

MICHAŁ ŻYCHKOWSKI

**OBLICZANIE WYTĘŻENIA MATERIAŁU
W STANACH PODKRYTYCZNYCH**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXXIV**

TOM X · ZESZYT 2 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	281
2. Uwagi ogólne w obliczaniu wielowymiarowych całek powierzchniowych	282
3. Krzywa graniczna złożona z odcinków linii prostych; metoda analityczna	285
4. Krzywa graniczna złożona z odcinków linii prostych; metoda geometryczna	288
5. Krzywa graniczna o kształcie elipsy	290
6. Krzywa graniczna o kształcie paraboli	296
7. Uwagi końcowe	303

1. Wstęp

W pracy [16] zaproponowano pewną ogólną miarę wyężenia materiału w stanach podkrytycznych, stanowiącą uogólnienie pojęcia naprężenia zastępczego (zredukowanego) na przypadek nieprostych procesów obciążania. Pozwala ona uwzględnić wszystkie czynniki, wpływające na wyężenie materiału w rozpatrywanym przypadku, co odpowiada wprowadzeniu powierzchni (hiperpowierzchni) granicznej w n -wymiarowej przestrzeni czynników wyężenia. Do czynników tych zaliczają się w pierwszym rzędzie składowe stanu naprężenia (lub stanu odkształcenia, co nie zawsze jest równoważne, [17]); poważną rolę może również odgrywać wpływ temperatury, wilgotności itp.

Czynniki wyężenia X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) posiadają na ogół różne wymiary; dzieląc je przez pewne wielkości porównawcze A_i wprowadzono bezwymiarowe czynniki wyężenia $x_i = X_i/A_i$ i zapisano równanie powierzchni granicznej w postaci

$$(1.1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Proponowana miara wyężenia określona została za pomocą wzoru

$$(1.2) \quad w = 1 - \frac{\mathfrak{M}(1/r_0)}{\mathfrak{M}(1/r_p)},$$

gdzie r_0 i r_p oznaczają odpowiednio odległości punktu 0 (początku układu odniesienia w przestrzeni czynników wyężenia) i punktu P (reprezentującego dany stan fizyczny w rozpatrywanym punkcie ciała) od zmiennego punktu powierzchni granicznej N , czyli są funkcjami punktu N (rys. 1). Symbolem \mathfrak{M} oznaczono pewną wartość średnią tych funkcji, mianowicie

$$(1.3) \quad \mathfrak{M}(1/r_p) = \frac{\int_{K_p} \mathbb{S}(1/r_p) p df_p^{(n-1)}}{\int_{K_p} \mathbb{S} p df_p^{(n-1)}},$$

gdzie symbol \mathbb{S} oznacza całkę powierzchniową po powierzchni $(n-1)$ -wymiarowej w zapisie J. HADAMARDA, K_p jest n -wymiarową kulą jednostkową o środku w punkcie P , $df_p^{(n-1)}$ jest elementem $(n-1)$ -wymiarowej powierzchni tej kuli; średnią oblicza się przy tym z wagą p , która jest na ogół pewną funkcją kierunku w przestrzeni czynników wyężenia i odpowiada prawdopodobieństwu osiągnięcia powierzchni granicznej w tym kierunku (gęstości prawdopodobieństwa). Gęstość

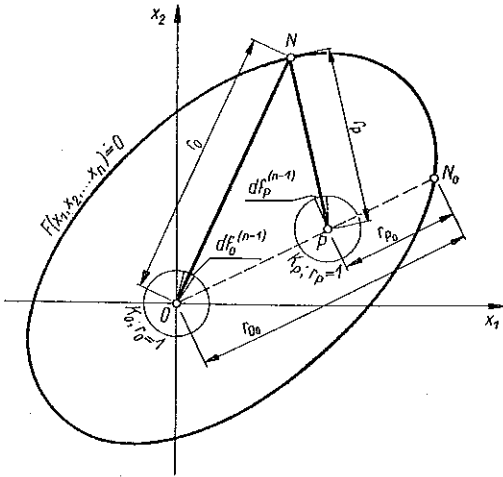
prawdopodobieństwa może być również funkcją punktu N powierzchni granicznej; funkcję tę należy określić w zależności od przewidywanego charakteru pracy danego elementu konstrukcyjnego.

Jeżeli waga p jest funkcją tylko kierunku w przestrzeni czynników wyteżenia, to mianowniki obu średnich, występujących we wzorze (1.2), są równe i ulegają uproszczeniu, a wzór ten przybiera postać

$$(1.4) \quad w = 1 - \frac{SS(1/r_0) p df_0^{(n-1)}}{SS(1/r_P) p df_P^{(n-1)}}.$$

Po wprowadzeniu współrzędnych kulistych o środku w punkcie P za pomocą wzorów

$$(1.5) \quad \begin{cases} x_m = x_{mP} + r \cos \varphi_m \prod_{i=1}^{m-1} \sin \varphi_i, \\ m = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_n = x_{nP} + r \prod_{i=1}^{n-1} \sin \varphi_i \end{cases}$$



Rys. 1

i przeprowadzeniu iteracji zapiszemy wzór (1.4) w postaci

$$(1.6) \quad w = 1 - \frac{\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}{r_0(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}}{\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}{r_P(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}}$$

W pracy [16] podano kilka przykładów obliczania wyteżenia za pomocą wzorów (1.2), (1.4) i (1.6). Obecnie zajmiemy się pewnymi ogólnymi metodami obliczeń występujących w tych wzorach całek i podamy dalsze przykłady zastosowań.

2. Uwagi ogólne w obliczaniu wielowymiarowych całek powierzchniowych

Obliczenie wielkości w , określonej wzorami (1.2), (1.4) i (1.6), sprowadza się do obliczenia całki powierzchniowej po powierzchni pewnej n -wymiarowej kuli jednostkowej. W przypadku $n = 2$ (okrąg koła) problem ten nie stwarza zazwyczaj poważniejszych trudności, ale już przy $n = 3$ (na przykład w trójwymiarowej przestrzeni Haigha-Westergaarda), a zwłaszcza przy większej ilości wymiarów ściśle metody całkowania rzadko dadzą się zastosować. Wspomniemy tu o pewnych

przybliżonych metodach obliczania całek wielokrotnych. Posługiwanie się metodami przybliżonymi uzasadnić można również w ten sposób, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa p z reguły może być określony tylko w przybliżeniu, a uzyskane wyniki mają posłużyć przede wszystkim do celów orientacyjnych.

Istnieje wiele wzorów przybliżonych, pozwalających obliczać całki objętościowe w przestrzeni n -wymiarowej (R. MISES, [11], Sz. E. MIKIELADZE, [10], I. S. BIEREZIN, N. P. ŻIDKOW, [3]), natomiast znacznie mniej uwagi zwrócono dotychczas na przybliżone obliczanie całek powierzchniowych w przestrzeni n -wymiarowej. J. ALBRECHT i L. COLLATZ, [1], podają sześć wzorów przybliżonych na całki po powierzchni kuli w przestrzeni trójwymiarowej. Przytoczmy je tutaj, ponieważ przestrzeń trójwymiarowa jest często spotykana w teorii wytrzymałości i wzory te mogą być bardzo przydatne w przypadku powierzchni granicznych o bardziej skomplikowanych kształtach. Mamy mianowicie

$$(2.1) \quad \frac{1}{4r^2\pi} \int_K \int u \, df = \begin{cases} \frac{1}{6} S_0(r) + 0(r^4), \\ \frac{1}{12} S_i(r) + 0(r^6), \\ \frac{1}{20} S_a(r) + 0(r^6), \\ \frac{1}{30} \left[2S_k \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) + S_s(r) \right] + 0(r^6), \\ \frac{1}{120} \left[9S_e \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right) + 8S_s(r) \right] + 0(r^6), \\ \frac{1}{840} \left[27S_e \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right) + 32S_k \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) + 40S_s(r) \right] + 0(r^8). \end{cases}$$

We wzorach tych S_0 , S_i , S_a , S_e , S_k i S_s oznaczają kolejno sumy wartości funkcji u w wierzchołkach wpisanego ośmiościanu, dwudziestościanu i dwunastościanu umiarowego, oraz w wierzchołkach, środkach krawędzi i środkach ścianek sześciannów o bokach $2r/\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$ i $2r$. Współrzędne wierzchołków wpisanych brył umiarowych podaje tablica 1.

Wyprowadzenie wzorów (2.1) opiera się na rozwinięciu funkcji podcałkowej w szereg Taylora wielu zmiennych i zachowaniu kilku pierwszych wyrazów.

Podany w pracy [1] wzór dla całkowania po okręgu koła posiada postać

$$(2.2) \quad \frac{1}{2r\pi} \int_K u \, ds = \frac{1}{2m} S_{2m}(r) + 0(r^{2m}),$$

gdzie $S_{2m}(r)$ jest sumą wartości funkcji w wierzchołkach wielokąta foremnego o $2m$ bokach (parzysta ilość boków chyba nie jest tu jednak potrzebna). Wzór

ten można uważać za wynikający bezpośrednio z reguły trapezów dla całkowania po krzywej zamkniętej. Przez 0 (r^n) oznaczono we wzorach (2.1) i (2.2) błąd wzoru przybliżonego i rząd jego wielkości.

W przypadku całkowania w przestrzeni o większej ilości wymiarów bardzo dogodnym narzędziem może się okazać metoda Monte-Carlo (I. S. BIEREZIN, N. P. ŻIDKOW, [3], E. F. BECKENBACH, [2], A. S. HOUSEHOLDER, [9]). Metoda ta, oparta na zasadach rachunku prawdopodobieństwa, daje z reguły wynik o niezbyt dużej dokładności, jednak dla orientacyjnej oceny wyteżenia w punkcie dokładność ta może być wystarczająca.

Tablica 1. Współrzędne wierzchołków brył umiarowych wpisanych w kulę o promieniu r

	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{r}$	$\frac{z}{r}$	
	0	0	$(-1)^p$	$p = 1, 2$
Dwudziestokąt (ikosaeder)	$(-1)^p \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \frac{2q\pi}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{2} \sin \frac{2q\pi}{5}$	$(-1)^p \frac{\sqrt{5}}{5}$	$p = 1, 2$ $q = 1, 2, 3, 4, 5$
Dwunastokąt (dodekaeder)	$(-1)^p a_\zeta \cos \frac{2q\pi}{5}$	$a_\zeta \sin \frac{2q\pi}{5}$	$(-1)^p \beta_\zeta$	$p = 1, 2$ $q = 1, 2, 3, 4, 5$ $\zeta = 1, 2$

$$a_\zeta = \frac{1}{15} \sqrt{150 - (-1)^\zeta 30\sqrt{5}}, \quad \beta_\zeta = \frac{1}{15} \sqrt{75 + (-1)^\zeta 30\sqrt{5}},$$

$$\cos \frac{2}{5}\pi = \cos \frac{8}{5}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$\cos \frac{4}{5}\pi = \cos \frac{6}{5}\pi = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1),$$

$$\sin \frac{2}{5}\pi = -\sin \frac{8}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\sin \frac{4}{5}\pi = -\sin \frac{6}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

W pracy [16] podano kilka przykładów obliczania wyteżenia w trój- i dwuwymiarowej przestrzeni czynników wyteżenia oraz w zupełności rozwiązano przypadek jednowymiarowej przestrzeni czynników wyteżenia. Przykłady, którymi zajmiemy się obecnie, odnoszą się głównie do przestrzeni dwuwymiarowej, a więc będziemy mówić nie o powierzchni granicznej, lecz o krzywej granicznej. Przykładem zastosowania może tu być płaski stan naprężenia, choć oczywiście jest to przypadek bardzo szczególny; należy tu np. również przypadek przestrzen-

nego stanu naprężenia, gdy tylko jedno z naprężeń głównych ma ustaloną wartość (prawdopodobieństwo innych wartości tego naprężenia można uważać za równe zero). Z dwuwymiarową przestrzenią czynników wyteżenia mamy do czynienia również wtedy, gdy tylko jedno naprężenie główne może zmieniać swą wartość, lecz wpływ na wyteżenie posiada również jakiś inny, niezależny czynnik, jak np. temperatura lub wilgotność.

3. Krzywa graniczna złożona z odcinków linii prostych; metoda analityczna

Krzywe graniczne bardzo często złożone są z odcinków linii prostych. Z przypadkiem tym możemy się spotkać nie tylko przy posługiwaniu się takimi hipotezami wyteżenia, jak Treski-Guesta (największych naprężeń stycznych), Galileusza czy Saint-Venanta-Ponceleta, lecz również przy aproksymacji linii krzywych odcinkami linii prostych; aproksymację taką stosuje wielu autorów. Wyprowadzimy teraz pewne ogólne wzory dla krzywych granicznych tego typu.

Niech dla odcinka $M_j M_{j+1}$ krzywej granicznej (rys. 2) dane będzie równanie

$$(3.1) \quad A_j x + B_j y + C_j = 0.$$

Wprowadzamy, jak zwykle, [16], współrzędne biegunowe płaskie o środku w punkcie P , reprezentującym dany stan fizyczny w rozpatrywanym punkcie ciała:

$$(3.2) \quad \begin{cases} x = x_p + r \cos \varphi, \\ y = y_p + r \sin \varphi, \end{cases}$$

uzyskując

$$(3.3) \quad (A_j \cos \varphi + B_j \sin \varphi) r + A_j x_p + B_j y_p + C_j = 0.$$

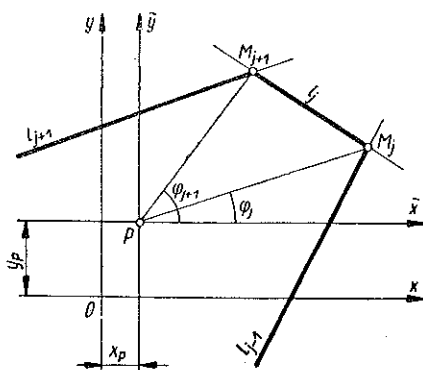
Z równania tego obliczymy nie odległość r punktu P od krzywej granicznej, lecz wprost występującą we wzorach (1.2), (1.4) i (1.6) odwrotność tej odległości:

$$(3.4) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_p} = - \frac{A_j \cos \varphi + B_j \sin \varphi}{A_j x_p + B_j y_p + C_j}.$$

Wzór (3.4) ma zastosowanie dla $\varphi_j \leq \varphi \leq \varphi_{j+1}$, rys. 2. Kąty te określone są wzorem

$$(3.5) \quad \varphi_j = \arctg \frac{y_j - y_p}{x_j - x_p}$$

i analogicznym dla φ_{j+1} . Zależą one również od położenia punktu P ; zależności tej dla uproszczenia nie uwidoczniło jednak w zapisie.



Rys. 2

Jeżeli gęstość prawdopodobieństwa p jest tylko funkcją kierunku, a więc kąta φ , to mają zastosowanie wzory (1.4) i (1.6), które teraz zapiszemy krótko w postaci

$$(3.6) \quad w = 1 - \frac{J(0)}{J(P)},$$

gdzie

$$(3.7) \quad J(P) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_P}(\varphi) p(\varphi) d\varphi,$$

a $J(0)$ jest szczególnym przypadkiem $J(P)$. Podstawiając (3.4) i sumując całki po poszczególnych przedziałach zmiennej φ otrzymujemy

$$(3.8) \quad J(P) = \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \left(- \frac{A_j \cos \varphi + B_j \sin \varphi}{A_j x_p + B_j y_p + C_j} \right) p(\varphi) d\varphi,$$

a wzór ogólny na wyrażenie w przybierze postać

$$(3.9) \quad w = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \left(- \frac{A_j \cos \varphi + B_j \sin \varphi}{C_j} \right) p(\varphi) d\varphi}{\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \left(- \frac{A_j \cos \varphi + B_j \sin \varphi}{A_j x_p + B_j y_p + C_j} \right) p(\varphi) d\varphi}.$$

Jeżeli krzywa graniczna jest zamknięta, co zazwyczaj ma miejsce, to we wzorach (3.8) i (3.9) przez wskaźnik $j+1$ dla $j = n$ należy rozumieć wskaźnik 1.

Przejdziemy do przypadku szczególnego $p \equiv 1$, co odpowiada równemu prawdopodobieństwu «ruchu» punktu w przestrzeni czynników wyłączenia we wszystkich kierunkach. Wtedy

$$(3.10) \quad J(P) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{A_j x_p + B_j y_p + C_j} (A_j \sin \varphi - B_j \cos \varphi) \Big|_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}}.$$

Ze wzoru (3.5) wynika

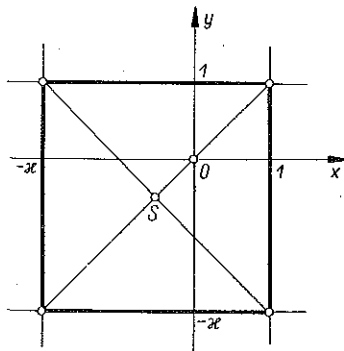
$$(3.11) \quad \sin \varphi_j = \frac{y_j - y_p}{\sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}}, \quad \cos \varphi_j = \frac{x_j - x_p}{\sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}},$$

zatem

$$(3.12) \quad J(P) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{A_j x_p + B_j y_p + C_j} \left[\frac{A_j (y_{j+1} - y_p) - B_j (x_{j+1} - x_p)}{\sqrt{(x_{j+1} - x_p)^2 + (y_{j+1} - y_p)^2}} - \frac{A_j (y_j - y_p) - B_j (x_j - x_p)}{\sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}} \right].$$

Dla krzywej granicznej zamkniętej wzór ten przybierze jeszcze prostszą postać. Najpierw przegrupujemy go tak, by w każdym z nawiasów oba składniki odnosiły się nie do dwóch sąsiednich punktów, M_j i M_{j+1} , lecz do tego samego punktu M_j . Wtedy przed nawias można będzie z mianowników wyłączyć pierwiastek:

$$(3.13) \quad J(P) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}} \times \left[\frac{A_{j-1}(y_j - y_p) - B_{j-1}(x_j - x_p)}{A_{j-1}x_p + B_{j-1}y_p + C_{j-1}} - \frac{A_j(y_j - y_p) - B_j(x_j - x_p)}{A_jx_p + B_jy_p + C_j} \right]$$



Rys. 3

Punkt M_j leży na prostych l_j i l_{j-1} (rys. 2), zatem można podstawić

$$(3.14) \quad C_{j-1} = -A_{j-1}x_j - B_{j-1}y_j,$$

$$C_j = -A_jx_j - B_jy_j.$$

Po sprowadzeniu wyrazów w nawiasie we wzorze (3.13) do wspólnego mianownika, podstawieniu (3.14), uporządkowaniu licznika i uproszczeniu przez występujący w mianowniku pierwiastek otrzymujemy ostatecznie

$$(3.15) \quad J(P) = \sum_{j=1}^n \frac{(A_{j-1}B_j - A_jB_{j-1})\sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}}{(A_{j-1}x_p + B_{j-1}y_p + C_{j-1})(A_jx_p + B_jy_p + C_j)}$$

oraz

$$(3.16) \quad w = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{(A_{j-1}B_j - A_jB_{j-1})\sqrt{x_j^2 + y_j^2}}{C_{j-1}C_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{(A_{j-1}B_j - A_jB_{j-1})\sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}}{(A_{j-1}x_p + B_{j-1}y_p + C_{j-1})(A_jx_p + B_jy_p + C_j)}}$$

Dla przykładu przyjmijmy, że krzywa graniczna jest brzegiem kwadratu o środku leżącym na prostej $y=x$, przesuniętym względem początku układu (rys. 3). Kontur złożony jest więc z odcinków czterech prostych o równaniach

$$(3.17) \quad x - 1 = 0, \quad y - 1 = 0, \quad x + x = 0, \quad y + x = 0$$

i odpowiada hipotezie wyężeniowej Galileusza-Clebscha-Rankine'a przy oznaczeniach pracy [16], mianowicie

$$(3.18) \quad x = \frac{K_c}{K_r}$$

Po podstawieniu wartości stałych A_j, B_j i C_j oraz współrzędnych wierzchołków kwadratu do wzoru ogólnego (3.16) i pominięciu zbędnych już teraz wskaźników P otrzymujemy

$$(3.19) \quad w = 1 - \left\{ 2 \sqrt{1 + \kappa^2} + (1 + \kappa) \sqrt{2} \right\} : \kappa \left[\frac{\sqrt{(1-x)^2 + (\kappa+y)^2}}{(1-x)(\kappa+y)} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}}{(1-x)(1-y)} + \frac{\sqrt{(\kappa+x)^2 + (1-y)^2}}{(\kappa+x)(1-y)} + \frac{\sqrt{(\kappa+x)^2 + (\kappa+y)^2}}{(\kappa+x)(\kappa+y)} \right]$$

Wzór ten przybiera znacznie prostszą postać w przypadku, gdy punkt P leży na przekątnej $y = x$. Po dokonaniu redukcji i uwolnieniu od «piętrowych» mianowników

$$(3.20) \quad w = 1 - \frac{[(1+\kappa)\sqrt{2} + 2\sqrt{1+\kappa^2}](1-x)(\kappa+x)}{\kappa[(1+\kappa)\sqrt{2} + 2\sqrt{(1-x)^2 + (\kappa+x)^2}]}$$

Wytyczenie minimalne, oczywiście przy założonym równomiernym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa p , wystąpi w środku kwadratu, czyli punkcie o współrzędnych

$$(3.21) \quad x_{opt} = y_{opt} = \frac{\kappa - 1}{2}$$

Tablica 2. Wytyczenie minimalne w przypadku płaskim hipotezy krańcowego naprężenia normalnego

κ	w_{min}
1	0
2	-0,1554
3	-0,4120
4	-0,6923
5	-0,9817
6	-1,2753
7	-1,5714

Po podstawieniu tych wartości do (3.20) i kilku prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(3.22) \quad w_{min} = 1 - \frac{1 + \kappa}{8\kappa} [(1 + \kappa) + \sqrt{2(1 + \kappa^2)}]$$

Wartości funkcji $w_{min} = w_{min}(\kappa)$ dla analizowanej hipotezy wytyczeniowej krańcowego naprężenia normalnego podaje tablica 2.

4. Krzywa graniczna złożona z odcinków linii prostych; metoda geometryczna

Dość skomplikowany wzór (3.16) można zapisać w znacznie prostszej formie przez wprowadzenie pewnych wielkości o prostej interpretacji geometrycznej. Przyjmijmy równomierny rozkład gęstości prawdopodobieństwa «ruchu» punktu P we wszystkich kierunkach, $p \equiv 1$. Wtedy całka $J(P)$, (3.7), przybierze postać

$$(4.1) \quad J(P) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_P(\varphi)} d\varphi = \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{d\varphi}{r_P(\varphi)}$$

Środek układu odniesienia przyjmiemy jak zwykle w punkcie P . Każda z całek składowych we wzorze (4.1) jest oczywiście niezmiennikiem ze względu na obrót układu współrzędnych. Dla wygody przy obliczaniu całki w granicach od φ_j do φ_{j+1} obrócimy układ tak, by odpowiedni odcinek konturu był prostopadły do osi x , czyli posiadał równanie $x - x_0 = 0$ (rys. 4). Mamy wtedy

$$(4.2) \quad r_P(\varphi) = \frac{x_0}{\cos \varphi},$$

oraz

$$(4.3) \quad \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{d\varphi}{r_P(\varphi)} = \frac{1}{x_0} (\sin \varphi_{j+1} - \sin \varphi_j).$$

Oznaczając przez L_j odległość wierzchołka M_j od początku układu P otrzymujemy

$$(4.4) \quad x_0 = L_j \cos \varphi_j = L_{j+1} \cos \varphi_{j+1},$$

$$(4.5) \quad \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{d\varphi}{r_P(\varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_{j+1}}{L_{j+1}} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_j}{L_j}.$$

Zamiast kątów środkowych φ_j wygodniej jest wprowadzić kąty ψ_j^l i ψ_j^p , zawarte między prostymi łączącymi punkty P i M_j oraz krawędziami (rys. 4). Podobnymi kątami posługuje się teoria nośności granicznej płyt wielokątnych, obciążonych siłą skupioną, [12] i [14]. Wtedy $\operatorname{tg} \varphi_{j+1} = \operatorname{ctg} \psi_{j+1}^l$, $\operatorname{tg} \varphi_j = -\operatorname{ctg} \psi_j^p$ oraz

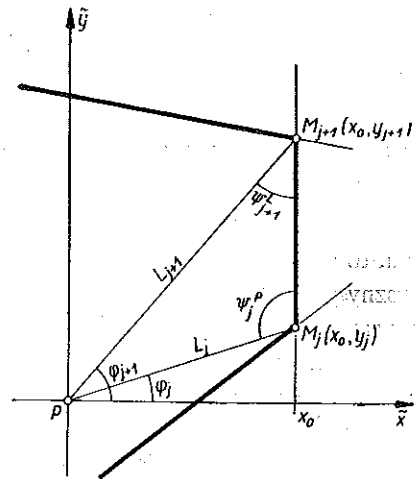
$$(4.6) \quad J(P) = \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{d\varphi}{r_P(\varphi)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\operatorname{ctg} \psi_{j+1}^l}{L_{j+1}} + \frac{\operatorname{ctg} \psi_j^p}{L_j} \right).$$

Dla krzywej granicznej zamkniętej można przegrupować dodawanie podobnie jak w p. 3 (łączyć wyrazy ze wskaźnikami j), i ostatecznie

$$(4.7) \quad J(P) = \sum_{j=1}^n \frac{\operatorname{ctg} \psi_j^l + \operatorname{ctg} \psi_j^p}{L_j},$$

$$(4.8) \quad w = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\operatorname{ctg} \psi_{j,0}^l + \operatorname{ctg} \psi_{j,0}^p}{L_{j,0}}}{\sum_{j=1}^n \frac{\operatorname{ctg} \psi_{j,P}^l + \operatorname{ctg} \psi_{j,P}^p}{L_{j,P}}},$$

gdzie wskaźnikami dodatkowymi 0 i P oznaczono kąty ψ i długości L , związane z promieniami wychodzącymi z punktów 0 i P .



Rys. 4

Wzór (4.7) wykazuje duże podobieństwo do wzoru, określającego nośność graniczną płyt, obciążonych siłą skupioną, mianowicie

$$(4.9) \quad \bar{P} = \bar{m} \sum_{j=1}^n (\operatorname{ctg} \psi_j^l + \operatorname{ctg} \psi_j^p),$$

gdzie \bar{P} oznacza obciążenie graniczne (łamiące), \bar{m} moment graniczny na jednostkę długości linii załomu. Gdyby płyta wykazywała niejednorodność tego typu, że moment \bar{m} dla każdej linii załomu był odwrotnie proporcjonalny do długości tej linii, to analogia byłaby zupełna [oczywiście słuszna tylko w tym zakresie, w którym słuszny jest wzór (4.9); w przypadku gdy kąty $\psi_j^l + \psi_j^p$ są kątami ostrymi, możliwy jest również inny schemat zniszczenia płyty, natomiast wzór (4.7) jest ogólnie słuszny przy założonym równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa p]. Trudno jednak przypuszczać, by płyty tego typu miały jakieś znaczenie praktyczne. Oznaczałoby to niezależność całkowitego momentu łamiącego dla danej krawędzi od jej długości. W każdym razie problem poszukiwania minimum wyężenia (przy $p \equiv 1$) jest problemem zbliżonym do poszukiwania najniekorzystniejszego położenia siły skupionej z uwagi na nośność graniczną płyty wielokątnej.

Wzór (4.8) umożliwia bardzo proste i szybkie obliczanie wyężenia w na drodze wykreślno-analitycznej przez pomiar kątów ψ_j i długości L_j .

5. Krzywa graniczna o kształcie elipsy

W przypadku dwuwymiarowej przestrzeni czynników wyężenia krzywa graniczna posiada bardzo często kształt elipsy. Z elipsą mamy do czynienia nie tylko w przypadku hipotezy wyężeniowej Hubera-Misesa-Hencky'ego (przekrój walca płaszczyną $\sigma_3 = \text{const}$), lecz również w przypadku hipotezy ogólniejszej, proponowanej w r. 1928 przez W. BURZYŃSKIEGO, [4], a proponowanej później niezależnie przez G. D. SANDELA i P. P. BAŁANDINA (por. [16]). Ostatnio posługiwali się tą hipotezą C. TORRE, [15], i G. A. GENIEW, [7]. W trójwymiarowej przestrzeni naprężeń Haigha-Westergaarda odpowiada jej paraboloida obrotowa, a przecięcie tej paraboloidy płaszczyną $\sigma_3 = 0$ daje elipsę o równaniu

$$(5.1) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + (K_c - K_r)(\sigma_1 + \sigma_2) - K_c K_r = 0.$$

W równaniu tym K_r i K_c oznaczają w sposób ogólny naprężenia niebezpieczne kolejno przy jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu. W przypadku $K_c = K_r$ równanie (5.1) daje przekrój walca Hubera-Misesa-Hencky'ego. Obliczaniu wyężenia w przestrzeni trójwymiarowej w przypadku paraboloidy BURZYŃSKIEGO poświęcono rozdział pracy [16]; obecnie zajmiemy się przypadkiem płaskim, gdy krzywa graniczna posiada równanie (5.1). Jest to elipsa o środku leżącym na prostej $\sigma_1 = \sigma_2$, na ogół przesuniętym względem początku układu współrzędnych, o osiach obróconych o $\pi/4$ względem osi $\sigma_1 \sigma_2$.

Wprowadzimy najpierw współrzędne bezwymiarowe

$$(5.2) \quad \frac{\sigma_1}{K_r} = x, \quad \frac{\sigma_2}{K_r} = y$$

oraz dogodnie oznaczenie (3.18), pisząc krócej zamiast (5.1)

$$(5.3) \quad x^2 + y^2 - xy + (\kappa - 1)(x + y) - \kappa = 0.$$

Po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych (3.2) otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na promień r . Zapiszemy je w postaci

$$(5.4) \quad (1 - \sin \varphi \cos \varphi) r^2 + (a \sin \varphi + \beta \cos \varphi) r - \gamma = 0,$$

gdzie dla skrócenia oznaczono

$$(5.5) \quad \begin{cases} a = 2y - x + \kappa - 1, \\ \beta = 2x - y + \kappa - 1, \\ \gamma = \kappa - x^2 - y^2 + xy - (\kappa - 1)(x + y). \end{cases}$$

Wyteżenie w określimy wzorem ogólnym (3.6), w którym $J(P)$ wyraża się wzorem (3.7). Z uwagi na występującą w tym wzorze wielkość $1/r_p$ rozwiążemy równanie (5.4) ze względu na tę niewiadomą:

$$(5.6) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_p} = \frac{1}{2\gamma} [-a \sin \varphi - \beta \cos \varphi + \sqrt{(a \sin \varphi + \beta \cos \varphi)^2 + 4\gamma(1 - \sin \varphi \cos \varphi)}],$$

zatem

$$(5.7) \quad J(P) = \frac{1}{2\gamma} \int_0^{2\pi} [-a \sin \varphi - \beta \cos \varphi + \sqrt{(a \sin \varphi + \beta \cos \varphi)^2 + 4\gamma(1 - \sin \varphi \cos \varphi)}] p(\varphi) d\varphi.$$

Przyjmijmy, że gęstość prawdopodobieństwa «ruchu» punktu P w poszczególnych kierunkach jest stała w pewnym przedziale zmienności φ , a równa zero dla pozostałych φ :

$$(5.8) \quad \begin{cases} p(\varphi) \equiv 1, & \text{jeśli } \varphi_1 < \varphi < \varphi_2; \\ p(\varphi) \equiv 0, & \text{jeśli } 0 < \varphi < \varphi_1 \text{ i } \varphi_2 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Takie przyjęcie pozwala dość dobrze aproksymować dowolny występujący w praktyce rozkład gęstości p . Pewną analizę wpływu założonej funkcji p na uzyskiwane wyniki zawiera praca [16]. Przyjmując $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ otrzymujemy równomierny rozkład

gęstości p jako przypadek szczególny. Jak wiadomo, normalizacja funkcji p nie jest potrzebna. Przy założeniu (5.8) otrzymujemy

$$(5.9) \quad J(P) = \frac{1}{2\gamma} \left[\alpha(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) - \beta(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)^2 + 4\gamma(1 - \sin \varphi \cos \varphi)} d\varphi \right].$$

Występująca w tym wzorze całka jest całką eliptyczną. Sprowadzimy ją do postaci normalnej w sposób całkiem ogólny, bowiem całka tego typu wystąpi również w następnym rozdziale. Wyrażenie podcałkowe można zapisać w postaci

$$(5.10) \quad f(\varphi) = a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi + c \sin \varphi \cos \varphi,$$

gdzie

$$(5.11) \quad a = \alpha^2 + 4\gamma, \quad b = \beta^2 + 4\gamma, \quad c = 2\alpha\beta - 4\gamma.$$

Dobierzemy kąt ψ tak, by

$$(5.12) \quad f(\varphi) = A \cos^2(\varphi + \psi) + B.$$

Stosując wzór na cosinus sumy argumentów i przedstawiając jedność jako sumę kwadratów sinusa i cosinusa uzyskujemy układ trzech równań ze względu na A, B i ψ :

$$(5.13) \quad \begin{cases} A \sin^2 \psi + B = a, \\ A \cos^2 \psi + B = b, \\ -A \sin 2\psi = c. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest

$$(5.14) \quad \begin{cases} A = \sqrt{(b-a)^2 + c^2}, \\ B = \frac{1}{2} [a+b - \sqrt{(b-a)^2 + c^2}], \\ \psi = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{b-a}. \end{cases}$$

Rozwiązanie to jest niejednoznaczne ze względu na wieloznaczność funkcji arcus tangens. Kąt 2ψ należy jednak dobrać tak, by spełnione było trzecie z równań (5.13) przy dodatnim A : jeżeli $c < 0$, to 2ψ musi być dobrane z ćwiartki I lub II, jeżeli $c > 0$, to 2ψ należy dobrać z ćwiartki III lub IV. Ponieważ z kolei różnica $b - a$ może być dodatnia lub ujemna, więc analiza staje się nieco bardziej skomplikowana. Wyniki tej analizy podaje rysunek 5, na którym zaznaczono ćwiartki, z jakich należy dobrać kąt 2ψ . Granice między poszczególnymi obszarami wyznaczone są przez równania $c = 0$ (wtedy $\psi = 0$) oraz $b - a = 0$ (wtedy $\psi = \pm\pi/4$).

Warunek $c = 0$ daje w naszym przypadku [po dokonaniu podstawień (5.11) i (5.5)]

$$(5.15) \quad (2y - x + \kappa - 1)(2x - y + \kappa - 1) - 2[\kappa - x^2 - y^2 + xy - (\kappa - 1)(x + y)] = 0.$$

Wykonanie działań prowadzi do równania hiperboli

$$(5.16) \quad 3xy + 3(\kappa - 1)(x + y) + (\kappa^2 - 4\kappa + 1) = 0.$$

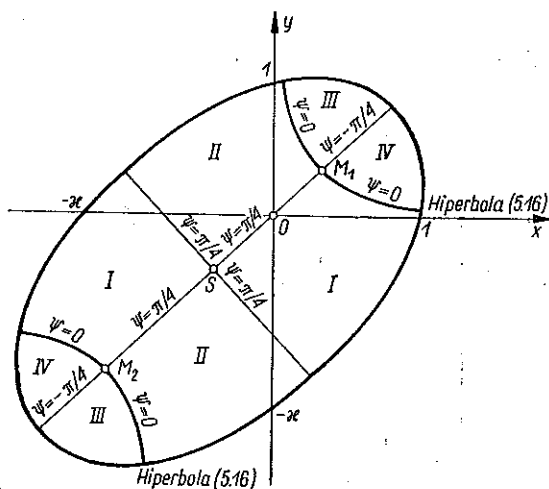
Warunek $b - a = 0$ daje

$$(5.17) \quad y = x \quad \text{albo} \quad x + y + 2(\kappa - 1) = 0;$$

są to równania osi elipsy. Oś dłuższa $y = x$ przecina się z hiperbolą (5.16) w punktach o współrzędnych

$$(5.18) \quad x = y = -(\kappa - 1) \pm \sqrt{\frac{2}{3}(\kappa^2 - \kappa + 1)}.$$

Są to, jak łatwo sprawdzić, ogniska elipsy, oznaczone na rys. 5 przez M_1 i M_2 . W punktach tych wartość ψ pozostaje nieokreślona (symbol nieoznaczony). Nie posiada ona jednak żadnego wpływu na wynik, ponieważ wtedy (i tylko wtedy) $A = 0$ wobec jednoczesnego spełniania się warunków $b - a = 0$ i $c = 0$; zatem $f(\varphi) = B$ i kąt ψ znika w wyrażeniu podcałkowym. Tak więc kwestia doboru kąta ψ jest całkowicie wyjaśniona.



Rys. 5

Wróćmy do całki (5.9). Po dokonaniu przekształcenia

$$(5.19) \quad B + A \cos^2(\varphi + \psi) = (A + B) \left[1 - \frac{A}{A + B} \sin^2(\varphi + \psi) \right]$$

i wprowadzeniu nowej zmiennej całkowania $\xi = \varphi + \psi$ zawartej w przedziale $\varphi_1 + \psi \leq \xi \leq \varphi_2 + \psi$ otrzymujemy ostatecznie

$$(5.20) \quad J(P) = \frac{1}{2\gamma} \left\{ a(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) - \beta(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) + \sqrt{A + B} \left[E\left(\varphi_2 + \psi, \frac{A}{A + B}\right) - E\left(\varphi_1 + \psi, \frac{A}{A + B}\right) \right] \right\},$$

gdzie symbol $E(\varphi, k^2)$ oznacza niepełną całkę eliptyczną drugiego rodzaju. W obecnej pracy dogodniej będzie wszystkie całki eliptyczne traktować jako funkcje kwadratu modułu k^2 , a nie samego modułu k , jak przyjmowano np. w pracy [16]; zamiast tablic $E(k)$ (np. niedawno wydanych tablic C. E. FRÖBERGA, [6], dokładniejszych od cytowanych w pracy [16] tablic A. FLETCHERA) będziemy korzystać z tablic $E(k^2)$ (np. K. HAYASHI'EGO, [8]). W naszym przypadku, po dokonaniu podstawień (5.14) i (5.11),

$$(5.21) \quad k^2 = \frac{2\sqrt{(a^2 - \beta^2)^2 + (2a\beta - 4\gamma)^2}}{a^2 + \beta^2 + 8\gamma + \sqrt{(a^2 - \beta^2)^2 + (2a\beta - 4\gamma)^2}}.$$

Można wykazać, że zawsze zachodzi tu $0 \leq k^2 < 1$ i stosowanie żadnej dodatkowej transformacji nie jest potrzebne.

Dla zastosowania wzoru (3.6) musimy jeszcze obliczyć $J(0)$, podstawiając do (5.5) $x = y = 0$. Mamy wtedy

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \beta = \kappa - 1, \quad \gamma = \kappa, \\ A = 2|\kappa^2 - 4\kappa + 1| = \begin{cases} -2(\kappa^2 - 4\kappa + 1), & \text{jeśli } \kappa \leq 2 + \sqrt{3} \approx 3,732; \\ 2(\kappa^2 - 4\kappa + 1), & \text{jeśli } \kappa \geq 2 + \sqrt{3} \approx 3,732; \end{cases} \\ A + B = \frac{1}{2}(2\kappa^2 + 4\kappa + 2 + \\ \quad + 2|\kappa^2 - 4\kappa + 1|) = \begin{cases} 6\kappa, & \text{jeśli } \kappa \leq 2 + \sqrt{3}; \\ 2(\kappa^2 - \kappa + 1), & \text{jeśli } \kappa \geq 2 + \sqrt{3}; \end{cases} \\ \psi = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{jeśli } \kappa < 2 + \sqrt{3}; \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{jeśli } \kappa > 2 + \sqrt{3} \end{cases} \end{array} \right.$$

oraz

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(0) = \left\{ \frac{1}{2\kappa}(\kappa - 1)(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) + \right. \\ \quad \left. + \sqrt{6\kappa} \left[E\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}, \frac{-\kappa^2 + 4\kappa - 1}{3\kappa}\right) - E\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}, \frac{-\kappa^2 + 4\kappa - 1}{3\kappa}\right) \right] \right\}, \\ \quad \text{jeśli } \kappa \leq 2 + \sqrt{3}; \\ J(0) = \frac{1}{2\kappa} \left\{ (\kappa - 1)(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) + \right. \\ \quad \left. + \sqrt{2(\kappa^2 - \kappa + 1)} \left[E\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}, \frac{\kappa^2 - 4\kappa + 1}{\kappa^2 - \kappa + 1}\right) - E\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{4}, \frac{\kappa^2 - 4\kappa + 1}{\kappa^2 - \kappa + 1}\right) \right] \right\}, \\ \quad \text{jeśli } \kappa \geq 2 + \sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Wzory te ulegają szczególnemu uproszczeniu w przypadku granicznym $\kappa = 2 + \sqrt{3} \approx 3,732$. Punkt 0 pokrywa się wtedy z ogniskiem elipsy M_1 . Przypadek ten posiada znaczenie praktyczne, bowiem zbliżoną wartość κ wykazuje np. wiele gatunków żeliwa. Wtedy $\kappa^2 - 4\kappa + 1 = 0$, $E(\varphi, 0) = \varphi$ i ostatecznie

$$(5.24) \quad J(0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})} [\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 + 3(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Przejdziemy do przypadku równomiernej gęstości prawdopodobieństwa p «ruchu» punktu P w poszczególnych kierunkach płaszczyzny czynników wyteżenia. Przyjmując $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, otrzymujemy

$$(5.25) \quad E\left(2\pi + \psi, \frac{A}{A+B}\right) - E\left(\psi, \frac{A}{A+B}\right) = 4E\left(\frac{A}{A+B}\right),$$

a wzory (5.20) i (5.23) uproszczą się do postaci

$$(5.26) \quad J(P) = \frac{2\sqrt{A+B}}{\gamma} \mathbf{E}\left(\frac{A}{A+B}\right) = \\ = \frac{\sqrt{2[\alpha^2 + \beta^2 + 8\gamma + \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta - 4\gamma)^2}]}{\gamma} \times \\ \times \mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta - 4\gamma)^2}}{\alpha^2 + \beta^2 + 8\gamma + \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta - 4\gamma)^2}}\right),$$

$$(5.27) \quad J(0) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\kappa}} \mathbf{E}\left(\frac{-\kappa^2 + 4\kappa - 1}{3\kappa}\right), & \text{jeśli } \kappa \leq 2 + \sqrt{3}; \\ \frac{2\sqrt{2(\kappa^2 - \kappa + 1)}}{\kappa} \mathbf{E}\left(\frac{\kappa^2 - 4\kappa + 1}{\kappa^2 - \kappa + 1}\right), & \text{jeśli } \kappa \geq 2 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Wzory te ulegają dalszemu uproszczeniu w przypadku, gdy punkt P leży na dłuższej osi elipsy, $y = x$. Wtedy

$$(5.28) \quad A = 2|3x^2 + 6(\kappa - 1)x + (\kappa^2 - 4\kappa + 1)|$$

(przy czym wyrażenie wewnątrz znaku wartości bezwzględnej jest ujemne pomiędzy ogniskami elipsy, których współrzędne określają wzory (5.18), a dodatnie na zewnątrz ognisk),

$$(5.29) \quad A+B = \begin{cases} -6x^2 - 12(\kappa - 1)x + 6\kappa & \text{wewnątrz ognisk,} \\ 2\kappa^2 - 2\kappa + 2 & \text{na zewnątrz ognisk.} \end{cases}$$

Gdy np. $\kappa = 1$ (hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego), to otrzymujemy ostatecznie

$$(5.30) \left\{ \begin{array}{l} w = 1 - \frac{\sqrt{1-x^2} E\left(\frac{2}{3}\right)}{E\left(\frac{2-3x^2}{3-3x^2}\right)}, \quad \text{jeśli} \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}; \\ w = 1 - \frac{\sqrt{3}(1-x^2) E\left(\frac{2}{3}\right)}{E(3x^2-2)}, \quad \text{jeśli} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Wyężenie minimalne (przy założonym równomiernym rozkładzie gęstości p) wystąpi oczywiście w środku elipsy, czyli punkcie o współrzędnych $x = y = -(\kappa - 1)$ (średnia arytmetyczna współrzędnych ognisk). Mamy tu $A = 4(\kappa^2 - \kappa + 1)$, $A + B = 6(\kappa^2 - \kappa + 1)$,

$$(5.31) \left\{ \begin{array}{l} w_{min} = 1 - \frac{\sqrt{\kappa^2 - \kappa + 1} E\left(\frac{-\kappa^2 + 4\kappa - 1}{3\kappa}\right)}{\sqrt{\kappa} E\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad \text{jeśli} \quad \kappa \leq 2 + \sqrt{3}; \\ w_{min} = 1 - \frac{(\kappa^2 - \kappa + 1) E\left(\frac{\kappa^2 - 4\kappa + 1}{\kappa^2 - \kappa + 1}\right)}{\kappa\sqrt{3} E\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad \text{jeśli} \quad \kappa \geq 2 + \sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Wartości funkcji $w_{min} = w_{min}(\kappa)$ dla analizowanej «hipotezy paraboloidalnej» zestawione są w tablicy 3. Wartości te są co do modułu większe, niż w przypadku modyfikowanej hipotezy Galileusza (tablica 2), bowiem «hipoteza paraboloidalna» przewiduje większą wytrzymałość na dwukierunkowe równomierne ściskanie od tamtej hipotezy.

Tablica 3. Wyężenie minimalne w przypadku płaskim «hipotezy paraboloidalnej» Burzyńskiego

κ	w_{min}
1	0
2	-0,3116
3	-0,7920
4	-1,2914
5	-1,7913
6	-2,2881
7	-2,7816

6. Krzywa graniczna o kształcie paraboli

Weźmy pod uwagę przypadek jednoosiowego stanu naprężenia przy jednoczesnej możliwości poważnych zmian temperatury. Osiągnięcie stanu niebezpiecznego jest wtedy możliwe przez zmianę naprężenia lub temperatury i należy rozważać dwuwymiarową przestrzeń czynników wyężenia $\sigma - t$. Jako początek układu współrzędnych przyjmijmy punkt $\sigma = t = 0$, choć

przyjęcie $t = 15^\circ\text{C}$ mogłoby być tu bardziej uzasadnione — różnice między tymi wariantami są jednak z reguły pomijalne.

Stan niebezpieczny jest tu określony funkcją $t = t(\sigma)$. Postać tej funkcji zależy od rodzaju materiału i od przyjętego stanu niebezpiecznego (uplastycznienie, wytrzymałość). Weźmy pod uwagę granicę plastyczności Q ; dla wielu metali równanie krzywej granicznej można przybliżyć przez równanie paraboli

$$(6.1) \quad t = t_t \left[1 - \left(\frac{\sigma}{Q_0} \right)^2 \right],$$

gdzie t_t jest temperaturą topnienia lub temperaturą przemiany alotropowej (przy $\sigma = 0$), Q_0 granicą plastyczności przy $t = 0$ (rys. 6). Oczywiście równanie (6.1) może odnosić się tylko do materiałów, wykazujących jednakowe własności przy rozciąganiu i ściskaniu. Wprowadzając jak zwykle bezwymiarowe współrzędne biegunowe przy pomocy wzorów

$$(6.2) \quad \begin{cases} t = t_t (y_p + r \sin \varphi), \\ \sigma = Q_0 (x_p + r \cos \varphi) \end{cases}$$

i pomijając wskaźniki P określimy bezwymiarową odległość dowolnego punktu P od krzywej granicznej równaniem

$$(6.3) \quad y + r \sin \varphi = 1 - (x + r \cos \varphi)^2.$$

Równanie samej krzywej granicznej ma tu oczywiście postać

$$(6.4) \quad y = 1 - x^2$$

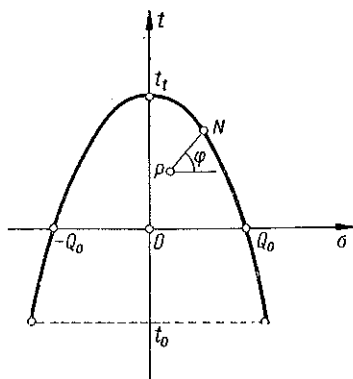
i posiada znaczenie ogólniejsze; do takiej samej krzywej granicznej sprowadza się na przykład również analiza «hipotezy paraboloidalnej» Burzyńskiego w przypadku, gdy wielkościami niezależnymi są nie poszczególne naprężenia główne, ale naprężenia średnie (hydrostatyczne) i intensywność naprężeń (otrzymujemy wtedy osiowy przekrój paraboloidy przy ustalonym niezmienniku kątowym ω , por. [17]).

Aby zastosować wzory (3.6) i (3.7) napiszemy równanie (6.3) w postaci

$$(6.5) \quad (1 - x^2 - y) \left(\frac{1}{r} \right)^2 - (\sin \varphi + 2x \cos \varphi) \frac{1}{r} - \cos^2 \varphi = 0$$

i rozwiążemy je ze względu na $1/r$:

$$(6.6) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_p} = \frac{1}{2(1 - x^2 - y)} \left[\sin \varphi + 2x \cos \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi + (4 - 4y) \cos^2 \varphi + 4x \sin \varphi \cos \varphi} \right].$$



Rys. 6

Dalszy tok obliczeń jest niemal identyczny z przedstawionym w p. 5 i przytoczymy go w skrócie. Przyjmijmy, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa p daje się przedstawić wzorami (5.8). Wtedy całkę $J(P)$ można zapisać w postaci

$$(6.7) \quad J(P) = \frac{1}{2(1-x^2-y)} \left[\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 + 2x(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi + c \sin \varphi \cos \varphi} d\varphi \right],$$

gdzie

$$(6.8) \quad a = 1, \quad b = 4 - 4y, \quad c = 4x.$$

Przy zastosowaniu tych oznaczeń całka występująca we wzorze (6.7) nie różni się od występującej we wzorze (5.9) i ostatecznie

$$(6.9) \quad J(P) = \frac{1}{2(1-x^2-y)} \left\{ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 + 2x(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) + \sqrt{A+B} \left[E\left(\varphi_2 + \psi, \frac{A}{A+B}\right) - E\left(\varphi_1 + \psi, \frac{A}{A+B}\right) \right] \right\},$$

gdzie A, B i ψ są określone wzorami ogólnymi (5.14), mianowicie w naszym przypadku

$$(6.10) \quad \begin{cases} A = \sqrt{(3-4y)^2 + 16x^2}, \\ B = \frac{1}{2} [5 - 4y - \sqrt{(3-4y)^2 + 16x^2}], \\ \psi = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4x}{3-4y}. \end{cases}$$

Kwestię właściwego doboru kąta ψ rozwiązuje rys. 7, analogiczny do rys. 5; określa on ćwiartki, z których należy dobierać kąt 2ψ . Jeżeli argument całki eliptycznej leży poza pierwszą ćwiartką, to należy stosować wzory redukcyjne typu

$$(6.11) \quad E(\varphi, k^2) = 2E(k^2) - E(\pi - \varphi, k^2).$$

Poszczególne strefy doboru kąta 2ψ oddzielone są prostymi $x=0$ i $y=3/4$, przecinającymi się w ognisku paraboli M .

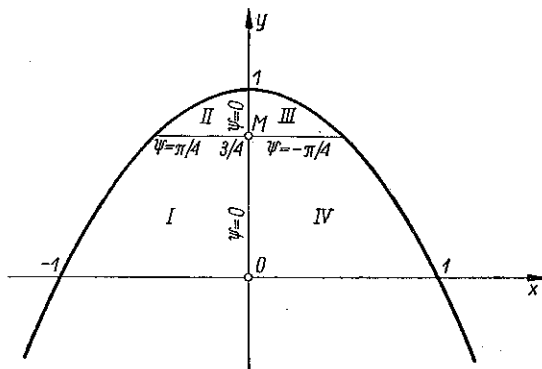
W punkcie 0 mamy $A=3$, $B=1$, $\psi=0$, zatem

$$(6.12) \quad J(0) = \frac{1}{2} \left\{ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 + 2 \left[E\left(\varphi_2, \frac{3}{4}\right) - E\left(\varphi_1, \frac{3}{4}\right) \right] \right\}.$$

Podstawienie (6.9) i (6.12) do (3.6) pozwala obliczyć wytyżenie w w przypadku ogólnym.

Przejdziemy do przypadków szczególnych doboru kątów φ_1 i φ_2 . Jeżeli $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, to otrzymamy równomierny rozkład gęstości prawdopodobieństwa we wszystkich kierunkach. W omawianym na początku rozdziału przypadku, gdy na osiach odcinamy naprężenie σ i temperaturę t , rozkład taki jest wykluczony. Istotnie, prawdopodobieństwo uzyskania temperatury absolutnego zera jest równe zeru, i jeżeli temperaturę tę oznaczmy przez t_0 ($t_0 < 0$), a ponadto wprowadzimy oznaczenie $t_0/t = y_0$, to dla kątów φ z trzeciej i czwartej ćwiartki, zawartych conajmniej w przedziale

$$(6.13) \quad \arctg \frac{y - y_0}{x + \sqrt{1 - y_0}} \leq \\ \leq \varphi \leq \arctg \frac{y - y_0}{x - \sqrt{1 - y_0}}$$



Rys. 7

należy przyjąć $p \equiv 0$. Tym niemniej rozpatrzymy ten najprostszy przypadek z uwagi na możliwość innych zastosowań i dla przeprowadzenia porównań. Należy zastosować wtedy (5.25) oraz

$$(6.14) \quad w = 1 - \frac{2 \mathbf{E} \left(\frac{3}{4} \right) (1 - x^2 - y)}{\sqrt{A + B} \mathbf{E} \left(\frac{A}{A + B} \right)}$$

Wartości funkcji (6.14) zestawione są w tabelicy 4. Ograniczono się tu do dodatnich wartości x , ponieważ jest to parzysta funkcja tej zmiennej (ze względu na parzystość równania (6.4) i symetrię rozkładu gęstości prawdopodobieństwa). Linie równych wytyżeń w podaje rys. 8.

Przyjęcie $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ odpowiada przewidywaniu osiągnięcia stanu niebezpiecznego przez zmianę naprężenia w dowolnym kierunku i wzrost temperatury

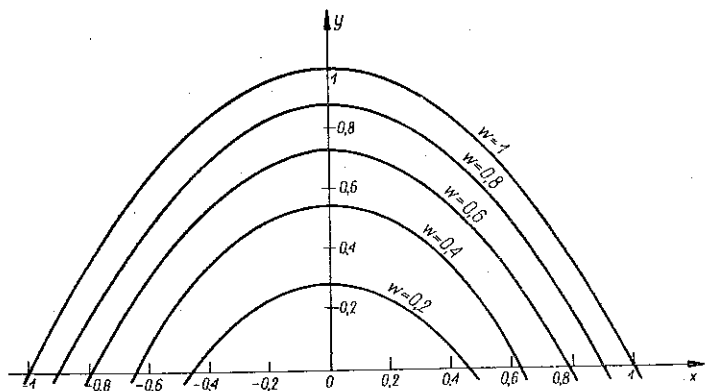
Tablica 4. Wartości wytyżenia w w przypadku $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$

$y \setminus x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0,0000	0,0381	0,1530	0,3471	0,6256	1,0000
0,2	0,1328	0,1739	0,2984	0,5098	0,8164	—
0,4	0,2825	0,3277	0,4651	0,7008	—	—
0,6	0,4572	0,5084	0,6652	0,9412	—	—
0,8	0,6747	0,7363	0,9304	—	—	—
1,0	1,0000	—	—	—	—	—

Po podstawieniu tych wartości do (6.9) i (6.12) otrzymujemy

$$(6.15) \quad w = 1 - \frac{\left[1 + 2E\left(\frac{3}{4}\right)\right](1 - x^2 - y)}{1 + \sqrt{A+B}E\left(\frac{A}{A+B}\right)}$$

Wartości funkcji (6.15) zestawiono w tabelcy 5, a linie równych wytyżeń w na rys. 9.



Rys. 8

Przyjęcie $\varphi_1 = 0$ oraz $\varphi_2 = \pi/2$ odpowiada przewidywaniu osiągnięcia stanu niebezpiecznego tylko przez algebraiczny wzrost naprężenia i temperatury. Otrzymujemy wtedy

$$(6.16) \quad w = 1 - \frac{\left[1 + 2E\left(\frac{3}{4}\right)\right](1 - x^2 - y)}{1 + 2x + \sqrt{A+B} \left[E\left(\frac{\pi}{2} + \psi, \frac{A}{A+B}\right) - E\left(\psi, \frac{A}{A+B}\right) \right]}$$

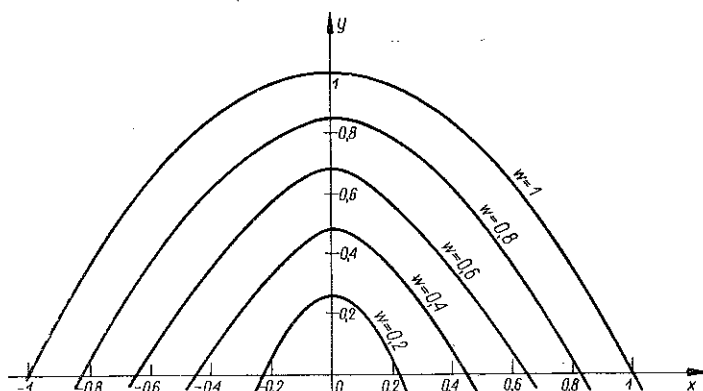
Tablica 5. Wartości wytyżenia w w przypadku $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$

$y \setminus x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0,0000	0,0386	0,1550	0,3509	0,6299	1,0000
0,2	0,1536	0,1944	0,3176	0,5256	0,8240	—
0,4	0,3213	0,3649	0,4968	0,7209	—	—
0,6	0,5085	0,5558	0,6999	0,9483	—	—
0,8	0,7250	0,7783	0,9428	—	—	—
1,0	1,0000	—	—	—	—	—

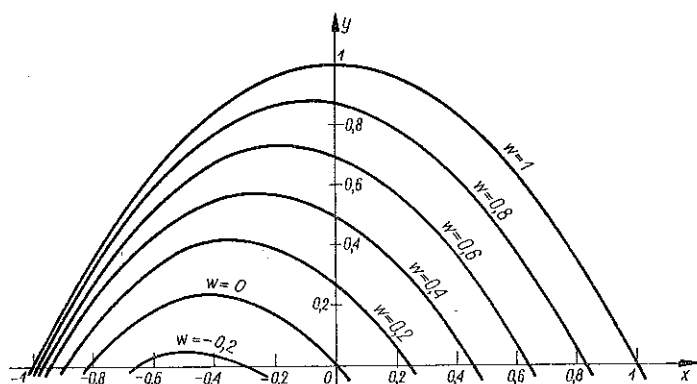
Wartości funkcji (6.16) zestawiono w tabelcy 6, a linie równych wytyżeń w na rys. 10. Tablica 6 obejmuje zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości x (naprężenia), ponieważ funkcja (6.16) nie jest już parzystą funkcją x z uwagi na brak symetrii rozkładu p .

Zajmiemy się jeszcze przypadkiem, który odpowiadałby «obciążeniu prostemu» w przestrzeni naprężeń. Przyjmiemy mianowicie

$$(6.17) \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \arctg \frac{y}{x},$$



Rys. 9



Rys. 10

co odpowiada prawdopodobieństwu punktowemu (funkcja Diraca) w kierunku wyznaczonym przez odcinek \overline{OP} . Odpowiednie wzory można uzyskać z (3.6), (6.9) i (6.12) przez przejście do granicy, jednak łatwiej wyprowadzić je bezpośrednio. Punkt przecięcia prostej OP z krzywą graniczną (6.4) oznaczmy, podobnie jak w pracy [16], przez N_0 . Współrzędne tego punktu x_N i y_N określimy z proporcji

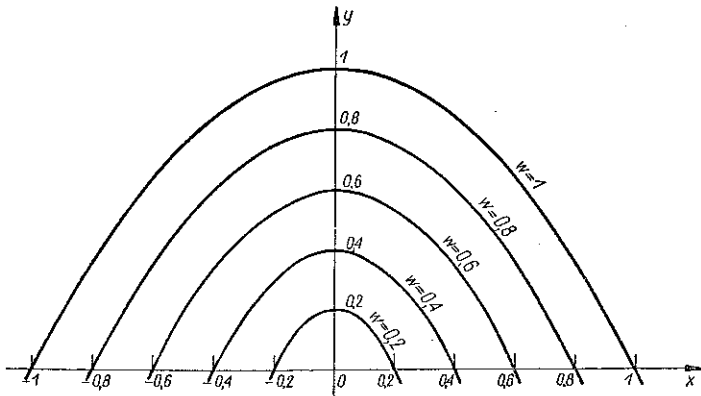
$$(6.18) \quad \frac{x}{x_N} = \frac{y}{y_N}$$

Tablica 6. Wartości w w przypadku $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2$

$y \setminus x$	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	1,0000	-0,0601	-0,2430	-0,2328	-0,1395	0,0000	0,1686	0,3572	0,5608	0,7758	1,0000
0,2	—	0,3807	0,0136	-0,0342	0,0312	0,1536	0,3106	0,4908	0,6877	0,8974	—
0,4	—	—	0,3386	0,1955	0,2222	0,3213	0,4634	0,6340	0,8231	—	—
0,6	—	—	0,8392	0,4780	0,4388	0,5085	0,6325	0,7894	0,9692	—	—
0,8	—	—	—	0,8784	0,7048	0,7250	0,8225	0,9626	—	—	—
1,0	—	—	—	—	—	1,0000	—	—	—	—	—

i równania (6.4); ostatecznie

$$(6.19) \quad \begin{cases} x_N = \frac{2x}{y + \sqrt{y^2 + 4x^2}}, \\ y_N = \frac{2y}{y + \sqrt{y^2 + 4x^2}}. \end{cases}$$



Rys. 11

Odległości \overline{OP} i $\overline{ON_0}$ wynoszą

$$(6.20) \quad \begin{cases} \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \overline{ON_0} = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{y + \sqrt{y^2 + 4x^2}}, \end{cases}$$

zatem

$$(6.21) \quad w = \frac{\overline{OP}}{\overline{ON_0}} = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4x^2}).$$

Wartości funkcji (6.22) zestawione są w tablicy 7, a linie równych wytyżeń w na rys. 11.

Wartości w zebrane w tablicy 7 są oczywiście największe z uwagi na ściśle określony «kierunek niebezpieczny». Nie odbiegają one jednak znacznie od wartości w tablicy 6 przy dodatnich x i y (przy ujemnych x różnice są bardzo istotne). Rozszerzenie zakresu kątów φ zmniejsza oczywiście wyężenie i wartości w tablicy 4 są najmniejsze, choć różnice w stosunku do tablicy 5 nie są wielkie.

Tablica 7. Wartości w w przypadku $\varphi = \varphi_2 = \arctg y/x$

$y \setminus x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0,0000	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000
0,2	0,2000	0,3236	0,5123	0,7083	0,9062	—
0,4	0,4000	0,4828	0,6472	0,8325	—	—
0,6	0,6000	0,6606	0,8000	0,9708	—	—
0,8	0,8000	0,8472	0,9657	—	—	—
1,0	1,0000	—	—	—	—	—

7. Uwagi końcowe

W przytoczonych przykładach określono wyężenie w za pomocą funkcji elementarnych lub znanych funkcji nieelementarnych. Wyprowadzone wzory dadzą się również, z niewielkimi zmianami, stosować do ogólniejszego, «wieloschodkowego» rozkładu gęstości prawdopodobieństwa p (różne, ale ustalone wartości p w przedziałach $\varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}$). Przypadki te należy jednak uznać za dość szczególne i przy innych kształtach krzywej granicznej (powierzchni granicznej), lub innym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa p , a zwłaszcza przy większej ilości wymiarów przestrzeni czynników wyężenia, zajdzie z reguły konieczność korzystania z omówionych na początku pracy przybliżonych metod całkowania. Tym niemniej znajomość możliwie dużej liczby rozwiązań ścisłych stwarza podstawy analizy i orientuje co do dokładności rozwiązań przybliżonych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] J. ALBRECHT, L. COLLATZ, *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale*, Z. angew. Math. Mech. 1/2, 38 (1958), 1-15.
- [2] E. F. BECKENBACH (Editor), *Modern Mathematics for the Engineer*, McGraw-Hill, New York 1956.
- [3] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, т. I, Физматгиз, Москва 1959.
- [4] W. BURZYŃSKI, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1928.
- [5] P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
- [6] C. E. FRÖBERG, *Complete Elliptic Integrals*, CWK Gleerup, Lund Univ. 1957.
- [7] Г. А. Гениев, *К вопросу об условиях прочности бетона*, Иссл. по вопросам пластичности и прочности строит. конструкций, ЦНИИСК, Москва 1958.
- [8] K. HAYASHI, *Fünfstellige Funktionentafeln*, Springer, Berlin 1930.
- [9] A. S. HOUSEHOLDER, *Principles of Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York 1953. Tłum. ros.: Izd. Inostr. Lit., Moskwa 1956.

- [10] Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*, Гостехиздат, Москва 1953.
- [11] R. MISES, *Numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale*, Z. angew. Math. Mech. 6, 34 (1954), 201-210.
- [12] W. OLSZAK, *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos., 2, 5 (1953), 329-350.
- [13] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1951.
- [14] А. Р. Ржаницын, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Стройвоенмориздат, Москва 1949.
- [15] C. TORRE, *Grenzbedingungen für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle*, Öster. Ing.-Arch. 2, 4 (1950), 174-189.
- [16] M. ŻYCZKOWSKI, *Wytyżenie materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inżyn., 4, 8 (1960), 725-761.
- [17] M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wytyżenia*, Rozpr. Inżyn., 4, 9 (1961).

Резюме

ВЫЧИСЛЕНИЕ «НАТУГИ» МАТЕРИАЛА В ПОДКРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЯХ

Настоящая работа является продолжением работы [16], в которой предлагается некоторая общая мера «натуги» материала в подкритических состояниях (степени приближения физического состояния в данной точке тела к опасному). Эта мера, определенная формулами (1.2) и (1.3), зависит от распределения плотности вероятности p достижения граничной поверхности в отдельных направлениях. В случае простого напряжения (точечная вероятность) она становится идентичной «редуцированному напряжению» («эквивалентному»).

Приводятся примеры определения «натуги» w в случае двухмерного пространства факторов «натуги». Получаются замкнутые решения для предельной кривой, состоящей из отрезков прямых (рис. 2 и 3), кривой в форме эллипса (рис. 5) и, в форме параболы (рис. 7), при «ступенчатом» распределении плотности вероятности p . Это самые часто встречаемые случаи предельных кривых; в двух последних случаях, результаты выражаются при помощи эллиптических интегралов. Парабола может соответствовать одновременному действию напряжения и повышенной температуры. Приводится анализ влияния предположенной плотности p на получаемые результаты. Это влияние показано на табл. 4-7 и рисунках 8-11).

При других формах предельной кривой (предельной поверхности) или при другом распределении плотности вероятности p , а в особенности при большем количестве размеров пространства факторов натяжения, необходимо, как правило, использовать приближенные методы интегрирования. Обсуждение этих методов приводится кратко, в п. 2.

Summary

COMPUTATION OF THE «EXERTION» OF MATERIAL IN SUBCRITICAL STATES

This is a continuation of Ref. [16], where a general measure of the «exertion» of material in subcritical states is proposed (degree in which the physical state of the material approaches the dangerous state). This measure, expressed by the Eqs. (1.2) and (1.3), depends on the distribution of the density of probability p of reaching the limit surface in each particular direction. In the case

of the proportional loading process (the point probability) it becomes identical with the «reduced stress».

Some examples of computation of the exertion are given in the case of a two-dimensional space of exertion factors. Closed-form solutions are obtained in the case where the limit curve is composed of rectilinear segments (Figs. 2 and 3) or is an elliptic or parabolic curve (Figs. 5 and 7 respectively) with a step-like probability distribution. These are the most frequent cases of limit curves. In the latter two cases the results are expressed by means of elliptic integrals. A parabola may correspond to a simultaneous action of stress and temperature. The influence of the distribution of the probability density p assumed on the results obtained is analysed and illustrated by Tables 4-7 and Figs. 8-11.

With other forms of the limit curve (limit surface) or with other distributions of probability density p and, especially, with a higher number of dimensions of the space of exertion factors it will, as a rule, be necessary to use approximate integration methods. These methods are discussed briefly in Sec. 2.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 września 1961 r.