

**WANDA PAPROCKA-GRABCZYŃSKA**

**METODA JEDNOETAPOWEGO OBLICZANIA RAM WIELOPIĘTROWYCH  
W PRZYPADKU UWZGLĘDNIENIA ZMIAN SCHEMATU  
STATYSTYCZNEGO W TRAKCIE WZNOSZENIA KONSTRUKCJI**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXXVIII**

**TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962**

## SPIS TREŚCI

1. Uwaga wstępna	385
2. Teoretyczne uzasadnienie metody	387
3. Technika obliczeń	396
4. Przykład	403

## 1. Uwaga wstępna

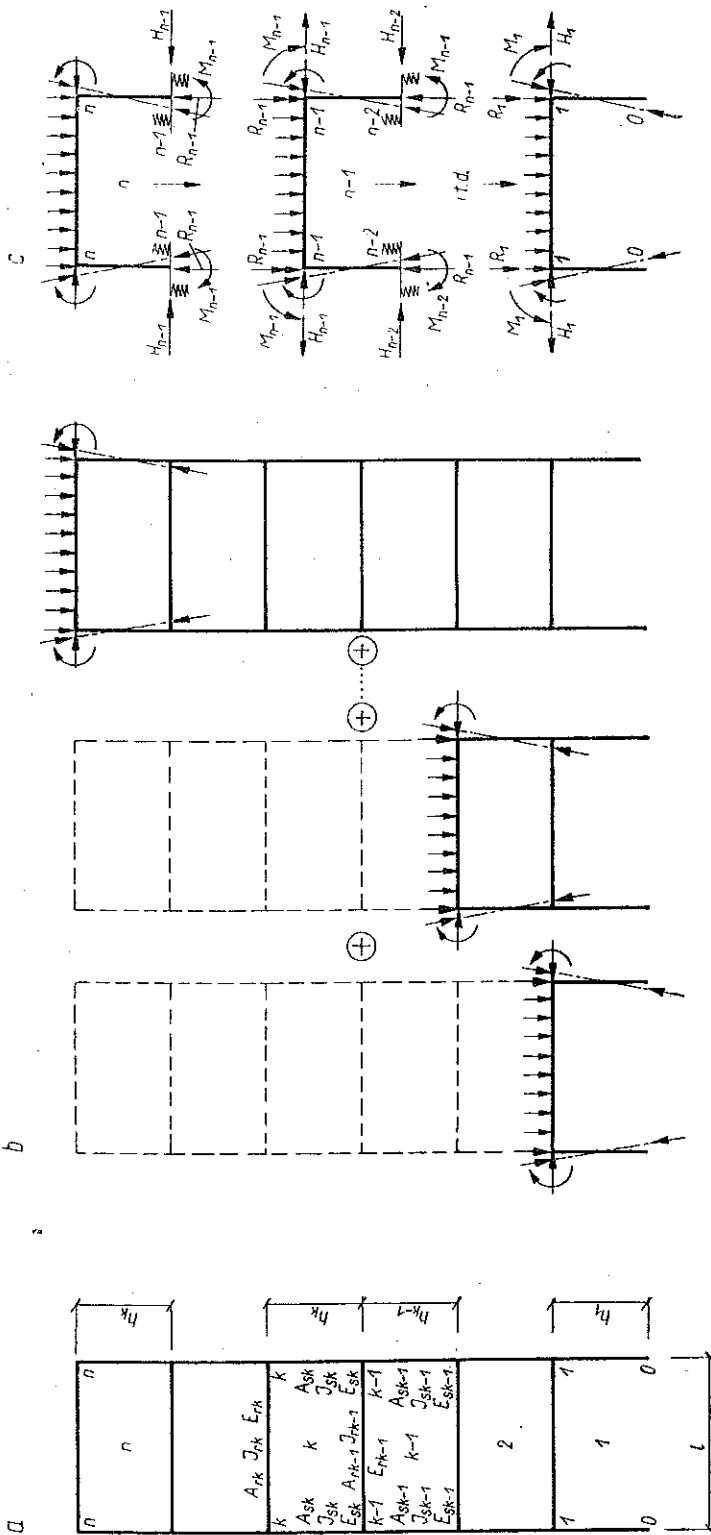
W praktyce inżynierskiej nie zawsze pamięta się o konieczności uwzględnienia w obliczeniach zmian schematu statycznego konstrukcji w trakcie jej wznoszenia, tymczasem zmiany te nie pozostają bez wpływu na ostateczny rozkład sił wewnętrznych w konstrukcji, gdyż poszczególne obciążenia mogą być przyłożone nie do ostatecznego schematu statycznego konstrukcji, ale do schematów pośrednich, przez które kolejno przechodzi konstrukcja (por. np. E. SHEPLEY, [3]). Z obciążeń przykładanych do konstrukcji w trakcie jej wznoszenia należy przede wszystkim wymienić jej ciężar własny oraz ciężar prefabrykowanych płyt stropowych. Do tej grupy obciążeń należą również siły sprężające. Ogólnie rzecz biorąc, aby przeprowadzić obliczenia dokładnie, tj. aby uwzględnić zmiany schematu statycznego konstrukcji w trakcie jej wznoszenia, należy wyznaczyć siły wewnętrzne dla tylu schematów statycznych konstrukcji, do ilu zostały przyłożone poszczególne obciążenia. «Klasyczny» sposób postępowania jest więc sposobem wieloetapowym.

Podana w niniejszej pracy metoda, upraszczająca obliczanie tak obciążonych konstrukcji, dotyczy wielopiętrowych symetrycznych ram jednonawowych, często spotykanego elementu w konstrukcjach budynków wielokondygnacyjnych.

Oznaczenia i schemat końcowy takiej konstrukcji podano na rys. 1a.

Opracowana metoda odnosi się do przypadku, gdy obciążenie każdej kondygnacji jest przyłożone przed wzniesieniem kondygnacji następnej, tzn. przez wzniesienie każdej kondygnacji zmienia się schemat konstrukcji i jej obciążenie. Każda ze znanych w statyce budowli metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych, np. metoda Crossa, metoda sił, metoda RWR, [1], prowadzi w przypadku rami  $n$ -piętrowej do rozwiązania  $n$  schematów statycznych, gdyż uwzględniając obciążenie piętra pierwszego należy rozwiązać ramę jednopiętrową, piętra  $k$ -go, ramę  $k$ -piętrową itd., po czym wyniki otrzymane z rozwiązań poszczególnych schematów należy dodać (rys. 1b).

Przedstawiona tutaj metoda umożliwia jednoetapowe uwzględnienie wszystkich tych obciążeń przez rozwiązanie tylko jednego schematu statycznego konstrukcji, jednakże pod warunkiem zastąpienia każdego obciążenia przez obciążenie symetryczne i antysymetryczne. Rozwiązanie to polega na wyznaczeniu przemieszczeń węzłów rami kolejno dla pięter od pierwszego do  $n$ -go na podstawie załączonych do pracy zestawień tabelarycznych, a następnie na kolejnym rozwiązaniu od piętra  $n$ -go do 1-go  $n$  ram jednopiętrowych, sprężyscie zamocowanych dla obciążeń symetrycz-



Rys. 1. a) Schemat jednoznacznej symetrycznej ramy  $n$ -piętrowej dowolnie podpartej. b) Schemat wieloetapowego uwzględnienia wpływu obciążeń przykładanych do konstrukcji w trakcie jej wznoszenia. c) Schemat uwzględnienia wpływu tych obciążeń przy zastosowaniu metody jednoetapowej

nych (rys. 1c) lub sprężycie zamocowanych i sprężycie poziomo podpartych dla obciążeń antysymetrycznych.

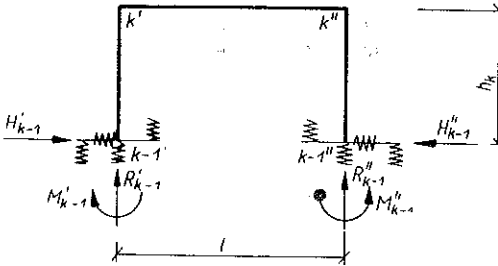
W celu ułatwienia bezpośredniego korzystania z metody załączono do pracy zestawienia tabelaryczne wzorów na wielkości nadliczbowe  $M_k$ ,  $R_k$  i  $H_k$  dla najczęściej spotykanych obciążeń (uwzględniające także sprężenie). Zestawienia te pozwalają na uzyskanie wartości sił wewnętrznych drogą prostych podstawień.

W pracy podano uzasadnienie teoretyczne metody, sposób jej stosowania oraz przykład liczbowy wykazujący różnicę w wykresie momentów zginających, sporządzonym dla rozwiązania uwzględniającego zmiany schematu statycznego konstrukcji oraz dla rozwiązania nie uwzględniającego tych zmian.

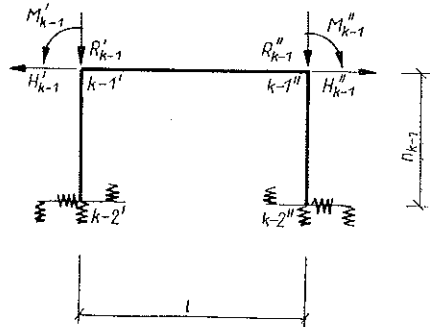
Ilościowe różnice są znaczne i decyzja, czy należy obliczenia przeprowadzać w sposób ścisły, tzn. uwzględniając zmiany schematu statycznego konstrukcji, czy też nie, nie powinna być podjęta bez analizy stosunku obciążeń przykładowych w trakcie wznoszenia do całkowitych obciążeń działających na konstrukcję. Metoda znajduje szczególne zastosowanie przy obliczaniu wielopiętrowych ram sprężanych w trakcie wznoszenia, choć oczywiście jej stosowalność nie ogranicza się do tych przypadków.

## 2. Teoretyczne uzasadnienie metody

2.1. Schemat wyjściowy. Dana jest rama dowolnie symetrycznie podparta o  $n$  piętrach (rys. 1a), obciążona w ten sposób, że wpływ obciążeń poszczególnych pięter nie przekazuje się na piętra znajdujące się powyżej przyłożonego obciążenia. Zajmijmy się najpierw wpływem obciążeń pięter od  $k$  do  $n$  na rozkład sił wewnętrznych w piętrze  $k$ . W tym celu wyodrębnijmy z ramy piętro  $k$ . Znajdzie się ono w warunkach



Rys. 2. Schemat podparcia wyodrębnionego piętra  $k$  ramy przy jego dowolnym obciążeniu



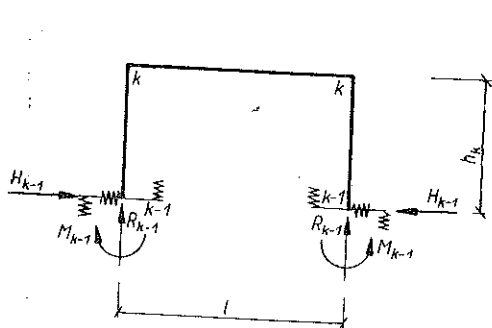
Rys. 3. Schemat podparcia i obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia kątów obrotu oraz przesunięć węzłów  $k-1'$  i  $k-1''$

podparcia przedstawionych na rys. 2. Obciążenie tego piętra składać się będzie z obciążeń przyłożonych bezpośrednio do jego rygla i słupów oraz z oddziaływań pięter znajdujących się powyżej; oddziaływania te można przedstawić w postaci sił poziomych i pionowych oraz momentów zaczepionych w węzłach  $k'$  i  $k''$ .

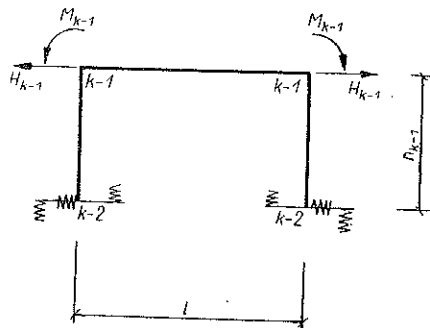
Nadliczbowe wielkości występujące w tym piętrze wyznaczmy z warunków, że przemieszczenia węzłów  $k-1'$  i  $k-1''$  piętra  $k$ , muszą być równe odpowiednio przemieszczeniom węzłów  $k-1'$  i  $k-1''$  odciętej dolnej części ramy.

Jeżeli również piętro  $k-1$  wyodrębnimy z ramy i przyjmiemy dla niego analogiczne warunki podparcia jak dla piętra  $k$ , to wielkości te będą kątami obrotu i przesunięciami węzłów  $k-1'$  i  $k-1''$  wyodrębnionego piętra  $k-1$ , obciążonego wyłącznie oddziaływaniami piętra  $k$ , tj. siłami  $R'_{k-1}$ ,  $R''_{k-1}$ ,  $H'_{k-1}$  i  $H''_{k-1}$  oraz momentami  $M'_{k-1}$  i  $M''_{k-1}$  (rys. 3).

Przy dowolnym obciążeniu piętra  $k$  każde z sześciu przemieszczeń  $u'_{k-1}$ ,  $u''_{k-1}$ ,  $v'_{k-1}$ ,  $v''_{k-1}$ ,  $\varphi'_{k-1}$  i  $\varphi''_{k-1}$  węzłów  $k-1'$  i  $k-1''$  piętra  $k-1$  jest zależne od sześciu

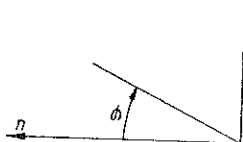


Rys. 4. Schemat podparcia piętra  $k$  do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu symetrycznym



Rys. 5. Schemat podparcia i obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia kątów obrotu oraz przesunięć poziomych węzłów  $k-1$

różnych obciążeń  $H'_{k-1}$ ,  $H''_{k-1}$ ,  $R'_{k-1}$ ,  $R''_{k-1}$ ,  $M'_{k-1}$  i  $M''_{k-1}$ . Wprowadzając jak w metodzie sił (por. np. W. NOWACKI, [2]) przemieszczenia  $\delta_{ir}$  (gdzie  $1 \leq i \leq 6$  i  $1 \leq r \leq 6$ ) od obciążeń jednostkowych  $H'_{k-1} = 1$  itp. oraz uwzględniając twierdzenie o wzajemności przesunięć, otrzymujemy do wyznaczenia z piętra  $k-1$  21 niezależnych przemieszczeń  $\delta_{ir}$ . Jak wynika z dalszych rozważań zadanie znacznie się upraszcza, jeżeli dowolne obciążenie piętra  $k$  zastąpimy przez obciążenia symetryczne i antysymetryczne.



Rys. 6. Kierunki dodatnich przesunięć poziomych oraz dodatnich kątów obrotu lewej części ramy

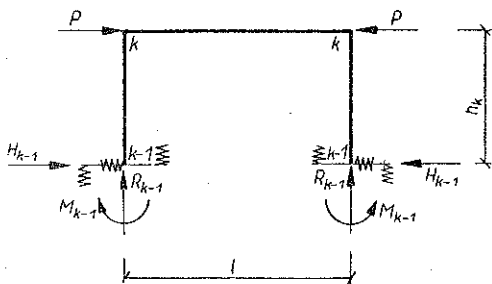
2.2. Obciążenia symetryczne. W przypadku obciążeń symetrycznych zachodzą następujące związki między reakcjami (rys. 2)

$$(2.1) \quad \begin{cases} R'_{k-1} = R''_{k-1} = R_{k-1}, \\ H'_{k-1} = H''_{k-1} = H_{k-1}, \\ M'_{k-1} = M''_{k-1} = M_{k-1}. \end{cases}$$

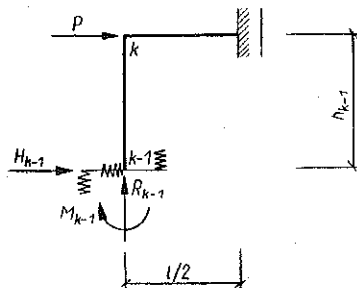
przy czym przesunięcia pionowe węzłów ramy nie wpływają na rozkład sił wewnętrznych w ramie, a obciążenie siłami  $R_{k-1}$  nie wpływa na wielkości kątów obrotu oraz przesunięć poziomych węzłów  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$ . Stąd dla wy-

odrębnionego piętra  $k$  otrzymujemy schemat podparcia przedstawiony na rys. 4a do obliczenia kątów obrotu i przesunięć poziomych węzłów  $k-1$  wydłużonego piętra  $k-1$  schemat podparcia i obciążenia przedstawiony na rys. 5, przy czym za dodatnie kierunki kątów obrotu i przesunięć poziomych lewej części ramy przyjęto kierunki wskazane na rys. 6.

Rozpatrzmy teraz ramę z rys. 4 obciążoną w węzłach  $k$ , np. dwiema siłami poziomymi  $P$  (rys. 7). Zastosujmy tu schemat zastępczy przedstawiony na rys. 8.



Rys. 7. Piętro  $k$  ramy obciążone symetrycznie dwiema siłami poziomymi  $P$



Rys. 8. Schemat zastępczy do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu piętra  $k$  przedstawionego na rys. 7

Z warunku równowagi otrzymujemy

$$(2.2) \quad R_{k-1} = 0,$$

a z warunków, że kąt obrotu w węźle  $k-1$  wynosi

$$(2.3) \quad \varphi_{k-1s} = \varphi_{k-1Ms} M_{k-1} + \varphi_{k-1Hs} H_{k-1}$$

oraz przesunięcie poziome w węźle  $k-1$  jest równe

$$(2.4) \quad u_{k-1s} = u_{k-1Ms} M_{k-1} + u_{k-1Hs} H_{k-1}$$

otrzymujemy do wyznaczenia  $M_{k-1}$  i  $H_{k-1}$  dwa równania:

$$(2.5) \quad M_{k-1} (1 + 2\alpha_k + 2\beta_{ks}) - H_{k-1} h_k (1 + \alpha_k - 2\beta_{ks}) = 0,$$

$$(2.6) \quad -3M_{k-1} (1 + \alpha_k - 2\beta_{ks}) + H_{k-1} h_k (3 + 2\alpha_k + 3\delta_k + 6\gamma_{ks}) + 3\delta_k Ph_k = 0.$$

Podobne równania zawierające  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  i  $\varrho$  można ustawić dla dowolnego, symetrycznego obciążenia ramy. Do wzorów (2.3)-(2.6) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(2.7) \quad \alpha_k = \frac{h_k I_{rk} E_{rk}}{l I_{sk} E_{sk}},$$

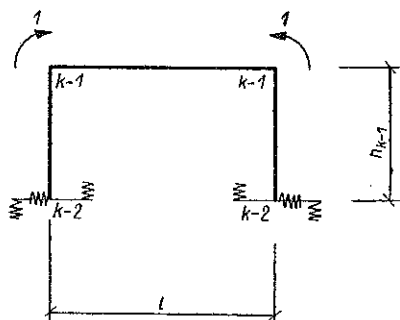
$$(2.8) \quad \beta_{ks} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{l} \varphi_{k-1Ms},$$

$$(2.9) \quad \delta_k = \frac{I_{rk}}{A_{rk} h_k^2},$$

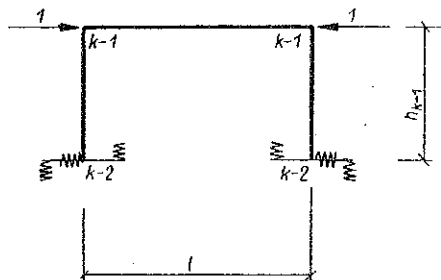
$$(2.10) \quad \gamma_{ks} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{h_k^2 l} u_{k-1Hs},$$

$$(2.11) \quad \varrho_{ks} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{h_k l} u_{k-1Ms} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{h_k l} \varphi_{k-1Hs}.$$

We wzorach powyższych wprowadzono z kolei następujące oznaczenia (rys. 1a):  $h_k$  oznacza wysokość piętra  $k$ ,  $l$  rozpiętość ramy,  $I_{rk}$  moment bezwładności rygła piętra  $k$  ramy,  $I_{sk}$  moment bezwładności każdego ze słupów piętra  $k$  ramy,  $E_{rk}$  moduł Younga rygła  $k$  ramy,  $E_{sk}$  moduł Younga słupów piętra  $k$  ramy,  $A_{rk}$  pole przekroju rygła piętra  $k$  ramy;  $\varphi_{k-1Ms}$  jest kątem obrotu węzła  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  ramy, wywołanym dwoma momentami jednostkowymi, zaczepionymi symetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 9);  $u_{k-1Hs}$  jest przesunięciem poziomym węzła  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$



Rys. 9. Schemat podparcia i obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia przemieszczeń  $\varphi_{k-1Ms}$  oraz  $u_{k-1Ms}$



Rys. 10. Schemat podparcia i obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia przemieszczeń  $u_{k-1Hs}$  i  $\varphi_{k-1Hs}$

ramy, wywołanym dwiema siłami jednostkowymi zaczepionymi symetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 10);  $u_{k-1Ms}$  jest przesunięciem poziomym węzła  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  ramy wywołanym dwoma momentami jednostkowymi zaczepionymi symetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 9);  $\varphi_{k-1Hs}$  jest kątem obrotu węzła  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  ramy, wywołanym dwiema siłami jednostkowymi zaczepionymi symetrycznie w węzłach  $k-1$  zgodnie z rys. 10 (przy czym  $u_{k-1Ms} = \varphi_{k-1Hs}$ ). W równaniach (2.5) i (2.6) oraz im podobnych, ułożonych dla innych obciążeń ramy, można pominąć  $\delta$ ,  $\gamma$  i  $\varrho$  występujące obok  $\alpha$  i  $\beta$  jako małe w porównaniu z wielkościami  $\alpha$  i  $\beta$ . Jeśli bowiem pominąć występującą obok jedności oraz  $\alpha_i$  wielkość  $\delta_1$  (co jest uzasadnione, gdyż zarówno  $\delta$  jak i stosunek  $\delta/\alpha$



w stosowanych konstrukcjach ramowych jest rzędu kilku tysięcznych, por. przykład końcowy), to dla najniższego piętra ramy otrzymamy:

przy podparciu przegubowym

$$(2.12) \quad \begin{cases} \varphi_{1Ms} = \frac{l}{E_{r1} I_{r1}} \frac{a_1}{3+2\alpha_1}, \\ u_{1Ms} = \varphi_{1Hs} = \frac{lh_1}{2E_{r1} I_{r1}} \frac{3\delta_1}{3+2\alpha_1}, \\ u_{1Hs} = \frac{l}{2E_{r1} A_{r1}}; \end{cases}$$

przy całkowitym utwierdzeniu

$$(2.13) \quad \begin{cases} \varphi_{1Ms} = \frac{l}{2E_{r1} I_{r1}} \frac{a_1}{2+\alpha_1}, \\ u_{1Ms} = \varphi_{1Hs} = \frac{lh_1}{2E_{r1} I_{r1}} \frac{3\delta_1}{2+\alpha_1}, \\ u_{1Hs} = \frac{l}{2E_{r1} A_{r1}}. \end{cases}$$

Zakładając np., że  $A_{r1} = A_{r2}$ ,  $E_{r1} = E_{r2}$ ,  $I_{r1} = I_{r2}$  i  $h_1 = h_2$  otrzymamy dla II-go piętra ramy:

przy przegubowym podparciu piętra I-go

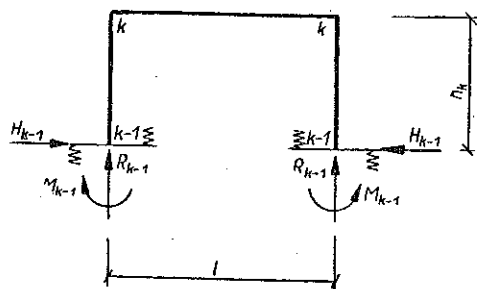
$$(2.14) \quad \beta_{2s} = \frac{\alpha_1}{3+2\alpha_1}, \quad \gamma_{2s} = \frac{\delta_1}{2}, \quad \varrho_{2s} = \frac{3\delta_1}{2(3+2\alpha_1)};$$

przy całkowitym utwierdzeniu piętra I-go

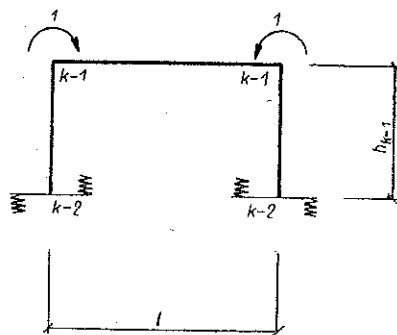
$$(2.15) \quad \beta_{2s} = \frac{\alpha_1}{2(2+\alpha_1)}, \quad \gamma_{2s} = \frac{\delta_1}{2}, \quad \varrho_{2s} = \frac{3\delta_1}{2(2+\alpha_1)}.$$

Ze wzorów (2.14) i (2.15) widać, że  $\gamma_{2s}$  i  $\varrho_{2s}$  są wielkościami tego rzędu co  $\delta_1$ , w związku z czym nie tylko  $\delta_1$  ale i te wielkości można również pominąć, gdy występują obok  $\alpha$  lub  $\beta$ . Ponieważ zaś  $\gamma_{2s}$  i  $\varrho_{2s}$ , charakteryzujące podparcie piętra II-go, nigdy nie występują oddzielnie, to pomijając je gdy występują obok  $\alpha$  i  $\beta$ , pozbywamy się ich w ogóle i otrzymujemy dla piętra II-go ramy schemat podparcia przedstawiony na rys. 11. Przeprowadzając podobne rozumowanie dla piętra III-go ramy dochodzimy do wniosku, że przy obciążeniu symetrycznym ramy, z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością, można dla dowolnego piętra  $k$  przyjąć schemat podparcia przedstawiony na rys. 11.

Tak więc jedynym przemieszczeniem do wyznaczenia z piętra  $k-1$  będzie  $\varphi_{k-1Ms}$ , czyli kąt obrotu węzła  $k-1$  piętra  $k-1$ , wywołany dwoma momentami jednostkowymi, zaczepionymi symetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 12). Przemieszczenia  $\varphi_{k-1Ms}$  zależnie od różnych sposobów podparcia piętra  $k-1$ , zostały zestawione w tabelicy 1.



Rys. 11. Przybliżony schemat podparcia piętra  $k$  do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu symetrycznym piętra  $k$



Rys. 12. Przybliżony schemat podparcia i schemat obciążenia piętra  $k-1$  ramy do wyznaczenia przemieszczenia  $\varphi_{k-1Ms}$

**2.3 Obciążenia antysymetryczne.** Przy obciążeniach antysymetrycznych między reakcjami zachodzą zależności (rys. 2):

$$(2.16) \quad \begin{cases} R'_{k-1} = -R''_{k-1} = R_{k-1}, \\ H'_{k-1} = -H''_{k-1} = H_{k-1}, \\ M'_{k-1} = -M''_{k-1} = M_{k-1}, \end{cases}$$

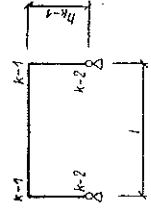
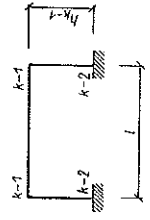
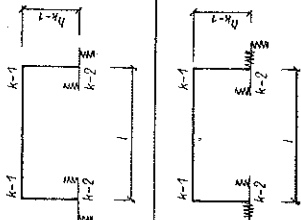
przy czym pomijamy (jako bardzo mały) wpływ przesunięć pionowych węzłów ramy na rozkład sił wewnętrznych w ramie oraz pomijamy (jako bardzo mały) wpływ sił  $R_{k-1}$  na kąty obrotu i przesunięcia poziome węzłów  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  ramy. Stąd do wyznaczenia wielkości nadliczbowych możemy dla wyodrębnionego piętra  $k$  przyjąć z dostateczną dokładnością schemat podparcia z rys. 13, a do obliczenia kątów obrotu i przesunięć poziomych węzłów  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  schemat podparcia i obciążenia z rys. 14. Za dodatnie kierunki kątów obrotu i przesunięć poziomych lewej części ramy przyjmujemy kierunki pokazane uprzednio na rys. 6. Rozpatrzmy teraz, tak jak przy obciążeniu symetrycznym, ramę z rys. 13 obciążoną antysymetrycznie w węzłach  $k$  dwiema siłami poziomymi  $P$  (rys. 15).

Stosując schemat zastępczy, przedstawiony na rys. 16, oraz uwzględniając, że kąt obrotu w węzle

$$(2.17) \quad \varphi_{k-1a} = \varphi_{k-1Ma} M_{k-1} + \varphi_{k-1Ha} H_{k-1},$$

Tablica 1

Przemieszczenia  $\varphi_{k-1 Ms}$  dla obciążeń symetrycznych oraz  $\varphi_{k-1 Ma}$  i  $\varphi_{k-1 Ha}$  dla obciążeń antysymetrycznych w zależności od schematu podparcia  $k-1$

Nr pozycji	Schemat podparcia	Obciążenia symetryczne	Obciążenia antysymetryczna
1		$\varphi_{k-1 Ms} = \frac{l}{E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1}}{3 + 2\alpha_{k-1}}$	$\varphi_{k-1 Ma} = \frac{l}{6E_{T k-1} I_{T k-1}}$ $\varphi_{k-1 Ha} = \frac{h_{k-1} l}{6E_{T k-1} I_{T k-1}}$
2		$\varphi_{k-1 Ms} = \frac{l}{E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1}}{2(2 + \alpha_{k-1})}$	$\varphi_{k-1 Ma} = \frac{l}{E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1}}{1 + 6\alpha_{k-1}}$ $\varphi_{k-1 Ha} = \frac{h_{k-1} l}{E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1}}{2(1 + 6\alpha_{k-1})}$
3		$\varphi_{k-1 Ms} = \frac{l}{2E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1} + 4\beta_{k-1} s}{2 + 6(\beta_{k-1} s / \alpha_{k-1}) + \alpha_{k-1} + 4\beta_{k-1} s}$	$\varphi_{k-1 Ma} = \frac{l}{E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} a}{1 + 6\alpha_{k-1} + 6\beta_{k-1} a}$ $\varphi_{k-1 Ha} = \frac{h_{k-1} l}{E_{T k-1} I_{T k-1}} \frac{\alpha_{k-1} + 2\beta_{k-1} a + 2\varrho_{k-1} a}{2(1 + 5\alpha_{k-1} + 6\beta_{k-1} a)}$

a przesunięcie poziome w tym węźle

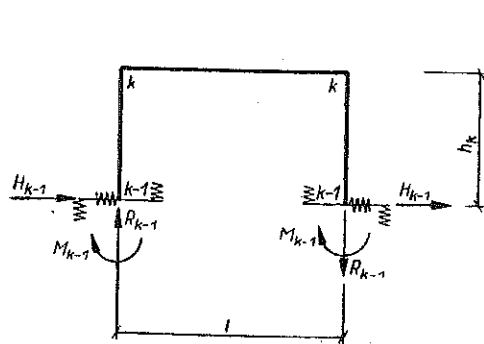
$$(2.18) \quad u_{k-1a} = u_{k-1Ma} M_k + u_{k-1Ha} H_{k-1},$$

otrzymujemy: z sumy rzutów na oś poziomą

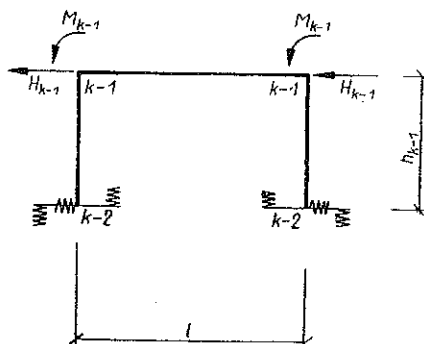
$$(2.19) \quad H_{k-1} = -P;$$

z warunku, że ugięcie w punkcie  $C$  (rys. 16) musi być równe zero

$$(2.20) \quad T = \frac{6(\alpha_k + 2\beta_{ka} + 2Q_{ka})}{1 + 6\alpha_k + 6\beta_{ka}} \frac{h_k}{l} P;$$



Rys. 13. Przybliżony schemat podparcia piętra  $k$  ramy do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu antysymetrycznym piętra  $k$



Rys. 14. Przybliżony schemat podparcia i obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia kątów obrotu i przesunięć poziomych węzłów  $k-1$

z warunku na sumę momentów

$$(2.21) \quad M_{k-1} = T \frac{l}{2} - Ph_k = -\frac{1 + 3\alpha_k - 6\beta_{ka}}{1 + 6\alpha_k + 6\beta_{ka}} h_k$$

oraz z sumy rzutów na oś pionową

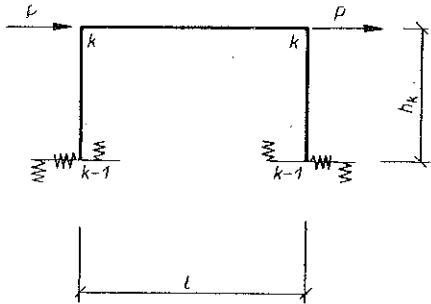
$$(2.22) \quad R_{k-1} = -T.$$

We wzorach powyższych powtarzają się oznaczenia występujące w p. 2.2 oraz występują dodatkowe:

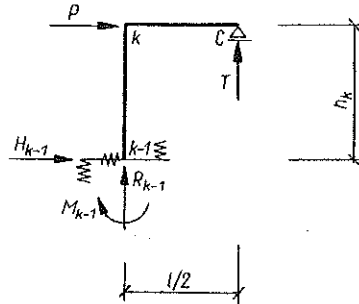
$$(2.23) \quad \begin{cases} \beta_{ka} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{l} \varphi_{k-1Ma}, \\ Q_{ka} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{h_k l} u_{k-1Ma} = \frac{E_{rk} I_{rk}}{h_k l} \varphi_{k-1Ha}, \end{cases}$$

przy czym  $\varphi_{k-1Ma}$  oznacza kąt obrotu węzła  $k-1$ , wyodrębnionego piętra  $k-1$  ramy wywołany dwoma momentami jednostkowymi, zaczeponymi antysymetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 17),  $u_{k-1Ma}$  przesunięcie poziome węzła  $k-1$  wyodręb-

nionego piętra  $k-1$  rami wywołane dwoma momentami jednostkowymi, zaczepionymi antysymetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 17),  $\varphi_{k-1Ha}$  kąt obrotu węzła  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  rami wywołany dwiema siłami jednostkowymi, zaczepionymi antysymetrycznie w węzłach  $k-1$  (rys. 18),  $u_{k-1Ha}$  przesunięcie

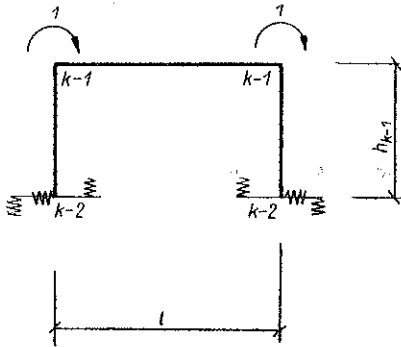


Rys. 15. Piętro  $k$  rami obciążone antysymetrycznie dwiema siłami poziomymi  $P$

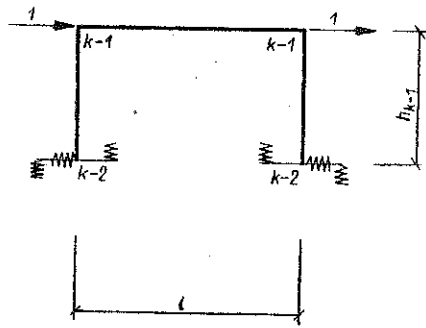


Rys. 16. Schemat zastępczy do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu piętra  $k$  przedstawionego na rys. 15

poziome węzła  $k-1$  wyodrębnionego piętra  $k-1$  rami wywołane dwiema siłami jednostkowymi zaczepionymi antysymetrycznie w węzłach  $k-1$  zgodnie z rys. 18 ( $u_{k-1Ma} = \varphi_{k-1Ha}$ ). Widzimy, że wielkość  $u_{k-1Ha}$  przy obciążeniu poziomymi siłami  $P$  nie weszła do żadnego ze wzorów (2.19)-(2.22), a przy obciążeniu piono-



Rys. 17. Przybliżony schemat podparcia i schemat obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia przemieszczeń  $\varphi_{k-1Ma}$  oraz  $u_{k-1Ma}$



Rys. 18. Przybliżony schemat podparcia i schemat obciążenia piętra  $k-1$  do wyznaczenia przemieszczeń  $\varphi_{k-1Ha}$  oraz  $u_{k-1Ha}$

wym lub momentami, gdzie zachodzi równość  $H_{k-1} = 0$ , wyrażenie  $u_{k-1} H_{k-1}$  znika. Stąd wniosek, że dla dowolnego typu obciążenia wielkość  $u_{k-1Ha}$  nie wpływa na rozkład sił wewnętrznych w ramie. Wielkości  $\varphi_{k-1Ma}$  oraz  $\varphi_{k-1Ha} = u_{k-1Ma}$  w zależności od sposobu podparcia piętra  $k-1$ , zestawiono w tablicy 1.

Ostatecznie zarówno przy obciążeniach symetrycznych jak i antysymetrycznych cały problem sprowadza się do rozwiązywania  $n$  ram jednopiętrowych sprężystości

zamocowanych, bądź sprężystie zamocowanych i poziomo sprężystie podpartych (por. rys. 1c). W niniejszym p. wykazano, które ze sprężystych przemieszczeń węzłów ramy należy w tym rozwiązaniu uwzględnić (przemieszczenia te wyznaczono i zestawiono w tabelicy 1), a które można pominąć. Dokładne omówienie sposobu rozwiązywania  $n$  piętrowej ramy zawiera p. 3.

### 3. Technika obliczeń

Opierając się na wynikach uzyskanych w p. 2 proponujemy dla ramy, przedstawionej na rys. 1 i znajdującej się pod obciążeniem spełniającym warunki uprzednio omówione, stosować podany niżej tok obliczeń.

1. Wszystkie obciążenia działające na ramę zastępujemy przez obciążenia symetryczne i antysymetryczne i wpływ ich rozpatrujemy osobno.

2. Wyznaczamy dla poszczególnych pięter ramy, przechodząc kolejno od piętra pierwszego do  $n$ -tego wielkości  $a_k$ ,  $\beta_{ks}$ ,  $\delta_k$ ,  $\beta_{ka}$  i  $q_{ka}$  korzystając ze wzorów (2.7), (2.8), (2.9) i (2.23) oraz tabelicy 1.

Dla piętra pierwszego wyznaczamy  $\varphi_{1Ms}$  oraz  $\varphi_{1Ma}$  i  $\varphi_{1Ha}$  korzystając z poz. 1 lub poz. 2 tabelicy 1 w zależności od sposobu podparcia ramy; dla pozostałych pięter, tj. dla pięter od 2 do  $n$ , korzystając z poz. 3 tabelicy 1. W przypadku, gdy złącza węzłów ramy nie zapewniają monolityczności i poszczególne piętra wspierają się na sobie przegubowo, otrzymujemy szereg ram przegubowo podpartych (poziome sprężyste podparcia występujące przy obciążeniach antysymetrycznych nie wpływają na wielkości sił wewnętrznych) i przemieszczenia  $\varphi_{k-1Ms}$ ,  $\varphi_{k-1Ma}$  i  $\varphi_{k-1Ha}$  nie wchodzi do obliczeń.

Dla ramy monolitycznej o nieskończonej ilości pięter przy jednakowych wysokościach wszystkich pięter, stałym przekroju słupów i stałym przekroju rygli na wszystkich kondygnacjach granicznymi wartościami  $\beta_{ks}$ ,  $\beta_{ka}$  i  $q_{ka}$  są:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{ks} = \frac{a_k (\sqrt{13+8a_k} - a_k)}{12+8a_k}, \\ \beta_{ka} = \frac{a_k \left( \sqrt{1 + \frac{2}{3a_k}} - 1 \right)}{2}, \\ q_{ka} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{3a_k}}}{6 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3a_k}} \right)}. \end{array} \right.$$

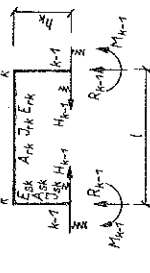
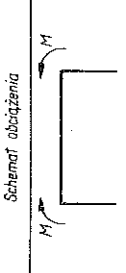
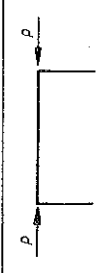
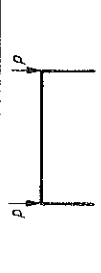
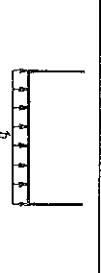
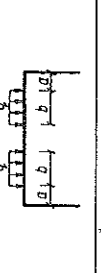
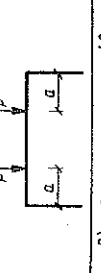
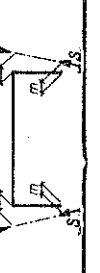
Wartości te otrzymano zakładając, że dla  $k \rightarrow \infty$  występują równości

$$\beta_{k-1s} = \beta_{ks}, \quad \beta_{k-1a} = \beta_{ka}, \quad q_{k-1a} = q_{ka}.$$

Praktycznie  $\beta_{ks}$ ,  $\beta_{ka}$  i  $q_{ka}$  osiągają w przybliżeniu podane we wzorach (3.1) wartości już dla 3, 4 piętra ramy.

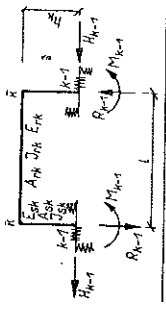
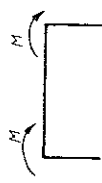

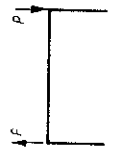
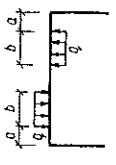
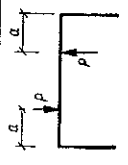
Tablica 2

Reakcje podporowe sprężyste zamocowanego piętra  $k$  dla podanych obciążeń symetrycznych

Nr poz.		$M_{k-1}$	$H_{k-1}$	$R_{k-1}$
1		$\frac{1}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} M$	$\frac{3[1+2(\beta_{ks}/\alpha_k)]}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{M}{h_k}$	0
2		$\frac{3(\delta_k/\alpha_k)(1+\alpha_k)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} h_k P$	$\frac{3(\delta_k/\alpha_k)(1+2\alpha_k+2\beta_{ks})}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} P$	0
3		0	0	P
4		$\frac{1}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{ql^2}{12}$	$\frac{1+2(\beta_{ks}/\alpha_k)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{ql^2}{4h_k}$	$\frac{ql}{2}$
5		$\frac{6a(l-a-b)+b(3l-2b)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{qb}{6l}$	$\frac{[1+2(\beta_{ks}/\alpha_k)][6a(l-a-b)+b(3l-2b)]}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{qb}{2lh_k}$	$qb$
6		$\frac{a(l-a)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} P$	$\frac{[1+2(\beta_{ks}/\alpha_k)]3a(l-a)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{P}{h_k}$	P
7		$\frac{n+m(\alpha_k+2)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} S$	$\frac{n(\alpha_k+4\beta_{ks}-1)-m(\alpha_k-2\beta_{ks}+2)}{2+6(\beta_{ks}/\alpha_k)+\alpha_k+4\beta_{ks}} \frac{S}{h_k}$	0

Tablica 3

Reakcje podporowe poziomo sprężyste podpartego i sprężyste zamocowanego piętra  $k$  dla podanych obciążeń antysymetrycznych.

Nr poz.		$M_{k-1}$	$H_{k-1}$	$R_{k-1}$
1		$\frac{1}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} M$	0	$\frac{12(\alpha_k+\beta_{ka})M}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} \frac{1}{l}$
2		$\frac{1+3\alpha_k-6\varrho_{ka}}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} h_k P$	P	$\frac{6(\alpha_k+2\beta_{ka}+2\varrho_{ka})}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} h_k \frac{P}{l}$
3		0	0	P
4		$\frac{2al[l-3(a+b)]+2a(2a^2+3ab+2b^2)+b(l-b)^2}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} \frac{qb}{2l^2}$	0	$\frac{2al[l-3(a+b)]+2a(2a^2+3ab+2b^2)+b(l-b)^2}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} \times (qb/l^2) - qb[1-(2a+b)/l]$
5		$\frac{al(l-3a)+2a^3}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} \frac{P}{l^2}$	0	$\frac{2al(l-3a)+4a^3}{1+6\alpha_k+6\beta_{ka}} \frac{P}{l} \left(1-\frac{2a}{l}\right)$



Tablica 4

Reakcje podporowe całkowicie zamocowanego piętra  $k$  dla podanych obciążeń symetrycznych

Nr poz.		$M_{k-1}$	$H_{k-1}$	$R_{k-1}$
1		$\frac{1}{2 + \alpha_k} M$	$\frac{3}{2 + \alpha_k} \frac{1}{h_k} M$	0
2		$\frac{3}{2 + \alpha_k} \frac{\delta_k}{\alpha_k} (1 + \alpha_k) \frac{h_k P}{h_k P}$	$\frac{3}{2 + \alpha_k} \frac{\delta_k}{\alpha_k} (1 + 2\alpha_k) P$	0
3		0	0	P
4		$\frac{1}{2 + \alpha_k} \frac{q l^2}{12}$	$\frac{1}{2 + \alpha_k} \frac{q l^2}{4 h_k}$	$\frac{q l}{2}$
5		$\frac{6a(l - a - b) + b(3l - 2b)}{2 + \alpha_k} \frac{q b}{6l}$	$\frac{6a(l - a - b) + b(3l - 2b)}{2 + \alpha_k} \frac{q b}{2 l h_k}$	qb
6		$\frac{a(l - a)}{2 + \alpha_k} \frac{P}{l}$	$\frac{3a(l - a)}{2 + \alpha_k} \frac{P}{l h_k}$	P
7		$-\left( \frac{n}{2 + \alpha_k} + m \right) S$	$-\left( \frac{1 - \alpha_k}{2 + \alpha_k} n + m \right) \frac{S}{h_k}$	0

Tablica 5

Reakcje podporowe całkowicie zamocowanego piętka  $k$  dla podanych obciążeń antysymetrycznych

Nr poz.		$M_{k-1}$	$H_{k-1}$	$R_{k-1}$
1	<p>Schemat obciążenia</p>	$\frac{1}{1+6\alpha_k} M$	0	$\frac{12\alpha_k}{1+6\alpha_k} \frac{M}{l}$
2		$\frac{1+3\alpha_k}{1+6\alpha_k} h_k P$	0	$\frac{6\alpha_k}{1+6\alpha_k} \frac{h_k}{l} M$
3		0	0	P
4		$\frac{2al[l-3(a+b)]+2a(2a^2+3ab+2b^2)+b(l-b)^2}{1+6\alpha_k} \frac{qb}{2l^2}$	0	$\frac{2al[l-3(a+b)]+2a(2a^2+3ab+2b^2)+b(l-b)^2}{1+6\alpha_k} \times$ $\times \frac{qb}{l^3} - qb \left(1 - \frac{2a+b}{l}\right)$
5		$\frac{al(l-3a)+2a^3}{1+6\alpha_k} \frac{P}{l^2}$	0	$-\frac{2al(l-3a)+4a^3}{1+6\alpha_k} \frac{P}{l^3} - P \left(1 - \frac{2a}{l}\right)$

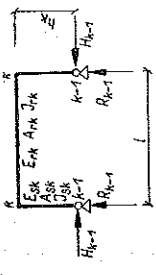
Tablica 6

Nr	Reakcje podporowe przegubowo podpartego piętka $k$ dla podanych obciążeń symetrycznych	
	$H_{k-1}$	$R_{k-1}$
1	$\frac{3}{3+2\alpha_k} \frac{M}{h_k}$	0
2	$\frac{3\delta_k}{3+2\alpha_k} P$	0
3	0	$P$
4	$\frac{1}{3+2\alpha_k} \frac{ql^2}{4h_k}$	$\frac{ql}{2}$
5	$\frac{6a(l-a-b)+b(3l-2b)}{3+2\alpha_k} \frac{qb}{2lh_k}$	$qb$
6	$\frac{3a(l-a)P}{3+2\alpha_k} \frac{1}{lh_k}$	$P$
7	$\frac{\alpha_k(m+2n)S}{3+2\alpha_k} \frac{1}{h_k}$	0

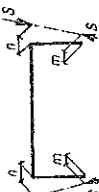
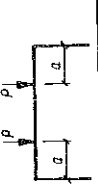
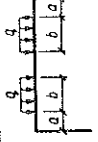
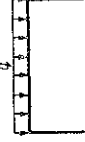
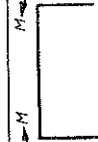
Tablica 7

Nr	Reakcje podporowe przegubowo podpartego piętka $k$ dla podanych obciążeń antysymetrycznych	
	$H_{k-1}$	$R_{k-1}$
1	0	$\frac{2M}{l}$
2	$P$	$\frac{2h_k}{l} P$
3	0	$P$
4	0	$\frac{(l-2a-b)qb}{l}$
5	0	$\frac{P}{(l-2a)l}$

Reakcje podporowe przegubowo podpartego piętka  $k$  dla podanych obciążeń symetrycznych



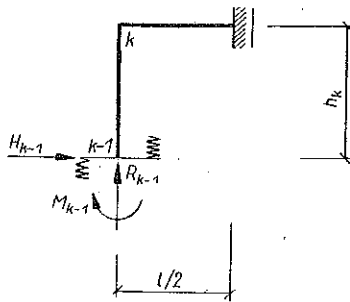
Schemat obciążenia



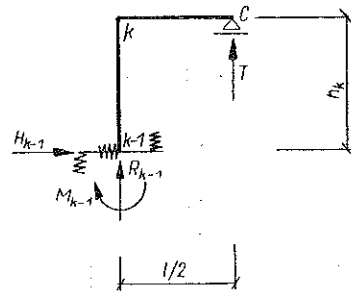
3. Przechodząc kolejno od piętra  $n$ -go do 1-go i rozpatrując osobno każde piętro jako ramę jednopiętrową sprężysto podpartą, dla której schematem podparcia przy obciążeniu symetrycznym jest schemat przedstawiony na rys. 11, a przy obciążeniu antysymetrycznym na rys. 13, wyznaczamy wielkości nadliczbowe osobno dla obciążeń symetrycznych i antysymetrycznych.

Obciążeniami poszczególnych pięter są: dla piętra  $n$  obciążenia przyłożone do jego słupów i rygła, dla piętra  $n - 1$  obciążenia przyłożone do jego słupów i rygła oraz oddziaływania piętra  $n$  zaczepione w węzłach  $n - 1$  w postaci sił  $R_{n-1}$  i  $H_{n-1}$  oraz momentów  $M_{n-1}$  itd. (rys. 1c). Rozwiązując schemat statyczny piętra  $n$  obliczamy  $R_{n-1}$ ,  $H_{n-1}$  i  $M_{n-1}$ , które następnie dodajemy do obciążeń piętra  $n - 1$ ; następnie rozwiązując schemat piętra  $n - 1$  wyznaczamy  $R_{n-2}$ ,  $H_{n-2}$  i  $M_{n-2}$  itd. Gotowe wielkości  $R_{k-1}$ ,  $H_{k-1}$  i  $M_{k-1}$  dla dowolnego piętra  $k$  dla najczęściej spotykanych obciążeń i dla różnych schematów podparcia tego piętra zestawiono w tablicach 2-7.

Dla innych obciążeń wyznaczamy wielkości nadliczbowe piętra  $k$ , przeprowadzając obliczenia zgodnie z podanymi niżej schematami postępowania (na podstawie których wyznaczono wielkości reakcji podporowych zestawione w tablicach 2-7).



Rys. 19. Schemat zastępczy do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu symetrycznym piętra  $k$



Rys. 20. Schemat zastępczy do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przy obciążeniu antysymetrycznym piętra  $k$

W przypadku obciążenia symetrycznego dla piętra  $k$  podpartego jak na rys. 11 stosujemy schemat zastępczy do wyznaczenia wielkości nadliczbowych przedstawiony na rys. 19. W schemacie tym kąt obrotu w węzle  $k - 1$  jest równy

$$(3.2) \quad \varphi_{k-1s} = \varphi_{k-1Ms} M_{k-1},$$

a przesunięcie poziome w tym węźle

$$(3.3) \quad u_{k-1s} = 0.$$

Korzystając z warunków (3.2) i (3.3) i dobierając odpowiednie  $\varphi_{k-1Ms}$  (które jest zależne od sposobu podparcia piętra  $k - 1$ ) z tablicy 1 wyznaczamy wielkości nadliczbowe  $H_{k-1}$  i  $M_{k-1}$ .

W przypadku obciążenia antysymetrycznego dla piętra  $k$  podpartego jak na rys. 13 stosujemy schemat zastępczy do wyznaczenia wielkości nadliczbowej  $T$  przedstawiony na rys. 20 ( $M_{k-1}$ ,  $H_{k-1}$  i  $R_{k-1}$  są funkcjami  $T$  i obciążenia). W schemacie tym przesunięcie pionowe punktu C

$$(3.4) \quad v_c = 0,$$

kąt obrotu węzła  $k-1$

$$(3.5) \quad \varphi_{k-1a} = \varphi_{k-1Ma} M_{k-1} + \varphi_{k-1Ha} H_{k-1}$$

oraz przesunięcie poziome węzła  $k-1$

$$(3.6) \quad u_{k-1a} = u_{k-1Ma} M_{k-1} + u_{k-1Ha} H_{k-1}.$$

Korzystając z warunku (3.4), uwzględniając przy tym równości (3.5) i (3.6) wyznaczamy dla dowolnego obciążenia niewiadomą  $T$ , a następnie z warunków równowagi  $M_{k-1}$ ,  $H_{k-1}$  i  $R_{k-1}$ . Wielkości  $\varphi_{k-1Ma}$  oraz  $\varphi_{k-1Ha} = u_{k-1Ma}$  zależnie od sposobu podparcia piętra niższego, czyli  $k-1$ , odnajdujemy w tablicy 1. Wielkości  $u_{k-1Ha}$  nie podano, gdyż nie wpływa ona na rozkład sił wewnętrznych w ramie.

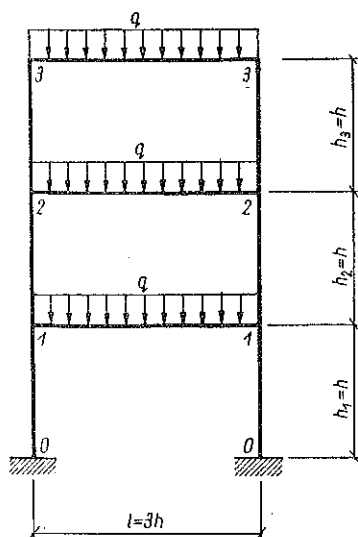
4. Po dodaniu obciążeń działających na każde piętro ramy jak również wyznaczonych reakcji podporowych od poszczególnych obciążeń sporządzamy dla każdego piętra wykresy  $M_a$ ,  $T_a$  i  $N_a$ . Są one jednocześnie poszukiwanymi wykresami  $M_w$ ,  $T_w$  i  $N_w$  dla ramy  $n$ -piętrowej.

#### 4. Przykład

Poniżej, korzystając z zestawień tabelarycznych, rozwiązano dla przykładu ramę 3 piętrową obciążoną ciężarem własnym oraz ciężarem płyt stropowych układanych na każdej kondygnacji przed wzniesieniem kondygnacji następnej.

Dana jest 3 piętrowa rama (rys. 21) o wysokościach pięter równych  $h$ , rozpiętości  $l$ , obciążona ciężarem własnym rygli oraz ciężarem prefabrykowanych płyt stropowych, układanych na każdej kondygnacji przed wzniesieniem kondygnacji następnej. Łączne obciążenie przypadające na każdy rygiel wynosi  $q$ . Przekroje prostokątne rygli o szerokości  $a$  i wysokości  $b$  są jednakowe na wszystkich piętrach, tak jak i prostokątne przekroje słupów o wymiarach  $a \times b_1$ .

Ponadto dane są:  $l/h = 3$ ,  $I_r/I_s = 2$ ,  $E_r = E_s = E$  oraz  $b = 0,2 h$ . Należy wyznaczyć wielkości nadliczbowe oraz sporządzić wykres momentów zginających  $M_a$  uwzględniając etapowość przykładania obciążeń oraz nie uwzględniając jej.



Rys. 21. Schemat jednonawowej zamocowanej ramy 3-piętrowej pod działaniem obciążeń ciągłych przyłożonych do rygli wszystkich kondygnacji

Obliczamy kolejno:

ze wzoru (2.7)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = \frac{hI_r}{H_s} = 0,666;$$

ze wzorów (2.7) i (2.9)

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{H_s}{h^3 A_r} = \frac{l}{h^3} \frac{0,5 I_r}{A_r} = \frac{l}{h^3} \frac{0,5 ab^3}{12ab} = \frac{1}{24} \frac{l}{h} \frac{1}{h^2} (0,2 h)^2 = 0,005;$$

ze wzoru (2.8) i poz. 2 tablicy 1

$$\beta_{2s} = \frac{EI_{r2}}{l} \varphi_{1Ms} = \frac{EI_{r2}}{l} \frac{l}{EI_{r1}} \frac{\alpha_1}{2(2+\alpha_1)} = 0,125;$$

ze wzoru (2.8) i poz. 3 tablicy 1

$$\beta_{3s} = \frac{EI_{r3}}{l} \varphi_{2Ms} = \frac{EI_{r3}}{l} \frac{l}{2EI_{r2}} \frac{\alpha_2 + 4\beta_{2s}}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{\alpha_2} + \alpha_2 + 4\beta_{2s}} = 0,136.$$

Obliczenia dla piętra trzeciego (rys. 22a) są następujące:  
według poz. 4 tablicy 2

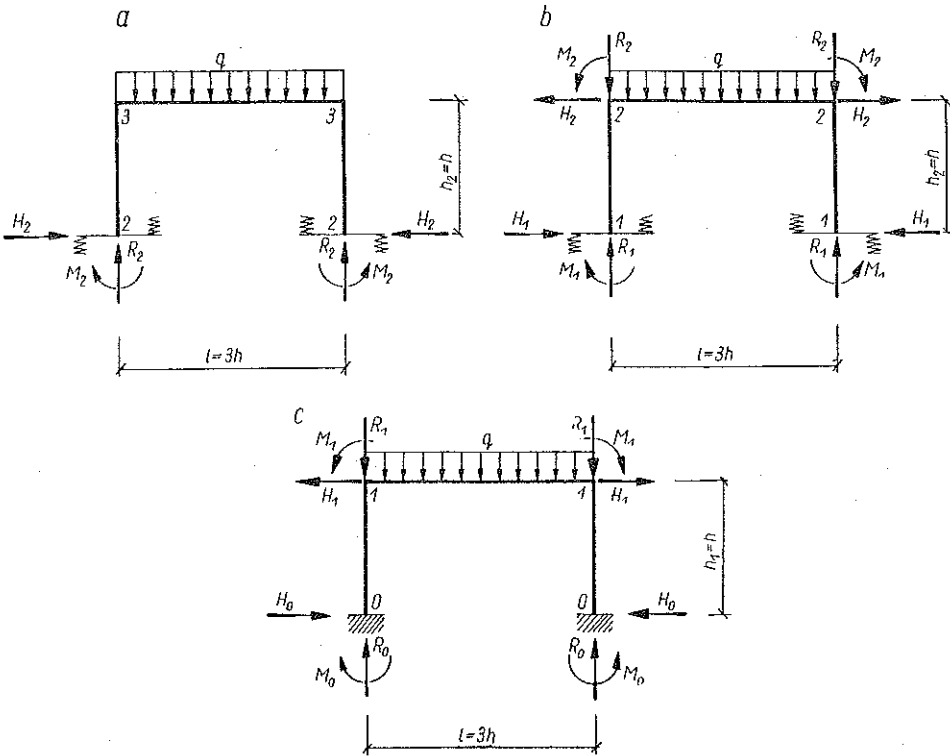
$$M_2 = \frac{1}{2 + 6 \frac{\beta_{3s}}{\alpha_3} + \alpha_3 + 4\beta_{3s}} \frac{ql^2}{12} = 0,0188 ql^2,$$

$$H_2 = \frac{1 + 2 \frac{\beta_{3s}}{\alpha_3}}{2 + 6 \frac{\beta_{3s}}{\alpha_3} + \alpha_3 + 4\beta_{3s}} \frac{ql^2}{4h_3} = 0,2385 ql,$$

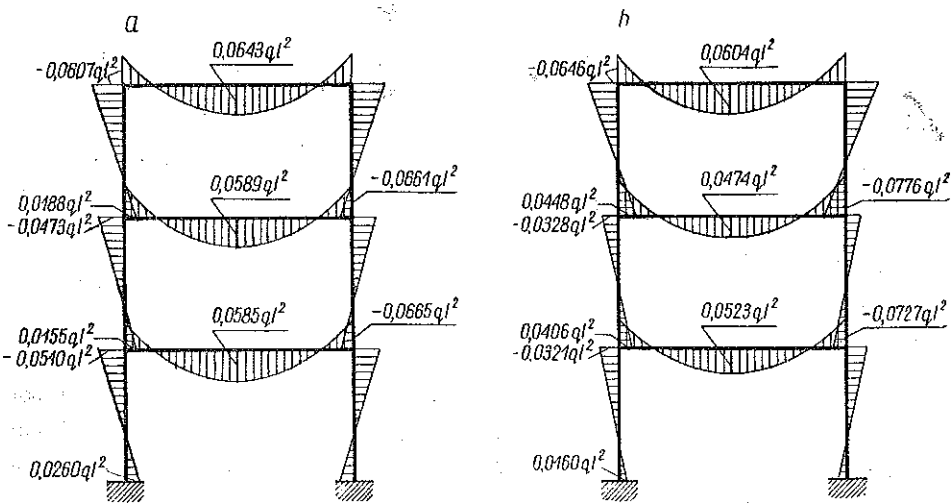
$$R_2 = \frac{ql}{2}.$$

Obliczenia dla piętra drugiego (rys. 22b) są następujące: według poz. 1, 2, 3 i 4 tablicy 2

$$M_1 = \frac{1}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{\alpha_2} + \alpha_2 + 4\beta_{2s}} (-M_2) - \frac{3 \frac{\delta_2}{\alpha_2} (1 + \alpha_2)}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{\alpha_2} + \alpha_2 + 4\beta_{2s}} h_2 (-H_2) + \frac{1}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{\alpha_2} + \alpha_2 + 4\beta_{2s}} \frac{ql^2}{12} = 0,0155 ql^2;$$



Rys. 22. a) Schemat obciążenia i podparcia trzeciego piętra. b) Schemat obciążenia i podparcia drugiego piętra. c) Schemat obciążenia i podparcia pierwszego piętra



Rys. 23. Wykres momentów zginających dla ramy przedstawionej na rys. 21: a) z uwzględnieniem etapowości przykładania obciążeń, b) bez jej uwzględnienia

$$H_1 = \frac{3 \left(1 + 2 \frac{\beta_{2s}}{a_2}\right)}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{a_2} + a_2 + 4\beta_{2s}} \frac{1}{h_2} (-M_2) - \frac{3 \frac{\delta_2}{a_2} (1 + 2 a_2 + 2\beta_{2s})}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{a_2} + a_2 + 4\beta_{2s}} (-H_2) +$$

$$+ \frac{1 + 2 \frac{\beta_{2s}}{a_2}}{2 + 6 \frac{\beta_{2s}}{a_2} + a_2 + 4\beta_{2s}} \frac{ql^2}{4h_2} = 0,1884 ql,$$

$$R_1 = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} = ql.$$

Obliczenia dla piętra pierwszego (rys. 22c) są następujące: według poz. 1, 2, 3 i 4 tablicy 4

$$M_0 = \frac{1}{2 + a_1} (-M_1) - \frac{3 \frac{\delta_1}{a_1} (1 + a_1)}{2 + a_1} h_1 (-H_1) + \frac{1}{2 + a_1} \frac{ql^2}{12} = 0,0260 ql^2,$$

$$H_0 = \frac{3}{2 + a_1} \frac{1}{h_1} (-M_1) - \frac{3 \frac{\delta_1}{a_1} (1 + 2a_1)}{2 + a_1} (-H_1) + \frac{1}{2 + a_1} \frac{ql^2}{4h_1} = 0,231 ql,$$

$$R_0 = ql + \frac{ql}{2} = \frac{3}{2} ql.$$

Mając wyznaczone wielkości  $M_2, H_2, R_2, M_1, H_1$  i  $R_1$  oraz  $M_0, H_0$  i  $R_0$  sporządzamy dla każdego piętra ramy, tj. dla ram podpartych i obciążonych jak na rys. 22a, 22b i 22c wykresy  $M_x$ . Wykresy te są poszukiwanym wykresem momentów zginających (rys. 23a) dla ramy trzypiętrowej, przedstawionej na rys. 21.

Rysunek 23b przedstawia wykres momentów zginających dla rozwiązania, nie uwzględniającego etapowości przykładania obciążeń.

Powyższy przykład wykazał znaczne różnice ilościowe w wartościach momentów zginających, otrzymanych dla rozwiązania uwzględniającego zmiany schematu statycznego konstrukcji w trakcie jej wznoszenia oraz dla rozwiązania nie uwzględniającego tych zmian (rys. 23a i 23b). W związku z tym decyzja, czy należy obliczenia przeprowadzić w sposób ścisły, tj. uwzględniając zmiany schematu statycznego, czy też nie, winna być każdorazowo podejmowana po przeprowadzeniu analizy stosunku obciążeń przykładanych w trakcie wznoszenia do całkowitych obciążeń działających na konstrukcję.



## Literatura cytowana w tekście

- [1] A. KACNER, *Racjonalizacja obliczania belek ciągłych i ram. Metoda RWR*, Inżynieria i Budownictwo, 1, 4 i 6, 1953.  
[2] W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN Warszawa 1957.  
[3] E. SHEPLEY, *Design and Construction of a Prestressed Concrete Framework*, Civil Engineering and Public Works Review, 3 i 4, 1954.

## Резюме

### МЕТОД ОДНОЭТАПНОГО РАСЧЕТА МНОГОЭТАЖНЫХ РАМ, В СЛУЧАЕ УЧЕТА ИЗМЕНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ, ВО ВРЕМЯ ВОЗВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ

Работа касается учета в статических расчетах изменений статической схемы конструкции во время ее возведения. Эти изменения следует учитывать, когда нагрузки приложенные во время возведения, являются по отношению к остальным — значительными. Предложенный метод, разработанный для симметричных однобейных многоэтажных рам, в отличие от классических методов (решить столько статических схем конструкции, к которым были приложены отдельные нагрузки) дает возможность решить только одну статическую схему конструкции. Обосновывается теоретически предлагаемый способ действия и определяется перемещение узлов рамы, необходимое для того, чтобы найти решение. Обсуждается также ход действия и прилагаются соответствующие таблицы, на основании которых можно, путем простых подстановок, получить значения внутренних сил для чаще всего встречаемых нагрузок. Этот метод специально пригоден при расчете многоэтажных рам, напрягаемых во время возведения.

Очевидно, его применимость является более широкой.

## Summary

### A SINGLE-STAGE COMPUTATION METHOD OF MULTISTOREY FRAMES, TAKING INTO ACCOUNT CHANGES OF THE STATIC SYSTEM DURING THE ASSEMBLAGE OF THE STRUCTURE

The present paper is concerned with the problem of computation of structures taking into consideration any structural change introduced in the course of assemblage. These changes are to be taken into account when the loadings applied during the assemblage of the structure are considerable as compared with the other ones. The method proposed here and devised for symmetric single bay multistorey frames enables us, in contrast to classical methods (requiring the solution of as many static systems as many load systems are considered), to solve the problem by a single computation procedure. This procedure is justified theoretically. The displacements of the joints necessary to obtain the solution are determined. The procedure is discussed in detail.

The given tables enable us to obtain, by simple transformation, the values of the internal forces for typical loads. In particular, the method may find application in the computation of multistorey frames prestressed in the course of assemblage. There are of course other domains of applicability of the method.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 grudnia 1961 r.*