wstawiając zamiast $\sigma = \sigma'$ uzyskamy formułę na wielkość momentu granicznego:

$$(7.5) \quad M' = \sigma' \sqrt{I_{\xi}'^2 + D_{\xi\eta}'^2}.$$

Dla przekroju prostokątnego, dokonując przejścia granicznego $n \rightarrow \infty$ we wzorach (4.1)-(4.5), wyznaczmy wielkości I_{ξ}' i $D_{\xi\eta}'$:

dla $0 < \beta \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} k$

$$(7.6) \quad I_{\xi}' = \frac{b^3}{12c} (a^2 + 3c^2 k^2),$$

$$(7.7) \quad D_{\xi\eta}' = \frac{b^3 a}{12} \left(2 + \frac{a^2}{c^2} - 3k^2 \right);$$

zaś dla $\operatorname{arc} \operatorname{tg} k \leq \beta \leq \pi/2$

$$(7.8) \quad I_{\xi}' = -\frac{b^3 k}{12a} (3a^2 + c^2 k^2),$$

$$(7.9) \quad D_{\xi\eta}' = \frac{b^3 kc}{12} \left[k^2 \left(2 + \frac{c^2}{a^2} \right) - 3 \right].$$

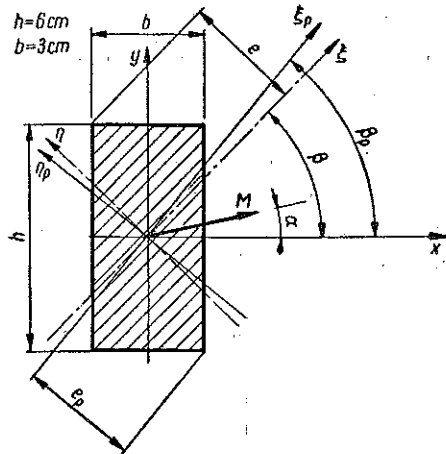
8. Przykładem zastosowania podanej teorii może być również zagadnienie pełzania pręta zginanego. Zgodnie z hipotezą starzenia możemy przyjąć, [8], dla pełzania ustalonego w jednoosiowym stanie naprężenia następujące prawo wiążące odkształcenia z naprężeniami:

$$(8.1) \quad \varepsilon_p = \operatorname{sgn} \sigma \Omega |\sigma|^n.$$

Wykładnik n jak też i wielkość Ω charakteryzują właściwości materiału w danej temperaturze, przy czym Ω jest zarazem funkcją czasu t . Funkcję $\Omega(t)$ można wyznaczyć doświadczalnie na podstawie wyników prób dla prostego pełzania.

Rozwiążmy następujące konkretne zadanie. Pręt o przekroju prostokątnym, przedstawiony na rys. 9, o długości $l = 100$ cm jednostronnie utwierdzony obciążono na końcu momentem $K = 6000$ kG cm, przy czym kierunek wektora momentu określa kąt $\alpha = 15^\circ$. Należy wyznaczyć przemieszczenie końca pręta, spowodowane pełzaniem, po upływie 2500 godzin, jeżeli stała temperatura, w jakiej się znajduje, wynosi 454°C .

Pręt wykonano ze stali o zawartości 0,35% C, dla której w temperaturze 454°C przyjęto według MALININA, [8], $E = 1,6 \cdot 10^5$ kG/cm², $n = 3,44$, zaś wykres funkcji $\Omega(t)$ podano na rys. 10. Moment gnący na całej długości pręta ma wartość stałą $M = K$. Dla zginania sprężystego (bezpośrednio po obciążeniu) kierunek osi obojętnej ξ wyznaczy kąt β , który możemy odczytać wprost z wykresu (rys. 6) $\beta = 47^\circ$. Wyznaczamy dla układu osi ξ i η wartości $I_\xi = 32,2$ cm⁴ oraz $D_{\xi\eta} = 20,2$ cm⁴.



Rys. 9

Dla zginania prostego przemieszczenie końca belki wynosiłoby $f = MI^2/2EI$, dla zginania zaś ukośnego należy sztywność EI zastąpić sztywnością zginania ukośnego

$$E\sqrt{I_\xi^2 + D_{\xi\eta}^2}, \quad f = \frac{MI^2}{2E\sqrt{I_\xi^2 + D_{\xi\eta}^2}} = 0,22 \text{ [cm]}.$$

Dla pełzania kierunek osi obojętnej ξ_p określa kąt β_p ; wyznaczamy go dla wykładnika $n = 3,44$ z wykresu (rys. 6) $\beta_p = 52^\circ$ i (rys 5) $I_{\xi_p}^* = 0,56 b^{3 + \frac{1}{3,44}} = 19,6$ [cm^{3,29}]. oraz

$$D_{\xi_p\eta_p} = 0,435 b^{3 + \frac{1}{3,44}} = 15,2 \text{ [cm}^{3,29}\text{]}.$$

W przypadku pełzania sztywność zginania wynosi

$$\frac{1}{\Omega} (I_{\xi_p}^{*2} + D_{\xi_p\eta_p}^{*2})^{\frac{n}{2}},$$

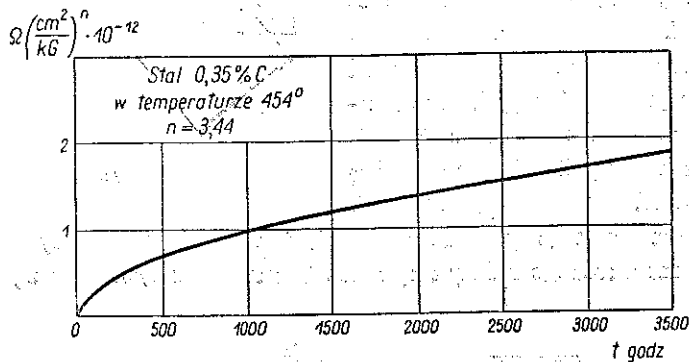
przemieszczenie zaś

$$f_p = \frac{M^n l^2}{\frac{2}{\Omega} (I_{\xi_p}^{*2} + D_{\xi_p\eta_p}^{*2})^{\frac{n}{2}}}.$$

Wielkość Ω dla $t = 2500$ godz. wyznaczamy z wykresu (rys. 10)

$$\Omega = 1,53 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{kG}} \right)^{3,44}$$

Po wstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy $f_p = 1,2$ cm. Zauważmy, że prawo rozkładu naprężeń jest określone przez prawo wiążące, stąd wprowadzając prawo pełzania (5.15) przyjmujemy, że w chwili początkowej rozkład naprężeń jest już taki, jaki będzie w ciągu całego pełzania. Nie jest to ściśle, gdyż początkowo rozkład tych naprężeń jest liniowy, po upływie pewnego czasu wyrówna się on jednak zgodnie z prawem pełzania. Nasze rozwiązanie więc dla zbyt krótkiego okresu mogłoby być obarczone dużym błędem.



Rys. 10

Wyznamy jeszcze naprężenia maksymalne.

Zgodnie z formułami (2.17) i (2.18) obliczamy dla początkowego zgięcia sprężystego:

$$\sigma_{\max} = \frac{Me}{\sqrt{I_{\xi}^2 + D_{\xi\eta}^2}} = 515 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}, \quad e = 3,25 \text{ [cm,]}$$

zaś dla okresu ustalonego pełzania

$$\sigma_{\max p} = \frac{Me_p^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{I_{\xi p}^{*2} + D_{\xi\eta p}^{*2}}} = 337 \text{ kG/cm}^2, \quad e_p = 3,15 \text{ [cm.]}$$

W okresie ustalonego pełzania wartość naprężeń maksymalnych spada i to tym silniej, im większy jest wykładnik n .

Literatura cytowana w tekście

- [1] L. NAVIER, B. SAINT-VENANT, *De la résistance des corps solides*, Paris 1861-1864.
- [2] A. NÁDAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York, Toronto and London 1950.
- [3] Г. А. ГЕНЕВ, *Некоторые задачи расчета стержней при общей нелинейной зависимости напряжений от деформации*. Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности, Москва 1956.
- [4] H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
- [5] М. М. Филоненко-Бородич и другие, *Курс сопротивления материалов*, Москва 1949.
- [6] Н. Н. МАЛИНИН, *Расчеты стержней за пределами упругости*, Москва 1958.
- [7] А. М. КАЧАНОВ, *Теория ползучести*, Москва 1960.
- [8] Н. Н. МАЛИНИН, *Расчеты на ползучесть. Расчеты на прочность в машиностроении*, т. 2, Москва 1958.
- [9] I. FINNIE and R. HELLER, *Creep of Engineering Materials*, New York, Toronto, London 1959.
- [10] A. A. ILIOUSCHINE, *Plasticité*, Paris 1956.
- [11] В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Москва-Ленинград 1950.
- [12] W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theorie ideal plastischer Körper*, Wien 1954.
- [13] O. HOFFMAN and G. SACHS, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, New York 1953.
- [14] В. Н. ГОРБУНОВ, В. Г. ЧУДНОВСКИЙ, *Расчет балок на кривой изгиб при пластических деформациях*, Сборник трудов Киевского Строительного Института, вып. 2, 1935.
- [15] A. ORMEROD, *The Plastic Bending of Beams Loaded in Non-Principal Planes*, Civil Eng. and Public Works Review, vol. 54, nr. 639, 1959.
- [16] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Москва 1949.
- [17] А. И. СТРЕЛЬБИЦКАЯ, *Исследование прочности тонкостенных стержней за пределом упругости*, АН УРСР, Киев 1958.

Резюме

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА ДЛЯ НЕКОТОРОГО СЛУЧАЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

В качестве физического закона деформации и напряжения в одноосном напряженном состоянии принято соотношение:

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \sigma \cdot a |\sigma|^n.$$

Рассматривается чистый изгиб стержня в общем случае (произвольное направление вектору изгибающего момента). Вводятся величины S^* , I^* и D^* , характеризующие геометрические свойства сечения стержня и дается графический метод для их определения. Выводятся основные соотношения, позволяющие определить направление нейтральной оси, величину напряжений и перемещений оси стержня.

Рассматривая закон Гука, как особый случай физического закона, вводятся новые соотношения для упругого кривого изгиба. Приведенная теория применяется при определении предельной нагрузки (при предположении идеальной пластичности материала), и к задаче ползучести изгибаемого стержня, что и иллюстрируется конкретным примером.

Summary

A NON-LINEAR ENGINEER'S BENDING THEORY OF BARS FOR A PARTICULAR CASE OF MATERIAL PHYSICALLY NON-LINEAR

The non-linear stress-strain relation is assumed, in the uniaxial state of stress, in the form

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \sigma \cdot a |\sigma|^n.$$

Pure bending of a bar is considered in the general case (any direction of the vector of the bending moment). The quantities S^* , I^* , D^* are introduced, describing the geometric properties of the profile. To determine them, a graphical method is proposed. Fundamental relations are derived enabling us to determine the direction of the neutral axis and the stresses and displacements of the bar axis. Treating Hooke's law as a particular case of the general law assumed, new relations are derived for oblique elastic bending. The theory proposed is applied to determine the limit load (assuming perfect plasticity of the material) and to the creep problem of a bent bar, which is illustrated by a numerical example.

Praca została złożona w Redakcji dn. 25 października 1961 r.