HENRYK MIKOŁAJCZAK

W SPRAWIE NIESKOŃCZONEJ TARCZY CZĘŚCIOWO OBCIĄŻONEJ W OTWORZE KOŁOWYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXVI

TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962

R. A. Eubanks, [1], zwrócił uwagę, że praca [3], omawiająca wymienione w tytule zagadnienie, zawiera pewne nieścisłości, gdyż podane w niej rozwiązanie nie zależy od stałych materiałowych.

Powyższy problem można rozwiązać między innymi metodą szeregów Fouriera. Ostateczne wyniki dadzą się przedstawić w postaci zamkniętej, gdyż otrzymane szeregi są zbieżne do znanych funkcji elementarnych. Opierając się na pracy [2] można napisać

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \qquad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^{-k},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k}{R^k} a_k e^{-ik\varphi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{R^k} e^{ik\varphi} - a'_0 e^{2i\varphi} - \frac{a'_1}{R} e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a'_{k+2}}{R^{k+2}} e^{-ik\varphi} = N - iT \qquad \text{na } L.$$

Są to zależności słuszne dla dowolnego obciążenia otworu. W rozpatrywanym wypadku

$$N - iT = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ik\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-ik\varphi},$$

$$A_0 = -\frac{p\alpha}{\pi}, \qquad A_k = -\frac{p \sin k\alpha}{\pi k}.$$

Porównując współczynniki przy jednakowych potęgach otrzymano na stałe a_k i a'_k następujące wyrażenia (przy wykorzystaniu warunku znikania naprężeń w nieskończoności):

$$a_0 = a'_0 = 0, \qquad a'_1 + a_1 = RA_1,$$

$$a_1 = \frac{RA_1}{1+\varkappa}, \qquad a'_2 = -A_0 R^2,$$

$$a_n = R^n A_n, \quad n \geqslant 2, \qquad a'_3 = 2R^2 a_1 - R^3 A_1,$$

$$\varkappa = 3 - 4\nu, \qquad a'_n = R^2 (n-1) a_{n-2} - R^n A_{n-2}, \quad n \geqslant 4.$$

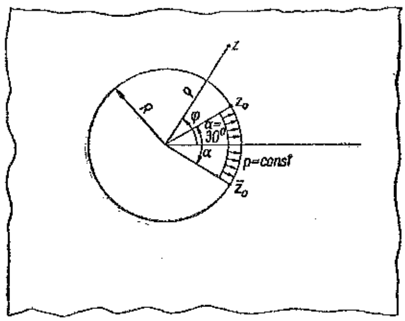
Wykorzystano przy tym warunek jednoznaczności, który narzuca zależność

$$\varkappa a_1 + a_1' = 0.$$

Po wstawieniu obliczonych współczynników i po uporządkowaniu otrzymuje się

$$\Phi(z) = -\frac{\varkappa R A_1}{1+\varkappa}\,\frac{1}{z} + \frac{p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R^k \sin k\alpha}{k z^k},$$

$$\Psi(z) = -\frac{\varkappa R A_1}{1+\varkappa}\,\frac{1}{z} - \frac{p\alpha R^2}{\pi}\,\frac{1}{z^2} + \frac{p}{\pi}\,\frac{R^2}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R^k \sin k\alpha}{k z^k},$$



Rys. 1

Funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ można przedstawić zgodnie z uczynioną na początku wzmianką w postaci

$$\Phi(z) = -\frac{\varkappa R A_1}{1+\varkappa}\,\frac{1}{z} + \frac{p}{2\pi i}\ln\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0},$$

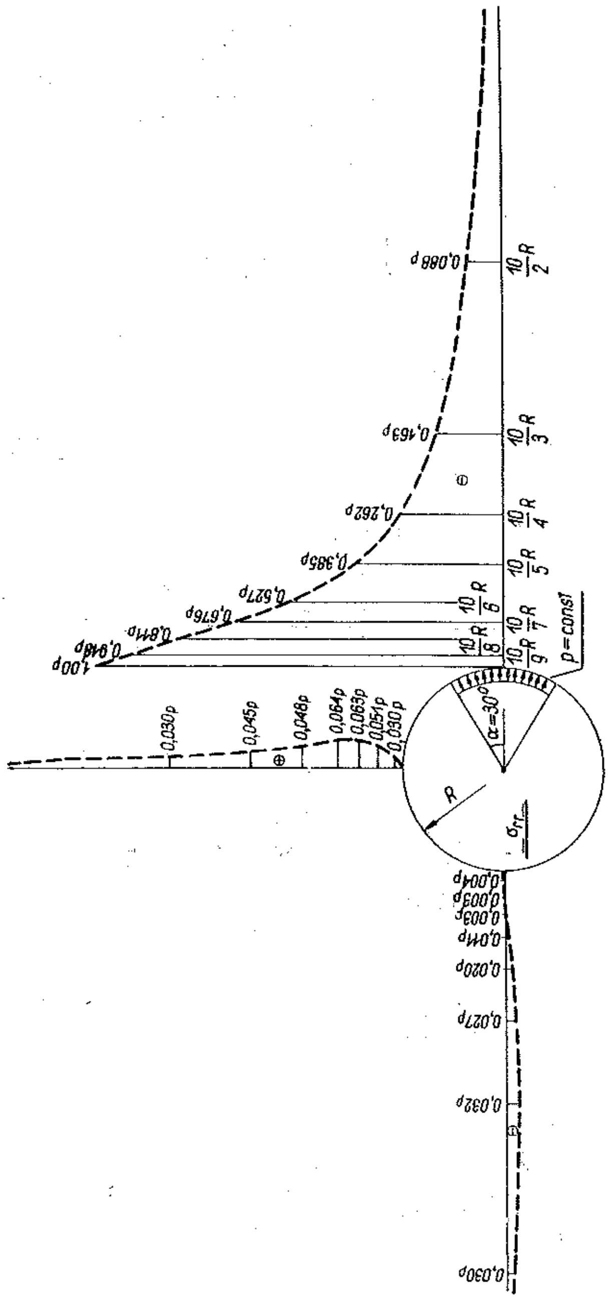
$$\Psi(z) = -\frac{\varkappa A_1}{1+\varkappa}\,\frac{R}{z}\left(1+2\frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{A_0 R^2}{z^2} + \frac{A_1 R^3}{z(z^2-2Rz\cos\alpha+R^2)}.$$

Liczby z_0 i $\bar{z}_0$ wyznaczają punkty leżące na kole i wyznaczające odcinek obciążonego łuku.

Naprężenia σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ i $\sigma_{r\varphi}$ wyrażają się przez funkcję $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ znanymi związkami:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\varphi} = 2\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]\,e^{2i\varphi}.$$


1,00p
0,918p
0,814p
0,676p
0,527p
0,385p
0,262p
0,163p
0,088p
0,030p
0,045p
0,048p
0,064p
0,063p
0,051p
0,030p
0,004p
0,003p
0,003p
0,011p
0,020p
0,027p
0,032p
0,030p
p=const
α=30°
R
σrr

Rys. 2

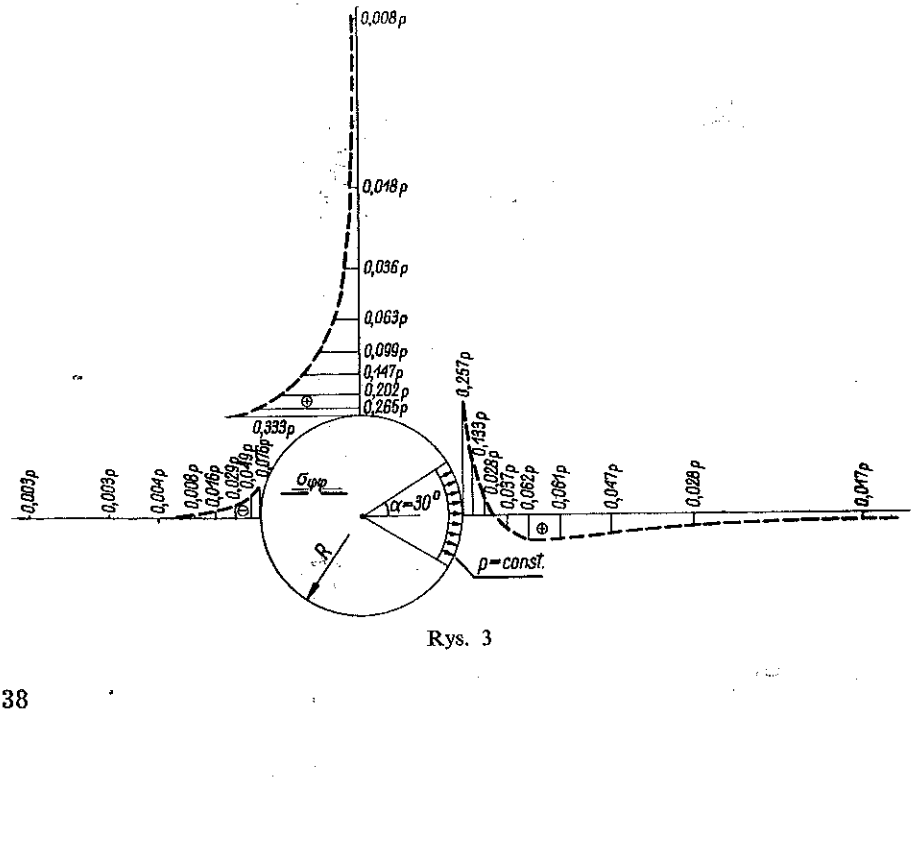
Rozwiązując ten układ otrzymuje się ostatecznie:

$$\sigma_{rr} = -\frac{p\alpha}{\pi} q^2 + \frac{p}{2\pi}\,\frac{3-4\nu}{1-\nu}\, q\,(1-q^2)\sin\alpha\cos\varphi -$$
$$-\frac{p}{2\pi} q\,(1-q^2)\left[\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{1-2q\cos(\alpha-\varphi)+q^2}+\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{1-2q\cos(\alpha+\varphi)+q^2}\right]-$$
$$-\frac{p}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{q\sin(\alpha-\varphi)}{1-q\cos(\alpha-\varphi)}+\operatorname{arc\,tg}\frac{q\sin(\alpha+\varphi)}{1-q\cos(\alpha+\varphi)}\right],$$

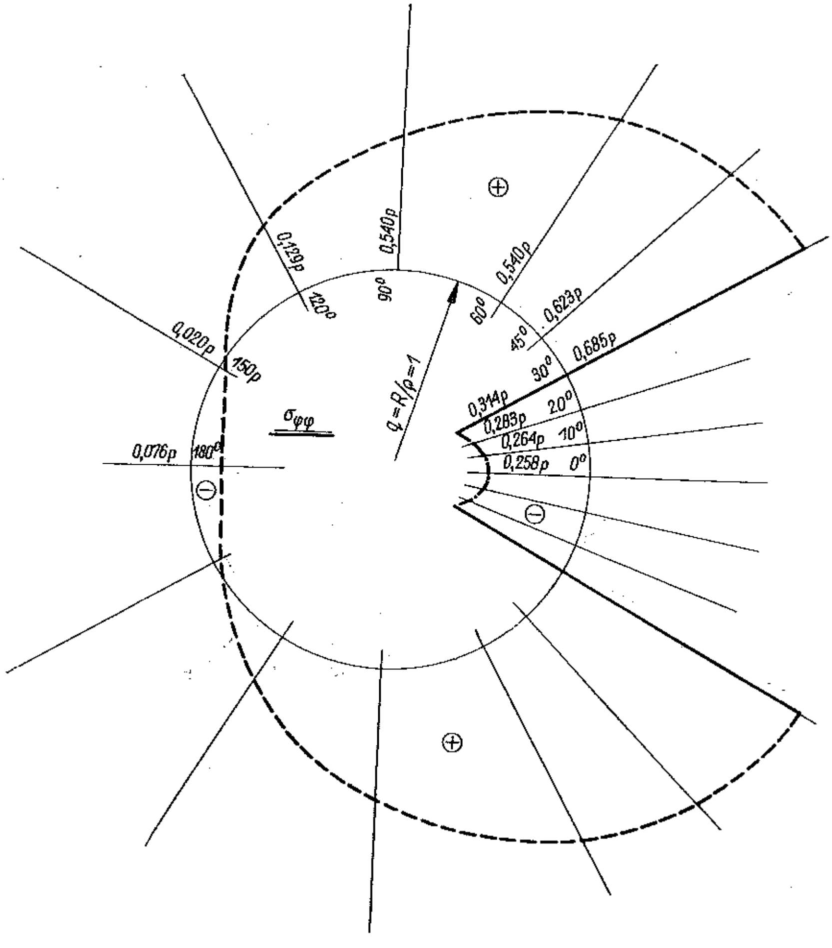
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p\alpha}{\pi} q^2 + \frac{p}{2\pi}\,\frac{3-4\nu}{1-\nu}\, q\,(1+q^2)\sin\alpha\cos\varphi +$$
$$+\frac{p}{2\pi} q\,(1-q^2)\left[\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{1-2q\cos(\alpha-\varphi)+q^2}+\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{1-2q\cos(\alpha+\varphi)+q^2}\right]-$$
$$-\frac{p}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{q\sin(\alpha-\varphi)}{1-q\cos(\alpha-\varphi)}+\operatorname{arc\,tg}\frac{q\sin(\alpha+\varphi)}{1-q\cos(\alpha+\varphi)}\right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{p}{2\pi}\,\frac{3-4\nu}{1-\nu}\, q\,(1-q^2)\sin\alpha\sin\varphi +$$
$$+\frac{p}{2\pi}(1-q^2)\left[\frac{1-q\cos(\alpha-\varphi)}{1-2q\cos(\alpha-\varphi)}-\frac{1-q\cos(\alpha+\varphi)}{1-2q\cos(\alpha+\varphi)}\right],$$

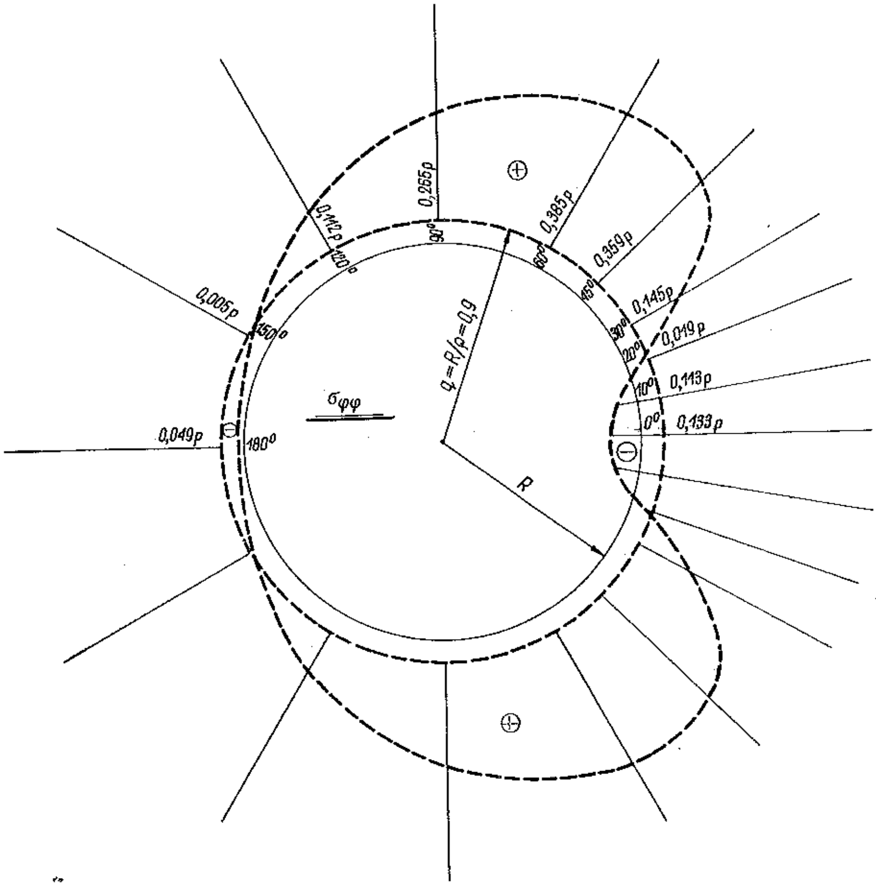
$$q = \frac{R}{\varrho}.$$



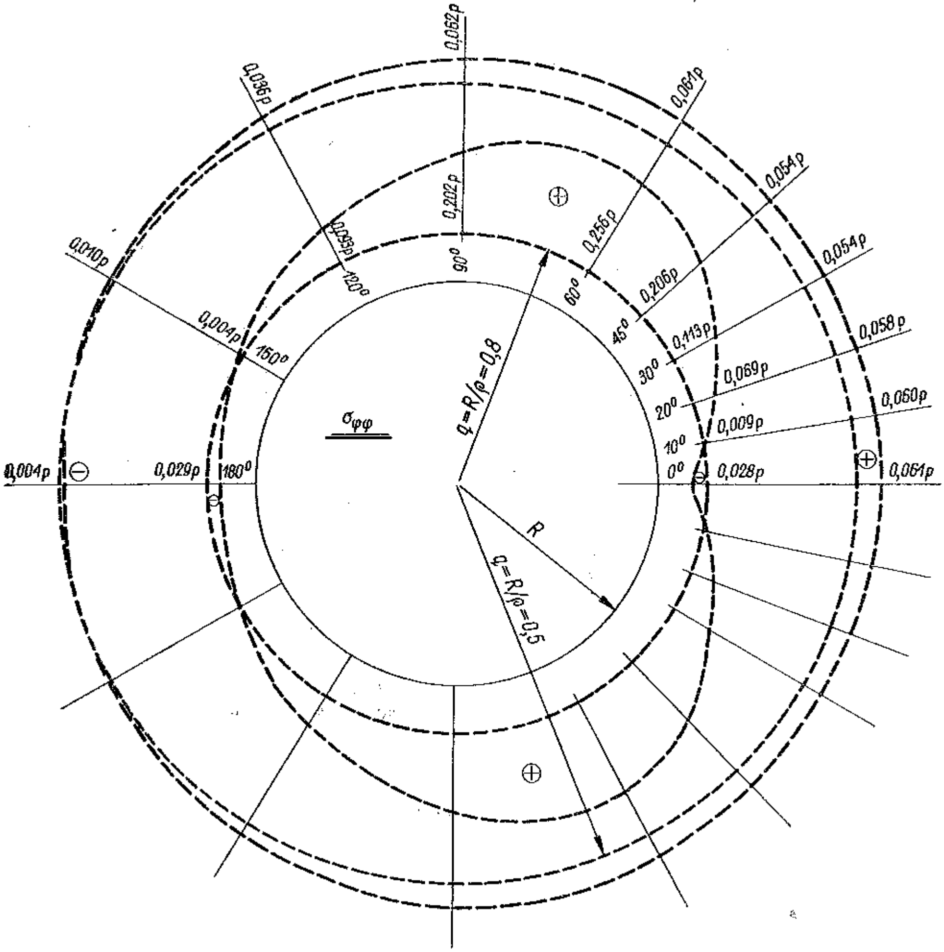
Rys. 3


0,540p
0,129p
0,540p
0,623p
0,685p
0,020p
120°
90°
60°
45°
30°
150°
$q=R/\rho=1$
$\sigma_{\varphi\varphi}$
0,314p
0,283p
20°
0,264p
10°
0,076p
180°
0,258p
0°

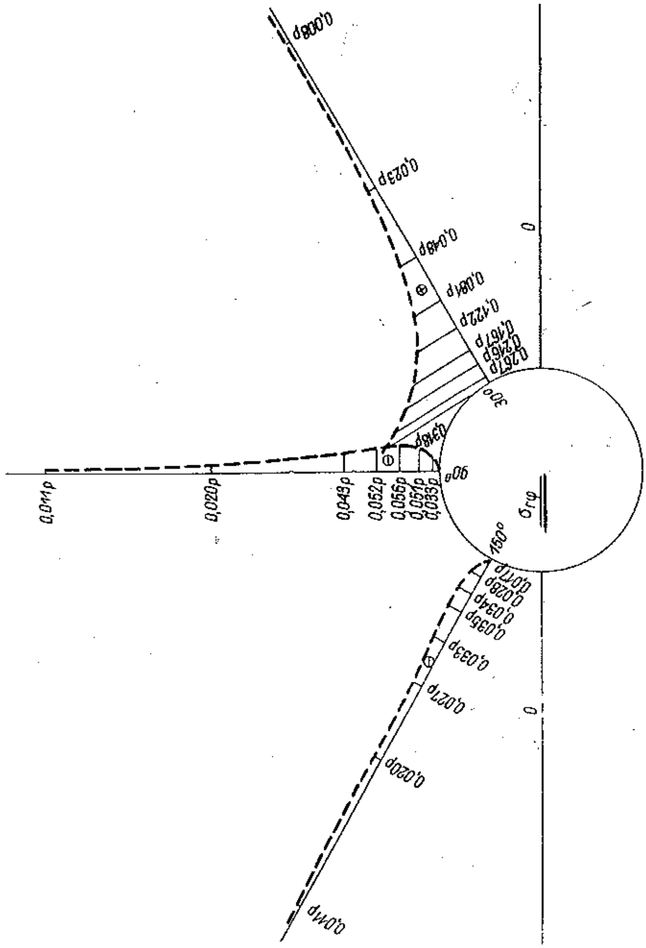
Rys. 4


0,255p
0,385p
0,359p
0,145p
0,019p
0,113p
0,133p
0,112p
0,005p
0,049p
90°
60°
45°
30°
20°
10°
0°
120°
150°
180°
$q=R/\rho=0,9$
R
$\sigma_{\varphi\varphi}$

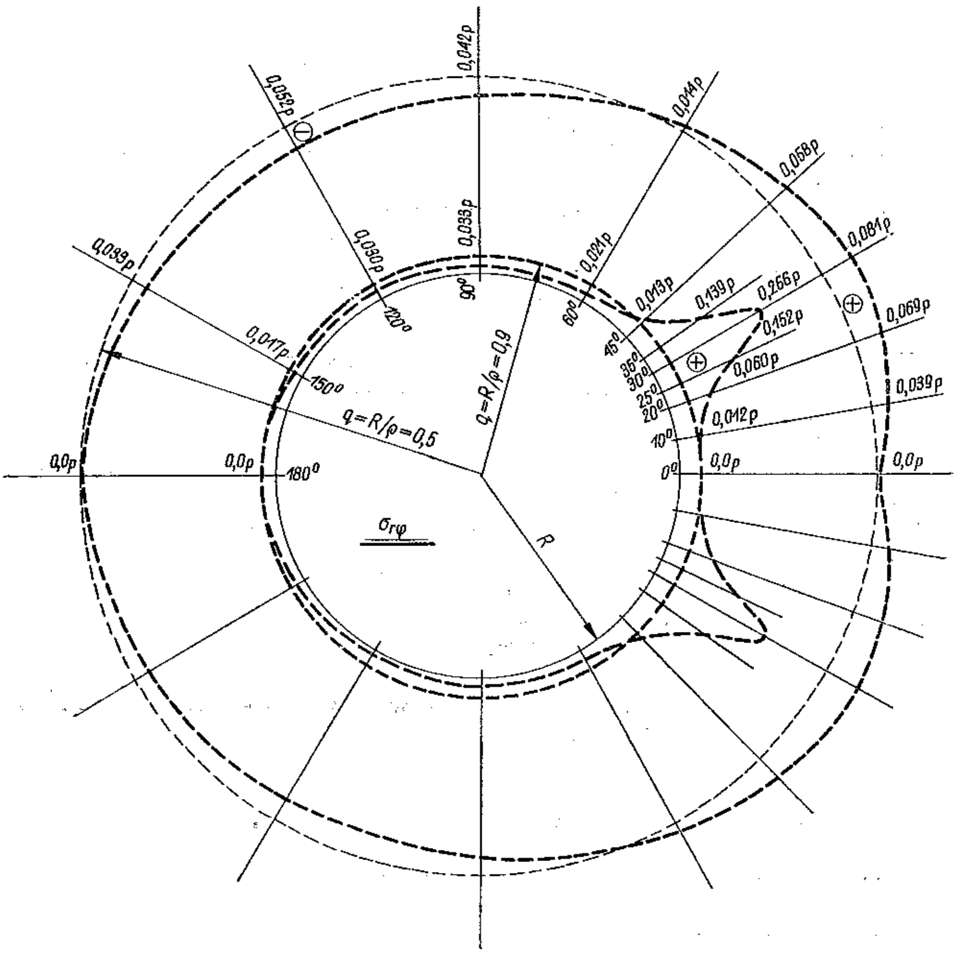
Rys. 5


0,062p
0,036p
0,061p
0,054p
0,054p
0,058p
0,060p
0,061p
0,202p
0,256p
0,206p
0,113p
0,069p
0,009p
0,028p
0,010p
0,004p
0,029p
0,004p
90°
120°
150°
180°
60°
45°
30°
20°
10°
0°
$\sigma_{\varphi\varphi}$
$q=R/\rho=0,8$
$q=R/\rho=0,5$
R

Rys. 6


0,011p
0,020p
0,049p
0,052p
0,056p
0,051p
0,033p
90°
30°
150°
0,008p
0,023p
0,048p
0,081p
0,122p
0,167p
0,216p
0,267p
0,017p
0,028p
0,034p
0,035p
0,033p
0,027p
0,020p
0,011p
0
0
$\sigma_{r\varphi}$

Rys. 7



0,042p
0,052p
0,014p
0,058p
0,081p
0,033p
0,030p
0,021p
0,013p
0,139p
0,266p
0,152p
0,069p
0,083p
0,017p
0,060p
0,039p
0,012p
0,0p
0,0p
0,0p
0,0p
90°
120°
60°
45°
35°
30°
25°
20°
10°
0°
150°
180°
q=R/ρ=0,9
q=R/ρ=0,5
R
$\sigma_{r\varphi}$

Rys. 8

Na zakończenie obliczono kilka przykładów rozkładu naprężeń, przyjmując $\alpha = 30°$ oraz $\nu = 0,3$. Wyniki pokazano na rys. 2-8. Jak łatwo zauważyć, naprężenia normalne σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ w punkcie osobliwym o współrzędnych $(R, \pi/6)$ wykazują nieciągłość, istnieją jednak skończone granice lewo i prawo-stronne. W punkcie tym istnieją także naprężenia tnące o skończonej wartości. Podane na rysunkach wielkości otrzymano jako wartości graniczne przy $q \to 1$ i $\alpha \to \pi/6+0$ lub $\pi/6 - 0$.

Literatura cytowana w tekście

[1] R. A. Eubanks, Applied Mechanics Reviews, 8, **14** (1961), poz. 4007.

[2] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1949.

[3] F. Szelągowski, Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences, 8, **8** (1960).

Резюме

К ВОПРОСУ БЕСКОНЕЧНОГО ДИСКА, НАГРУЖЕННОГО ЧАСТИЧНО В КРУГОВОМ ОТВЕРСТИИ

В работе приводится точное решение задачи в замкнутом виде, касающейся бесконечного диска, частично нагруженного в круговом отверстии. Решение получено методом рядов Фурье, используя общее решение, предложенное Н. И. Мусхелишвили, [2]. Полученные результаты распределения напряжений иллюстрируются в числовом примере в форме диаграмм.

Summary

SOME REMARKS ON THE INFINITE PLATE PARTIALLY LOADED ON THE EDGE OF A CIRCULAR HOLE

The paper contains a closed-form solution of the problem of the infinite plate partially loaded on the edge of a circular hole. The solution is obtained by means of Fourier series, making use of the general solution obtained by N. J. Muskhelishvili, [2]. The resulting stress distribution is illustrated by means of a numerical example in the form of graphs.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 listopada 1961 r.