

ZYGMUNT WIŚNIEWSKI

MECHANIKA SPRĘŻONYCH I ZBROJONYCH
KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH
W UJĘCIU REOLOGICZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXV

TOM X · ZESZYT 1 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	33
2. Założenia	36
3. Naprężenia i odkształcenia ustroju	38
4. Niewiadome statycznie niewyznaczalne	39
5. Niewiadome statycznie niewyznaczalne dla nieodwracalnego stanu odkształcenia	43
6. Niewiadome statycznie niewyznaczalne w postaci funkcyjnej	46
7. Wzór rekurencyjny na niewiadome statycznie niewyznaczalne	50
8. Funkcje obciążeń	51
9. Szczególne przypadki ustrojów statycznie niewyznaczalnych	54

Wstęp

W niniejszej publikacji wykorzystamy wyniki prac [1] i [2] dla uzyskania ogólnych rozwiązań w postaci zamkniętej. Nie odnosi się to tylko do funkcji pełzania, gdyż jedynie w tym zagadnieniu ograniczymy się do założeń C. WHITNEYA, [3], i F. DISCHINGERA, [4] (pełzanie w sensie mechanicznym w pełni nieodwracalne).

Za najdalej dotychczas idące wymienić należy prace A. CHUDZIKIEWICZA, [5], Cz. EIMERA, [6], oraz R. WINDELSA, [7].

A. CHUDZIKIEWICZ podał efektywną metodę opartą na zastosowaniu szeregów potęgowych. Autor ten opracował metodę ścisłą (z wyjątkiem przedstawienia mechanizmu współdziałania) opartą na założeniach ogólnych, jeśli chodzi o zbrojenie. Zagadnienie funkcji pełzania i skurczu oraz obciążeń zewnętrznych oparł na założeniu Whitneya-Dischingera (afiniczność skurczu, stałość obciążeń). Rozwiązania dla pewnych przypadków szczególnych uzyskał w postaci zamkniętej.

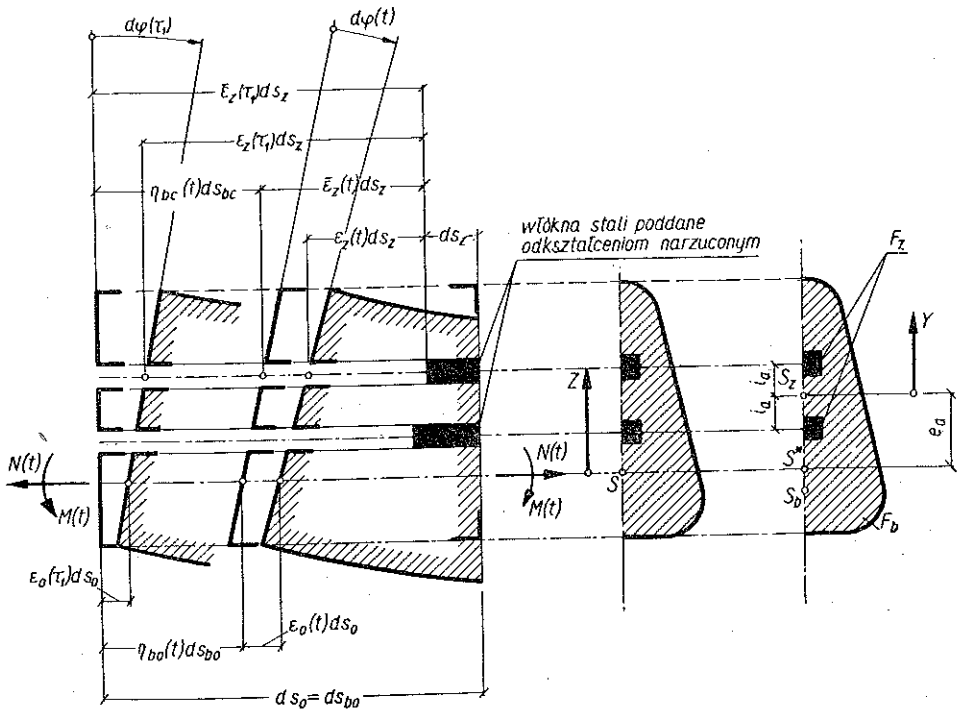
Cz. EIMER podał rozwiązania ścisłe (prócz mechanizmu współdziałania), ogólne, jeśli dotyczą one zbrojenia, funkcji pełzania i skurczu oraz obciążeń zewnętrznych; rozwiązania te są tylko formalne, nie zamknięte. Dla uzyskania efektywnych rozwiązań w dalszych pracach, [8], [9], ograniczył się autor do zastosowania funkcji pełzania dla przypadku czystego opóźnienia sprężystego lub dla założenia Whitneya-Dischingera, pominął dalsze wyrazy pewnych rozwinięć oraz wprowadził założenia upraszczające Busemanna, [10].

R. WINDELS podał dla ustrojów statycznie wyznaczalnych efektywne i zamknięte rozwiązania ścisłe (również z wyłączeniem mechanizmu współdziałania), ogólne co do zbrojenia. Zagadnienie funkcji pełzania i skurczu oraz obciążeń zewnętrznych oparł na założeniu Whitneya-Dischingera. Dla ustrojów statycznie niewyznaczalnych podał efektywne rozwiązania uproszczone (lecz nie zamknięte) wprowadzając założenia upraszczające Sattlera, [11].

Na wstępie podajemy założenia i wyniki wymienionych prac [1] oraz [2]. Prace te zawierają reologiczną teorię naprężeń i odkształceń elementu ds wyciętego z pryzmatycznego monosymetrycznego i płaskiego pręta zbrojonego i sprężonego (rys. 1) w założeniu, że element ds spełnia warunki płaskiego przekroju.

Przyjęto, że w zbrojeniu występują wyłącznie doraźne odkształcenia liniowo sprężyste, przy czym powstają odkształcenia narzucone $\bar{\epsilon}_z(t)$, dające wypadkową siłę $\mathfrak{R}(t)$ i moment $\mathfrak{M}(t)$. W betonie uwzględnia się odkształcenia doraźne i liniowo sprężyste. Przyjmuje się funkcje pełzania β i skurczu η_s zgodnie z C. WHITNEYEM, [3],

oraz F. DISCHINGEREM, [4], uwzględniając starzenie się materiału oraz ponadto skurcz nieafiniczny¹ przy pełzaniu. Odształcenie opóźnione η_{bc} włókna betonu c jest sumą skurczu i pełzania liniowego. Bierze się pod uwagę wpływ zmienności



Rys. 1

naprężeń lub odkształceń sprężystych betonu ε_{bc} w sposób mechanistyczno-fenomenologiczny, wzorowany na ogólnej teorii dziedziczenia V. Volterry-Boltzmann'a:

$$(1.1) \quad \beta(t, \tau) = P(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma \tau}),$$

$$(1.2) \quad \eta_s(t, \tau_1) = -S(e^{a\tau_1} - e^{-a t}),$$

$$(1.3) \quad \eta_{bc}(t) = \eta_s(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^t \varepsilon_{bc}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \beta(t, \tau) d\tau.$$

¹ Przez skurcz nieafiniczny rozumiemy tu i wszędzie dalej (zgodnie z F. DISCHINGEREM, [4]) skurcz szybszy od pełzania. Nieafiniczność uzyskujemy zakładając w (1.2), że $a > \gamma$; pomimo że w sensie matematycznym funkcje (1.1) oraz (1.2) są wtedy afiniczne, pozostajemy przy określeniu F. Dischingera, uzasadnionym historycznie.

W wyniku otrzymujemy następujące wzory na naprężenia i odkształcenia elementu ds (przy oznaczeniach pracy [2]):

$$(1.4) \quad \sigma_{bc}(t) = \frac{N(t) - \mathfrak{N}(t)}{F_b^*} + c \frac{M(t) - \mathfrak{M}(t)}{I_b^*},$$

$$(1.5) \quad \sigma_{zc}(t) = \bar{\sigma}_{zc}(t) + nr_{zc} \sigma_{bc}(t),$$

$$(1.6) \quad \bar{\sigma}_{zc}(t) = \sigma_{zc}(\tau_1) - \frac{\mathfrak{M}(\tau_1) - \mathfrak{M}(t) - e_a [\mathfrak{N}(\tau_1) - \mathfrak{N}(t)]}{J_z} y_{ac} r_{zc} - \frac{\mathfrak{N}(\tau_1) - \mathfrak{N}(t)}{f_z} r_{zc},$$

$$(1.7) \quad \mathfrak{N}(t) = \varphi_n \mathfrak{N}(\tau_1) + \frac{\varphi_m}{e_a} \mathfrak{M}(\tau_1) - k \int_{\tau_1}^t \left\{ \left[\varphi_N N(\tau) + \frac{\varphi_M}{e_a} M(\tau) \right] \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - E_b F_b^* \varphi_N \frac{\partial \eta_s}{\partial \tau} \right\} d\tau,$$

$$(1.8) \quad \mathfrak{M}(t) = e_a \varphi_n \mathfrak{N}(\tau_1) + \varphi_m \mathfrak{M}(\tau_1) - k \int_{\tau_1}^t \left\{ [e_a \varphi_N N(\tau) + \varphi_M M(\tau)] \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - E_b F_b^* e_a \varphi_N \frac{\partial \eta_s}{\partial \tau} \right\} d\tau,$$

$$(1.9) \quad \varepsilon_{bo}(t) = \frac{N(t) - \mathfrak{N}(t)}{E_b F_b^*},$$

$$(1.10) \quad \delta_o(t) = \eta_s(t) + \varepsilon_o(t) + \frac{N(t) - \mathfrak{N}(t)}{E_b F_b^*} + \frac{\mathfrak{N}(\tau_1) - \mathfrak{N}(t)}{E_z f_z},$$

$$(1.11) \quad \varphi'_b(t) = \frac{M(t) - \mathfrak{M}(t)}{E_b I_b^*},$$

$$(1.12) \quad \mu'(t) = \frac{\Delta_o(t)}{h} - \frac{M(t) - \mathfrak{M}(t)}{E_b I_b^*} + \frac{\mathfrak{M}(\tau_1) - \mathfrak{M}(t) - e_a [\mathfrak{N}(\tau_1) - \mathfrak{N}(t)]}{E_z J_z}.$$

We wzorach (1.4)-(1.12) przyjęto następujące oznaczenia: σ naprężenie rzeczywiste, $\bar{\sigma}$ naprężenie narzucone, ε odkształcenie sprężyste, δ odkształcenie całkowite, φ' oznacza krzywiznę sprężystą, μ' krzywiznę całkowitą, \mathfrak{N} oraz \mathfrak{M} odpowiednio wypadkową siłę i moment naprężeń narzuconych, N oraz M siłę normalną oraz moment od obciążeń. Wskaźniki oznaczają: b beton, z zbrojenie, o oś obojętną, c włókno w odległości $z = c$ od osi obojętnej. Ponadto ε_o oznacza odkształcenie osi elementu na skutek ogrzania, Δ_o różnicę odkształceń włókien skrajnych na skutek ogrzania, h wysokość przekroju, zaś E_b , E_z , $n = E_z/E_b$ — moduły sprężystości betonu, zbrojenia i współczynnik proporcjonalności tych modułów.

We wzorach (1.4) do (1.12) występują następujące współczynniki funkcyjne:

$$(1.13) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n = \frac{1-w_2}{w_1-w_2} e^{-w_1 k \beta} - \frac{1-w_1}{w_1-w_2} e^{-w_2 k \beta}, \quad \varphi_N = \varphi_n + \varphi_m, \\ \varphi_m = \frac{v_a}{w_1-w_2} (e^{-w_1 k \beta} - e^{-w_2 k \beta}), \quad \varphi_M = v_a \varphi_n + (v_o + v_a) \varphi_m, \\ \psi_n = \frac{1}{w_1-w_2} (e^{-w_1 k \beta} - e^{-w_2 k \beta}), \quad \psi_N = \psi_n + \psi_m, \\ \psi_m = \frac{w_1-1}{w_1-w_2} e^{-w_1 k \beta} - \frac{w_2-1}{w_1-w_2} e^{-w_2 k \beta}, \quad \psi_M = v_a \psi_n + (v_o + v_a) \psi_m. \end{array} \right.$$

Wartości liczbowe współczynników funkcyjnych φ_n , φ_m , ψ_n oraz ψ_m odczytać można z tablic podanych w pracy [2].

Występują też następujące wielkości geometryczne i statyczne, charakteryzujące przekrój elementu ds : F_z pole powierzchni pojedynczego włókna zbrojenia, F_b^* , I_b^* odpowiednio pole powierzchni i moment bezwładności przekroju zespolonego wstępnie odkształconego, F_b , I_b pole powierzchni i moment bezwładności betonu, r_{zc} współczynnik wstępnej długości włókien, f_z , J_z , r_z -krotne pole powierzchni i moment bezwładności zbrojenia, F_a i I_a zastępcze pole powierzchni i moment bezwładności zbrojenia, z i y_{ae} odległość włókien zbrojenia od środka F_b^* lub f_z , e_a odległość środka f_z od środka F_b^* , i_b^* promień bezwładności pola przekroju zespolonego, i_a promień bezwładności zastępczej powierzchni zbrojenia oraz

$$(1.14) \left\{ \begin{array}{l} F_b^* = F_b + F_a, \quad I_b^* = I_b + I_a, \quad i_b^* = \sqrt{\frac{I_b^*}{F_b^*}}, \quad i_a = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{f_z}}, \\ f_z = \sum r_{zc} F_{zc}, \quad J_z = \sum r_{zc} F_{zc} y_{zc}, \quad F_a = n f_z, \quad I_a = n J_z, \\ I_a = F_a e_a^2 + F_a i_a^2, \quad r_{zc} = \frac{ds_0}{ds}. \end{array} \right.$$

Wreszcie występują bezwymiarowe charakterystyki: powierzchni k , mimośrodowi zbrojenia v_a , sztywności zbrojenia v_o oraz pierwiastek równania charakterystycznego współdziałania $w_{1,2}$:

$$(1.15) \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{F_a}{F_b^*}, \quad v_a = \left(\frac{e_a}{i_b^*} \right)^2, \quad v_o = \left(\frac{i_a}{i_b^*} \right)^2, \\ w_{1,2} = \frac{1 + v_o + v_a \pm \sqrt{(1 + v_o + v_a)^2 - 4v_o}}{2}. \end{array} \right.$$

2. Założenia

Zakładamy, że opisaną w punkcie 1 teorię można zastosować do reomechaniki płaskich prętowych konstrukcji zbrojonych i sprężonych. Czynimy to z zastrzeżeniami; zastrzeżenia te wynikają z powodu ograniczonej zgodności założeń teorii [1] i [2] w zakresie materiałów i odkształceń elementu ds oraz rzeczywistej pracy

konstrukcji. Założenia dotyczące materiału ograniczają stosowanie teorii do konstrukcji z betonu, ceramiki, kamienia itp., ciał sprężonych i zbrojonych stalą, włóknem szklanym itp. cięgnami w stanie naprężeń dopuszczalnych, wykluczających zarysowanie i znaczniejsze nieliniowe uplastycznienie materiału. Uzasadnienie szczegółowe można znaleźć np. w pracach [1] i [12] powołujących się na doświadczenia.

Założenia dotyczące odkształceń ograniczają stosowanie teorii do przypadków, kiedy przekroje poszczególnych części konstrukcji spełniają trwale w czasie i dostatecznie dokładnie założenie płaskich przekrojów. Wynikają stąd, po pierwsze, warunki dotyczące kształtu i obciążeń: konstrukcja powinna składać się z części, które można oddzielnie traktować jako płaskie pręty obciążane tylko w swej płaszczyźnie głównej. Mogą to być płaskie belki, ramy, łuki, kratownice i układy złożone z tych elementów, statycznie wyznaczalne i niewyznaczalne. Mogą to być również ustroje przestrzenne, np. dźwigary powierzchniowe, o ile dadzą się rozłożyć na ustrój podstawowy, statycznie wyznaczalny, składający się wyłącznie z płaskich prętów, obciążanych w swej płaszczyźnie głównej, i których odkształcenia poprzeczne przekroju (w obu kierunkach) można pominąć. Do takich ustrojów można zaliczyć na ogół tarczownice i belki ściany, [13] i [14]. Mogą to wreszcie być ruszty, o ile skręcanie nie wywołuje w przekrojach ich prętów naprężeń normalnych lub też o ile takie naprężenia mogą być pominięte.

Po drugie, zakotwienia cięgien sprężających powinny powodować jedynie lokalne odstępstwa od zasady płaskich przekrojów; decydują tu rozmiary strefy zakotwień, które na ogół w kablobetonie i w strunobetonie są dostatecznie małe w stosunku do reszty konstrukcji.

Po trzecie, konstrukcja powinna być w stanie konsolidacji, tj. odkształcenia opóźnione każdego elementu ds zależec powinny wyłącznie od naprężeń tego elementu. Jeśli odkształcenia doraźne są zgodne z zasadą płaskich przekrojów, to odkształcenia opóźnione, liniowo proporcjonalne do doraźnych (założenie przyjęte w [1] i [2]), a także i całkowite, pozostają w konsekwencji zgodne z tą zasadą. Wystarcza więc przyczepność zapewniająca równe odkształcenia zbrojenia i otaczającego je materiału konstrukcji podczas całego okresu czasu pracy w stanie naprężeń dopuszczalnych; tego rodzaju przyczepność występuje nawet w skoncentrowanych kablach mostowych typu Leonhardta-Baura, [15].

Dodać trzeba, że o ile wymienione wyżej warunki są spełnione, to żadne dalsze okoliczności, a w szczególności technika sprężenia, nie przeszkadzają stosowaniu teorii [1] i [2] do konstrukcji sprężonych. Technika sprężenia oddziałuje na konstrukcję doraźnie. Z chwilą zakończenia zabiegu sprężenia i konsolidacji ustala się stan równowagi naprężeń w każdym z osobna przekroju konstrukcji identyczny ze stanem doraźnym opisanym w teorii [1] i [2] i to niezależnie od następujących czynników:

a) sposobu wprowadzenia siły sprężającej (za pomocą przyczepności lub zakotwień mechanicznych),

- b) metody sprężania (koncentrowania siły sprężającej w dużych kablach lub rozpraszania jej na poszczególne struny),
 c) sposobu zakrzywiania cięgien (punktowego lub ciągłego zakrzywienia i kontaktowania cięgien sprężających z ciałem sprężonym),
 d) doraźnych strat siły sprężającej.

3. Naprężenia i odkształcenia ustroju

Stosowanie teorii [1] i [2] wymaga przede wszystkim obliczenia dla rozpatrywanej konstrukcji sprężonej wstępnych naprężeń narzuconych $\bar{\sigma}_{zc}(\tau_1)$ oraz ich wypadkowych

$$(3.1) \quad \mathfrak{N}(\tau_1) = \sum_{c=1}^m \bar{\sigma}_{zc}(\tau_1) F_{zc}, \quad \mathfrak{M}(\tau_1) = \sum_{c=1}^m \bar{\sigma}_{zc}(\tau_1) F_{zc} z_c.$$

Dla ustrojów strunobetonowych wartości te można obliczyć na zasadzie równości wstępnych naprężeń narzuconych $\bar{\sigma}_{zc}(\tau_1)$ oraz naprężeń naciągu wstępnego strun na torze produkcyjnym.

Dla ustrojów kablobetonowych, dla których znamy lub zakładamy przy wymiarowaniu rzeczywiste naprężenia w chwili sprężenia $\sigma_{zc}(\tau_1)$ (z uwzględnieniem wszystkich strat doraźnych), należy obliczyć wstępne naprężenia narzucone z (1.5) dla czasu $\tau = \tau_1$:

$$(3.2) \quad \bar{\sigma}_{zc}(\tau_1) = \sigma_{zc}(\tau_1) - n r_{zc} \sigma_{bc}(\tau_1),$$

gdzie

$$\sigma_{zc}(\tau_1) = \frac{S_c \cos \alpha_c}{F_{zc}}, \quad \sigma_{bc}(\tau_1) = \frac{\sum_{c=1}^m S_c \cos \alpha_c + N}{F_b} + \frac{\sum_{c=1}^m S_c \cos \alpha_c z_c + M}{I_b} z_c.$$

Symbol S_c oznacza siłę sprężającą kabla (ukośną) z uwzględnieniem strat doraźnych, α_c kąt nachylenia siły S_c do osi obojętnej, F_b pole przekroju betonu z potrąceniem otworów, ale z włączeniem miękkiego zbrojenia nienapiętego $F_b + n \sum_{c=1}^m f_{zc}^m$,

I_b moment bezwładności betonu z potrąceniem otworów, ale z uwzględnieniem miękkiego zbrojenia $I_b + n \sum_{c=1}^m f_{zc}^m z_c^2$, f_{zc}^m przekrój miękkiego zbrojenia w warstwie z_c , zaś N i M odpowiednio siłę normalną i moment pochodzący od obciążeń działających na konstrukcję w chwili sprężenia.

Naprężenia normalne obliczamy dla dowolnej chwili $\tau_1 \leq \tau \leq t$ ze wzorów (1.4)-(1.8) (dokładnie tylko poza strefami zakotwienia). Dla szczególnych przypadków zmienności podano wyrażenia (1.7) i (1.8) w postaci już scałkowanej w pracy [2]. Naprężenia styczne wyprowadza się z normalnych tak, jak dla ustrojów niesprężonych metodą różniczkowania naprężeń normalnych i całkowania ich po obszarze odciętych płaszczyzną ścinania.

W urządzeniach kablobetonowych wzory (1.4)-(1.8) stanowią dla chwili $\tau = \tau_1$ kontrolę dla wzoru (3.2); właściwy użytek uzyskujemy z nich przy obliczaniu naprężeń z uwzględnieniem strat reologicznych dla $\tau = t > \tau_1$. Przesunięcia, ugięcia i kąty obrotu urządzenia dla dowolnej chwili obliczamy z (1.9)-(1.12) analogicznie do postępowania stosowanego dla konstrukcji niesprężonych; mogą być użyte metody Eulera, Mohra, sił wirtualnych itd. Na przykład całkowite przesunięcie $\delta_k(t)$ punktu k prętowego urządzenia statycznie wyznaczalnego, sprężonego i pozostającego pod dowolnym zmiennym obciążeniem, działaniem temperatury i skurczu betonu, może być wyliczone metodą sił wirtualnych:

$$(3.3) \quad \bar{I}\delta_k(t) = \int_s \bar{N}_k \delta_o(t) ds + \bar{M}_k \mu'(t) ds,$$

przy czym wartości $\delta_o(t)$ oraz $\mu'(t)$ bierze się z (1.10) i (1.12), zaś \bar{N}_k oraz \bar{M}_k są to wartości wywołane przez odpowiednie obciążenie wirtualne \bar{I} .

Te same wzory (1.4)-(1.12) mogą być wykorzystane dla obliczenia naprężeń i odkształceń urządzeń statycznie niewyznaczalnych, jeśli będziemy pamiętali, że

a) siły i momenty wewnętrzne N oraz M zależą od odkształceń całkowitych urządzenia;

b) odkształcenia całkowite urządzenia zależą od warunków montażu konstrukcji, od kolejności zakładania połączeń powodujących statyczną niewyznaczalność w stosunku do sprężania i obciążania.

Znalezienie odkształceń całkowitych urządzeń wymaga w tym przypadku uprzedniego wykorzystania zasady superpozycji i przyjęcia urządzenia podstawowego statycznie lub geometrycznie wyznaczalnego wraz z niewiadomymi wielkościami statycznymi lub geometrycznymi, które zastąpią urządzenie rzeczywiste. Zajmiemy się tym w następnym punkcie pracy.

4. Niewiadome statycznie niewyznaczalne

W niniejszej pracy decydujemy się na stosowanie analogii metody sił. Metodę deformacji można by zastosować transformując wzory na odkształcenia całkowite (1.10) i (1.12) na wzory sił i momentów przywęzłowych, wyrażonych jako funkcje zmieniających się w czasie kątów obrotu i przesunięć przekrojów przywęzłowych.

Rozpatrywać będziemy najogólniejszy układ o m niewiadomych wielkościach statycznych $X_1(t), \dots, X_l(t), \dots, X_m(t)$, dowolnie sprężony i dozbrowiony, ale spełniający założenia podane w p. 1 pracy. Uwzględnimy wszelkie możliwe obciążenia natury statycznej, termicznej i geometrycznej, wszystkie jako znane funkcje czasu. W myśl ogólnej zasady wypisujemy za pomocą (1.10) i (1.12) równania pracy sił wirtualnych na rzeczywistych odkształceniach, stosując się dla dowolnej chwili:

$$(4.1) \quad \int_s \bar{N}_k \delta_o(t) ds + \int_s \bar{M}_k \mu'(t) ds = \bar{L}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Oznaczamy przez $\bar{L}_k(t)$ pracę sił wirtualnych na znanych odkształceniach rzeczywistych podpór oraz przez \bar{N}_k oraz \bar{M}_k wartości wirtualnych sił normalnych i momentów zginających pochodzące od sił jednostkowych $X_k = \bar{1}$.

Zgodnie z zasadą superpozycji wyrażamy siłę i moment wewnętrzny w układzie rzeczywistym w sposób następujący:

$$(4.2) \quad N(t) = N_o(t) + \sum_{i=1}^m X_i(t) N_i, \quad M(t) = M_o(t) + \sum_{i=1}^m X_i(t) M_i,$$

przy czym oznaczamy siły normalne i momenty w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym w następujący sposób: wywołane przez obciążenia symbolami N_o oraz M_o , zaś wywołane przez siły jednostkowe $X_i = 1$ symbolami N_i oraz M_i . Funkcje (4.2) podstawiamy do (1.10) i (1.12), włączając przy tym wyrazy $\mathfrak{R}(t)$ oraz $\mathfrak{M}(t)$, gdyż te ostatnie w myśl (1.7) i (1.8) są funkcjami obciążeń.

Wykorzystując (4.1), (4.2), (1.10) i (1.12) otrzymujemy następujący podstawowy układ równań warunkowych dla $t = T$:

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^m X_i(T) \delta_{ki} - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \sum_{i=1}^m X_i(t) \delta_{ki} dt + \delta_{k_o}(T) - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{k_o}(t) dt + \delta_{k_s}(T) - \\ - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{k_s}(t) dt + \delta_{k_\theta}(T) + \delta_{k_\eta}(T) = L_k(T), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

We wzorze (4.3) oznaczono funkcję pełzania przez β , zaś uogólnione przesunięcia przekroju k w układzie podstawowym pochodzące od niewiadomych $X_i = 1$ przez δ_{ki} , przesunięcia pochodzące od obciążenia statycznego przez δ_{k_o} , od wypadkowych naprężeń narzuconych przez δ_{k_s} , od temperatury przez δ_{k_θ} , od skurczu betonu przez δ_{k_η} oraz od ruchu podpór przez L_k .

Mamy więc

$$(4.4) \quad \beta = \beta(T, t) = P(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T}),$$

$$(4.5) \quad \delta_{ki} = \int_s \left[\frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} - \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} \right] ds,$$

$$(4.6) \quad \delta_{k_o}(t) = \int_s \left[\frac{N_k N_o(t)}{E_b F_b^*} - \frac{M_k M_o(t)}{E_b I_b^*} \right] ds,$$

$$(4.7) \quad \delta_{k_s}(t) = \int_s \left[\frac{N_k \mathfrak{R}(t)}{E_b F_b^*} - \frac{M_k \mathfrak{M}(t)}{E_b I_b^*} \right] ds,$$

$$(4.8) \quad \delta_{k_\theta}(T) = \int_s \left[N_k \varepsilon_\theta(T) - M_k \frac{\Delta_\theta(T)}{h} \right] ds,$$

$$(4.9) \quad \delta_{k_\eta}(T) = \int_s N_k \eta_s(T, \tau_1) ds = \eta_s(T, \tau_1) \int_s N_k ds.$$

Trudności bezpośredniego rozwiązania (4.3) omijamy w sposób następujący: rozważamy odciążenie rzeczywistego układu statycznego w chwili $t = T$; przyjmujemy, że na układ nie działa obciążenie, nie ma zmian temperatury, nie ma przesunięć podpór oraz sprężenia. Spełniony jest przeto następujący układ równań stanu odciążenia:

$$(4.10) \quad \sum_{i=1}^m H_i(T) \delta_{ki} - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \sum_{i=1}^m X_i(t) \delta_{ki} dt - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{ko}(t) dt - \\ - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{ks}(t) dt + \delta_{k\eta}(T) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

w którym $H_k(t)$ oznacza ten składnik niewiadomej $X_k(t)$, któremu odpowiadają trwałe odkształcenia opóźnione w chwili t . Przez $R_k(t)$ oznaczamy składnik niewiadomych $X_k(t)$ odpowiadający odkształceniom sprężystym, doraźnym w chwili t ,

$$(4.11) \quad X_k = H_k + R_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Z (4.3), (4.10) i (4.11) otrzymujemy układ równań stanu obciążenia doraźnego

$$(4.12) \quad \sum_{i=1}^m R_i(T) \delta_{ki} + \delta_{ko}(T) + \delta_{ks}(T) + \delta_{k\theta}(T) = L_k(T), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Trzy układy (4.10), (4.11) i (4.12) są równoważne układowi (4.3), ale łatwiejsze do rozwiązania. Wyznamy z kolei wyrazy $\delta_{ks}(t)$, zawierające niewiadome $X_k(t)$. Ze wzorów (1.7), (1.8), (4.2) i (4.7) otrzymujemy po uporządkowaniu uogólnione przesunięcie przekroju w układzie podstawowym, wywołane przez wypadkowe naprężenia narzucone jako funkcje sprężenia wstępnego, obciążeń, wielkości statycznych (niewiadomych) oraz skurczu:

$$(4.13) \quad \delta_{ks}(T, \tau_1) = \delta_{ks\tau_1}(T, \tau_1) + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{kso}(T, t) dt + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \sum_{i=1}^m X_i(t) \delta_{ksi}(T, t) dt + \\ + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \eta_s}{\partial t} \delta_{ks\eta}(T, t) dt.$$

We wzorze (4.13) oznaczono uogólnione wtórne, cząstkowe przesunięcia przekroju k w układzie podstawowym w sposób następujący: $\delta_{ks\tau_1}$ przesunięcia pochodzące od sprężenia wstępnego, δ_{kso} od obciążeń statycznych, δ_{ksi} od niewiadomych $X_i = 1$, $\delta_{ks\eta}$ od skurczu betonu.

Mamy przy tym

$$(4.14) \quad \delta_{ks\tau_1}(T, \tau_1) = \int_s \left[-\frac{N_k \mathfrak{R}(\tau_1)}{E_b F_b^*} \varphi_n(T, \tau_1) + \frac{M_k \mathfrak{M}(\tau_1)}{E_b I_b^*} \varphi_m(T, \tau_1) - \right. \\ \left. - \frac{N_k \mathfrak{R}(\tau_1) - M_k \mathfrak{M}(\tau_1)}{E_b I_b^*} e_a \varphi_n(T, \tau_1) \right] ds,$$

$$(4.15) \quad \delta_{ks0}(T, t) = \int_s \left[k \frac{N_k N_o}{E_b F_b^*} \varphi_N(T, t) - k \frac{M_k M_o}{E_b I_b^*} \varphi_M(T, t) + \right. \\ \left. + k \frac{N_k M_o - M_k N_o}{E_b I_b^*} e_a \varphi_N(T, t) \right] ds,$$

$$(4.16) \quad \delta_{ksti}(T, t) = \int_s \left[k \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} \varphi_N(T, t) - k \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} \varphi_M(T, t) + \right. \\ \left. + k \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} e_a \varphi_N(T, t) \right] ds,$$

$$(4.17) \quad \delta_{ks\eta}(T, t) = \int_s k N_k \left[\varphi_N(T, t) + \frac{\varphi_M(T, t)}{e_a} \right] ds.$$

Podstawiamy (4.13) do (4.10) i (4.12); otrzymujemy równania stanu odciążenia:

$$(4.18) \quad \sum_{i=1}^m H_i(T) \delta_{kxi} - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \sum_{i=1}^m X_i(t) \delta_{kxi} dt - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{kx0}(t) dt - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \times \\ \times \delta_{ks\tau_1}(t, \tau_1) dt - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \int_{s_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \delta_{ks0}(t, \tau) d\tau dt - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \sum_{i=1}^m X_i(\tau) \times \\ \times \delta_{kxi}(t, \tau) d\tau dt - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \delta_{ks\eta}(t, \tau) d\tau dt + \delta_{k\eta}(T) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

oraz równania stanu obciążenia doraźnego

$$(4.19) \quad \sum_{i=1}^m R_i(T) \delta_{kxi} + \delta_{kx0}(T) + \delta_{ks\tau_1}(T) + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{ks0}(T, t) dt + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \sum_{i=1}^m X_i(t) \times \\ \times \delta_{kxi}(T, t) dt + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \eta_s}{\partial t} \delta_{ks\eta}(T, t) dt + \delta_{k\theta}(T) = L_k(T), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

5. Niewiadome statycznie niewyznaczalne dla nieodwracalnego stanu odkształcenia

W celu wydzielenia $H_k(T)$ z (4.18) i (4.19) różniczkujemy równania (4.18) względem parametru całkowania T , a następnie drogą eliminacji, pamiętając, że

$$(5.1) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} \beta(T, t) \right]_{t=T} = - \frac{\partial}{\partial T} \beta(T, t),$$

otrzymujemy po uporządkowaniu układ równań różniczkowych pierwszego rzędu liniowych ze współczynnikami funkcyjnymi

$$(5.2) \quad \sum_{i=1}^m \delta_{ki} \left[\frac{dH_i}{dT} + \frac{\partial \beta}{\partial T} H_i(T) \right] + \frac{\partial \beta}{\partial T} [\delta_{k\theta}(T) - L_k(T)] + \frac{d\delta_{kn}}{dT} = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Rozwikłanie (5.2) przedstawia się prosto; wprowadzenie macierzy odwrotnej (β_{ki}) do macierzy (δ_{ki}) według (4.5) daje m niezależnych równań różniczkowych pierwszego rzędu liniowych ze współczynnikami funkcyjnymi, po jednym dla każdej niewiadomej:

$$(5.3) \quad \frac{dH_k}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial T} H_k(T) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial T} [\delta_{i\theta}(T) - L_i(T)] + \frac{d\delta_{in}}{dT} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Równania (5.3) przedstawiają równania i rozwiązanie typu

$$(5.4) \quad y' + f(x)y = g(x), \quad y = e^{-F} \left[\eta + \int_{\xi}^x g(x) e^F dx \right], \quad F = \int_{\xi}^x f(x) dx.$$

W naszym przypadku otrzymujemy

$$(5.5) \quad H_k(T) = e^{-\beta(T, \tau_1)} \left\{ \varkappa + \int_{\tau_1}^T e^{\beta(t, \tau_1)} \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \left[\frac{\partial \beta}{\partial t} (\delta_{i\theta}(t) - L_i(t)) + \frac{d\delta_{in}}{dt} \right] dt \right\},$$

gdzie

$$F = \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial T} dT = \beta(T, \tau_1).$$

Z fizykalnego przebiegu zjawiska dla $T = \tau_1$, mamy $H_k(\tau_1) = 0$, czyli $\varkappa = 0$. Otrzymujemy stąd składnik niewiadomych statycznie niewyznaczalnych dla odkształceń nieodwracalnych w postaci:

$$(5.6) \quad H_k(T) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(T, t)} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial t} [\delta_{i\theta}(t) - L_i(t)] + \frac{d\delta_{in}}{dt} \right\} dt, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Z (5.6) wynika, że $H_k(T)$ zależy tylko od skurczu betonu, temperatury i ruchu podpór, przy czym można niezależnie rozpatrywać każdy z tych wpływów.

Poniżej rozważymy przypadki szczególne, które mogą mieć znaczenie praktyczne. Określenie wpływu skurczu wymaga wyznaczenia całki

$$(5.7) \quad \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(x, t)} \frac{d\delta_{i0}}{dt} dt = \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(x, t)} \frac{d}{dt} \eta_s(t, \tau_1) dt \int_s N_k ds.$$

Dla afinicznego skurczu i pęczania betonu otrzymujemy

$$(5.8) \quad H_k(T) = \frac{-S}{P} (1 - e^{-\beta(x, \tau_1)}) \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \int_s N_i ds, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Dla nieafinicznego skurczu i pęczania betonu, gdy $a/\gamma = 2$ (co odpowiada skurczowi dwukrotnie szybszemu od pęczania) otrzymujemy

$$(5.9) \quad H_k(T) = \frac{2S}{P^2} \left[e^{-\beta(x, \tau_1)} \left(e^{-\gamma\tau_1} + \frac{1}{P} \right) - \left(e^{-\gamma T} + \frac{1}{P} \right) \right] \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \int_s N_i ds, \\ k = 1, 2, \dots, m.$$

Określenie wpływu temperatury i ruchów podpór wymaga wyznaczenia całki

$$(5.10) \quad \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(x, t)} \frac{\partial \beta}{\partial t} [\delta_{i0}(t) - L_i(t)] dt.$$

Dla stałego działania temperatury oraz jednorazowego i stałe działającego przesunięcia podpór otrzymujemy

$$(5.11) \quad H_k(T) = (1 - e^{-\beta(x, \tau_1)}) \sum_{i=1}^m \beta_{ki} (\delta_{i0} - L_i), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Dla liniowo zmiennego działania temperatury i ruchu podpór przy następującej zmienności temperatur, ruchów i uogólnionych przesunięć

$$(5.12) \quad \varepsilon_\theta(t) = [\alpha_t t^0] \frac{t}{T}, \quad \Delta_\theta(t) = [\alpha_t \Delta t^0] \frac{t}{T}, \quad L_i(t) = [L_i] \frac{t}{T},$$

$$\delta_{i0}(t) - L_i(t) = \frac{t}{T} [\delta_{i0} - L_i],$$

gdzie wyrażenia w nawiasach kwadratowych oznaczają końcową dla chwili T wartość temperatur, ruchów i przesunięć, otrzymujemy

$$(5.13) \quad H_k(T) = \left\{ \left(1 - e^{-\beta(x, \tau_1)} \frac{\tau_1}{T} \right) - \frac{P}{\gamma T} e^{-P e^{-\gamma T}} [E_i(-P e^{-\gamma \tau_1}) - E_i(-P e^{-\gamma T})] \right\} \times \\ \times \sum_{i=1}^m \beta_{ki} [\delta_{i0} - L_i], \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

gdzie

$$E_i(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Dla okresowo zmiennego działania temperatury i ruchów podpór, dla

$$(5.14) \quad \begin{cases} \varepsilon_0(t) = [\alpha_0 t^0] \cos \frac{\pi}{Q} t, & \Delta_0(t) = [\alpha_0 \Delta t^0] \cos \frac{\pi}{Q} t, \\ L_i(t) = [L_i] \cos \frac{\pi}{Q} t, & \delta_{i0}(t) - L_i(t) = \cos \frac{\pi}{Q} t [\delta_{i0} - L_i], \end{cases}$$

gdzie Q oznacza okres wahań, zaś wyrażenia w nawiasach kwadratowych oznaczają maksymalne okresowo wychylenie temperatur, ruchów i przesunięć (co do wartości bezwzględnej i od poziomu zerowego), otrzymujemy

$$(5.15) \quad H_k(T) = -e^{p_0 e^{-\gamma T}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{i=1}^m \beta_{ki} [\delta_{i0} - L_i], \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$C_n = \frac{(-1)^n P^{n+1}}{n! \left[(n+1)^2 + \left(\frac{\pi}{\gamma Q} \right)^2 \right]} \left\{ \left[(n+1) \cos \pi \frac{T}{Q} - \frac{\pi}{\gamma Q} \sin \pi \frac{T}{Q} \right] e^{-\gamma T(n+1)} - \left[(n+1) \cos \pi \frac{\tau_1}{Q} - \frac{\pi}{\gamma Q} \sin \pi \frac{\tau_1}{Q} \right] e^{-\gamma \tau_1(n+1)} \right\}.$$

Dla asymptotycznie zmiennego działania temperatury i ruchów podpór, gdy

$$(5.16) \quad \begin{cases} \varepsilon_0(t) = [\alpha_0 t^0] (1 - e^{-\lambda(t-\tau_1)}), & \Delta_0(t) = [\alpha_0 \Delta t^0] (1 - e^{-\lambda(t-\tau_1)}), \\ L_i(t) = [L_i] (1 - e^{-\lambda(t-\tau_1)}), & \delta_{i0}(t) - L_i(t) = (1 - e^{-\lambda(t-\tau_1)}) [\delta_{i0} - L_i], \end{cases}$$

gdzie λ oznacza współczynnik wypełnienia wykładniczej krzywej zmienności, zaś wyrażenia w nawiasach oznaczają końcową wartość temperatury, ruchów i przesunięć dla $T = \infty$, otrzymujemy

$$(5.17) \quad H_k(T) = \left[(1 - e^{-\beta(T, \tau_1)}) - e^{-p_0 e^{-\gamma T}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \right] \sum_{i=1}^m \beta_{ki} [\delta_{i0} - L_i], \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$D_n = \frac{(-1)^n P^{n+1}}{n! \left(n+1 + \frac{\lambda}{\gamma} \right)} (e^{-\gamma T(n+1) - \lambda(T-\tau_1)} - e^{\gamma \tau_1(n+1)}).$$

6. Niewiadome statycznie niewyznaczalne w postaci funkcyjnej

Wyliczenie $H_k(T)$ pozwala wykorzystać (4.19) do wyliczenia niewiadomych $X_k(T)$; otrzymujemy układ równań całkowych Volterry drugiego rodzaju

$$(6.1) \quad \sum_{i=1}^m X_i(T) \delta_{ki} + \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \sum_{i=1}^m X_i(t) \delta_{ksti}(T, t) dt = F_k(T), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Wolny wyraz (6.1), funkcja obciążeń $F_k(T)$, składa się z sumy, której składniki przedstawiają wpływ obciążeń, temperatury, skurczu i ruchu podpór:

$$(6.2) \quad F_k(T) = L_k(T) - \delta_{k0}(T) - \delta_{ko}(T) - \delta_{ks\tau_1}(T) - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{ks0}(T, t) dt - \\ - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \eta_s}{\partial t} \delta_{ks\eta}(T, t) dt - \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(T, t)} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial t} [\delta_{ko}(t) - L_k(t)] + \frac{d\delta_{k\eta}}{dt} \right\} dt.$$

Ostatni wyraz (6.2) powstaje z przekształcenia sumy $\sum_{i=1}^m H_i(T) \delta_{ki}$. Równania (6.1) przedstawiamy w postaci wektorowej

$$(6.3) \quad X(T) \delta + \int_{\tau_1}^T h(T, t) X(t) dt = F(T).$$

We wzorze powyższym przyjęto oznaczenia: macierz utworzona z funkcji niewiadomych

$$X(T) = \begin{pmatrix} X_1(T) \\ \vdots \\ X_k(T) \end{pmatrix},$$

macierz utworzona z funkcji obciążenia

$$F(T) = \begin{pmatrix} F_1(T) \\ \vdots \\ F_k(T) \end{pmatrix},$$

macierz przesunięć sprężystych pochodzących od sił jednostkowych

$$\delta = (\delta_{ik}),$$

jądro równania (6.3)

$$h(T, t) = (h_{ki}(T, t)).$$

Poszczególne wyrazy macierzy $h(T, t)$ uzyskujemy przez podstawienie wartości współczynników funkcyjnych $\varphi_N(T, t)$, $\varphi_M(T, t)$ i $\varphi_P(T, t)$ według (1.13) do $\delta_{ksti}(T, t)$ według (4.16)

$$(6.4) \quad h_{ki}(T, t) = -P\gamma e^{-\gamma t} \int_s^T k \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} \left[\frac{(1-w_1)w_1}{w_1-w_2} e^{-w_1 k P (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T})} - \right.$$

$$\begin{aligned} & - \frac{(1-w_2)w_2}{w_1-w_2} e^{-w_2 k P (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T})} \Big] ds - \int_s^T k \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} \left[\frac{w_1(w_1-1)}{w_1-w_2} e^{-w_1 k P (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T})} - \right. \\ & \left. - \frac{w_2(w_2-1)}{w_1-w_2} e^{-w_2 k P (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T})} \right] ds + \int_s^T k \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} \times \\ & \times e_a \left[\frac{w_1}{w_1-w_2} e^{-w_1 k P (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T})} - \frac{w_2}{w_1-w_2} e^{-w_2 k P (e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T})} \right] ds \Big\}. \end{aligned}$$

Jądro $h(T, t)$ jest więc jądrem zwyrodniałym, ale równocześnie daje się łatwo sprowadzić do postaci $h(U-u)$ za pomocą podstawienia $Pe^{-\gamma T} = u$; otrzymujemy

$$(6.5) \quad X(U) \delta = \int_{u_1}^U h(U-u) X(u) du = F(U),$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_{ki}(U-u) = & - \int_s^T k \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} \left[\frac{(1-w_2)w_1}{w_1-w_2} e^{-w_1 k(u-U)} - \frac{(1-w_1)w_2}{w_1-w_2} e^{-w_2 k(u-U)} \right] ds + \\ & + \int_s^T k \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} \left[\frac{w_1(w_1-1)}{w_1-w_2} e^{-w_1 k(u-U)} - \frac{w_2(w_2-1)}{w_1-w_2} e^{-w_2 k(u-U)} \right] ds - \\ & - \int_s^T k \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} e_a \left[\frac{w_1}{w_1-w_2} e^{-w_1 k(u-U)} - \frac{w_2}{w_1-w_2} e^{-w_2 k(u-U)} \right] ds. \end{aligned}$$

Wyrazy macierzy $h(U-u)$ można rozwinąć w szereg

$$(6.6) \quad h_{ki}(U-u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (u-U)^n \delta_{kin},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta_{kin} = & - \int_s^T k \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} \left[\frac{(1-w_2)w_1}{w_1-w_2} (w_1 k)^n - \frac{(1-w_1)w_2}{w_1-w_2} (w_2 k)^n \right] ds + \\ & + \int_s^T k \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} \left[\frac{(w_1-1)w_1}{w_1-w_2} (w_1 k)^n - \frac{(w_2-1)w_2}{w_1-w_2} (w_2 k)^n \right] ds - \\ & - \int_s^T k \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} e_a \left[\frac{w_1}{w_1-w_2} (w_1 k)^n - \frac{w_2}{w_1-w_2} (w_2 k)^n \right] ds. \end{aligned}$$

Macierz $h(U-u)$ przekształcamy korzystając z kolei z (6.6):

$$(6.7) \quad h(U-u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (u-U)^n \delta_n,$$

gdzie $\delta_n = \delta_{kin}$.

Wprowadzamy szeregi (6.7) do (6.5) i tworzymy macierze $\lambda_n = \delta_n \beta$ powstałe jako iloczyn macierzy δ_n przez macierz odwrotną $\beta = \delta^{-1}$, przy czym wyrazy macierzy δ podaje wzór (4.5). Poszczególne wyrazy macierzy λ_n można obliczyć ze związku

$$(6.8) \quad \lambda_{nik} = \sum_{a=1}^m \delta_{mia} \beta_{ak}.$$

Otrzymujemy ostatecznie zamiast (6.1) równanie wektorowe, całkowe Voltery drugiego rodzaju nadające się do efektywnego rozwiązania za pomocą przekształcenia Laplace'a:

$$(6.9) \quad X(U) = \beta F(U) + \int_{u_1}^U K(U-u) X(u) du,$$

gdzie

$$K(U-u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda_n (u-U)^n.$$

Wzorując się na pracach G. Doetscha, [17] oraz [18], otrzymujemy po transformacji:

$$(6.10) \quad x(s) = \beta f(s) + k(s) x(s),$$

gdzie $x(s) = \mathcal{L}\{X(U)\}$ oznacza transformatę wektora funkcji niewiadomych, $f(s) = \mathcal{L}\{F(U)\}$ transformatę wektora danych funkcji obciążeń oraz

$$k(s) = \mathcal{L}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda_n U^n \right\}$$

transformatę jądra macierzy.

Równanie nadające się do transformacji odwrotnej uzyskujemy z (6.10) w wyniku przekształcenia algebraicznego

$$(6.11) \quad x(s) = \beta f(s) + q(s) \beta f(s),$$

gdzie

$$q(s) = k(s) [1 - k(s)]^{-1}.$$

W związku z transformacją odwrotną powracamy na chwilę do transformaty jądra $k(s)$, którą można przedstawić w postaci szeregu

$$(6.12) \quad k(s) = \mathcal{L}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda_n U^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_n}{s^{n+1}}.$$

Szeregowi $k(s)$ odpowiada przy ograniczeniu do $n = r$ wyrazów szeregu (6.12) funkcja $q(s)$

$$(6.13) \quad q(s) = \left(\sum_{n=0}^r (-1)^n \lambda_n s^{r-n} \right) \left(s^{r+1} - \sum_{n=0}^r \lambda_n s^{r-n} \right)^{-1}.$$

Postać (6.13) funkcji $q(s)$ nadaje się do transformacji odwrotnej tylko w przypadku szczególnym układu statycznego z jedną niewiadomą, kiedy macierze λ_n stają się liczbami; w przypadku ogólnym nie uzyskujemy tą drogą wyników efektywnych. W ogólnym przypadku lepiej wyrazić jądro rozwiązujące w postaci szeregu Neumanna, [18], który otrzymujemy z transformacji funkcji $q(s)$ według (6.11) po przedstawieniu jej w postaci szeregu

$$(6.14) \quad q(s) = k(s) [1 - k(s)]^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} [k(s)]^l.$$

Szeregowi (6.14) odpowiada mianowicie szereg podwójny, będący jądrem rozwiązującym równania (6.9)

$$(6.15) \quad Q(U) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \lambda_n U^n \right]^{*l}.$$

Rozwiązanie równania (6.9) daje się teraz przedstawić w postaci wektora

$$(6.16) \quad X(U) = \beta F(U) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+l}}{n!} \right] \omega_{nl} \int_{u_1}^U (u-U)^{nl} F(u) du,$$

gdzie

$$\omega_{nl} = \delta_n^l \beta^{l+1}.$$

Niewiadome $X_k(U)$ otrzymujemy jako składowe wektora (6.16)

$$(6.17) \quad X_k(U) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} F_i(U) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+l}}{n!} \right] \omega_{nlki} F_{nli}(U),$$

$$k = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$F_{nli}(U) = \int_{u_1}^U (u-U)^{nl} F_i(u) du.$$

Powracając do przedziału zmiennej t otrzymujemy ostatecznie dla $t = T$ niewiadome statycznie niewyznaczalne w postaci

$$(6.18) \quad X_k(T) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} F_i(T) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+l}}{n!} \right] \omega_{nlki} F_{nli}(T),$$

$$k = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$F_{nli}(T) = \int_{t_1}^T \beta(T, t)^{nl} \frac{\partial \beta}{\partial t} F_i(t) dt.$$

Występują tu funkcje obciążeń $F_i(t)$ i $F_{nli}(T)$, którym poświęcony jest p. 8 naszej pracy.

Macierz β jest oczywiście zawsze symetryczna. Macierze układu h oraz δ_n są symetryczne tylko wtedy, kiedy funkcja

$$(6.19) \quad [N_k(s)M_i(s) - M_k(s)N_i(s)]e_a(s), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

przyjmuje wartość zera w całym obszarze s . W ogólnym przypadku niesymetrii łatwo jest dokonać oceny jej rzędu przy obliczeniach numerycznych; można wtedy próbować symetryzacji zastępując rozwiązanie dokładne przybliżonym. Macierz układu ω_{nl} jest, z wyjątkiem przypadku szczególnego kratownicy sprężonej centrycznie o stałym procencie przekroju zbrojenia, zawsze niesymetryczna jako iloczyn dwu różnych macierzy $(\delta_n)^l \beta^{l+1}$.

7. Wzór rekurencyjny na niewiadome statycznie niewyznaczalne

Wyznaczenie niewiadomych $X_k(T)$ w postaci (6.18) wymaga uciążliwych rachunków. Podamy więc prostą metodę przybliżonego określenia tych funkcji za pomocą wzoru rekurencyjnego.

W celu obliczenia całki tego równania za pomocą wzoru trapezowego rozwijamy (6.5) w następujący sposób:

$$(7.1) \quad X(U)\delta - \int_{u_1}^{u_2} h(U-u)X(u)du - \int_{u_2}^{u_3} h(U-u)X(u)du - \dots - \\ - \int_{u_{l-1}}^{u_l} h(U-u)X(u)du - \int_{u_l}^U h(U-u)X(u)du = F(U).$$

Granice całkowania poszczególnych całek tego równania układamy w ciąg wartości czasu $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{l-1}, u_l, U$ o odstępach czasu Δ (od Δ zależy dokładność obliczeń). Po zastąpieniu obszaru całkowania przez trapezy i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(7.2) \quad X(U) \left[\delta - \frac{\Delta}{2} h(0) \right] = F(U) + \Delta \left[\frac{1}{2} h(U-u_1)X(u_1) + h(U-u_2)X(u_2) + \right. \\ \left. + h(U-u_3)X(u_3) + \dots + h(U-u_{l-1})X(u_{l-1}) + h(U-u_l)X(u_l) \right].$$

Wprowadzamy teraz macierz odwrotną $\bar{\beta} = [\delta - \Delta/2h(0)]^{-1}$ oraz nową macierz $\lambda(U-u) = \bar{\beta}h(U-u)$ i otrzymujemy dla wektora funkcji niewiadomych statycznie niewyznaczalnych wzór o budowie rekurencyjnej

$$(7.3) \quad X(U) = \bar{\beta}F(U) + \Delta \left[\frac{1}{2} \lambda(U-u_1)X(u_1) + \sum_{r=2}^l \lambda(U-u_r)X(u_r) \right].$$

Dla punktu początkowego u_1 , tj. dla chwili $t = \tau_1$, mamy $\Delta = 0$ i z (7.3) otrzymujemy

$$(7.4) \quad X(u_1) = \left[\delta - \frac{\Delta}{2} h(0) \right]^{-1} F(u_1) + \frac{\Delta}{2} \left[\delta - \frac{\Delta}{2} h(0) \right]^{-1} h(0) X(u_1) = \beta F(u_1).$$

Niewiadome statycznie niewyznaczalne $X_k(U)$ otrzymujemy jako składowe wektora (7.3) w postaci rekurencyjnej

$$(7.5) \quad X_k(U) = \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_{ki} F_i(U) + \Delta \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2} \lambda_{ki}(U - u_1) X_i(u_1) + \sum_{r=2}^l \lambda_{ki}(U - u_r) X_i(u_r) \right], \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Występują tu funkcje obciążeń $F_i(u)$, o których będzie mowa w p. 8.

Wszystkie macierze we wzorze końcowym są w ogólnym przypadku niesymetryczne. Macierz δ jest oczywiście zawsze symetryczna. Macierz $h(0)$ a z nią i macierz $\bar{\beta}$ jest niesymetryczna, jeśli (6.19) nie przyjmuje wartości zera, chociażby w części obszaru s . Macierz λ , jako iloczyn dwu nieidentycznych macierzy $\bar{\beta}h(U-u)$, jest zawsze niesymetryczna. Ponadto należy zaznaczyć, że macierze $h(0)$ oraz $\bar{\beta}$ nie są funkcjami czasu. Ostatnia macierz przybiera postać

$$(7.6) \quad \bar{\beta} = \left(\delta_{ik} - \frac{\Delta}{2} h_{ik}(0) \right)^{-1} = \left(\int_s \left[\left(1 - k \frac{\Delta}{2} \right) \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} ds - \left(1 - k \frac{\Delta}{2} (v_o + v_a) \right) \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} - k \frac{\Delta}{2} e_a \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} \right] ds \right)^{-1}.$$

8. Funkcje obciążeń

Funkcja obciążeń F_i według (6.2) występuje we wzorach (6.17), (6.18) i (7.5); można ją rozłożyć na wyrazy zależne od sprężenia F_{is} , od obciążeń F_{iq} , od ruchu podpór i temperatury $F_{it\theta}$ oraz od skurczu betonu $F_{i\eta}$:

$$(8.1) \quad F_{is}(T) = -\delta_{is\tau_1}(T, \tau_1) = \int_{s_1} \left[\frac{N_i \mathfrak{R}(\tau_1)}{E_b F_b^*} \varphi_n(T, \tau_1) - \frac{M_i \mathfrak{M}(\tau_1)}{E_b I_b^*} \varphi_m(T, \tau_1) + \frac{N_i \mathfrak{M}(\tau_1) - M_i \mathfrak{R}(\tau_1)}{E_b I_b^*} e_a \varphi_n(T, \tau_1) \right] ds,$$

$$(8.2) \quad F_{iq}(T) = -\delta_{iq}(T) - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta_{iso}(T, t) dt,$$

$$(8.3) \quad F_{iL0}(T) = L_i(T) - \delta_{i0}(T) - \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(T,t)} \frac{\partial \beta}{\partial t} [\delta_{i0}(t) - L_i(t)] dt,$$

$$(8.4) \quad F_{i\eta}(T) = - \int_{\tau_1}^T \frac{\partial \eta_s}{\partial t} \delta_{is\eta}(T, t) dt - \int_{\tau_1}^T e^{-\beta(T,t)} \frac{d\delta_{i\eta}}{dt} dt.$$

Dla szczególnych przypadków zmienności obciążeń podajemy rozwiązanie mogące mieć znaczenie praktyczne:

dla obciążenia stałego

$$(8.5) \quad F_{iq}(T) = - \int_s \left[\frac{N_i N_o}{E_b F_b^*} \varphi_n(T, \tau_1) - \frac{M_i M_o}{E_b I_b^*} \psi_m(T, \tau_1) + \frac{N_i M_o - M_i N_o}{E_b I_b^*} e_a \varphi_n(T, \tau_1) \right] ds;$$

dla obciążenia zmiennego liniowo $N(t) = (N/T)t$, $M(t) = (M/T)t$, $T \neq \infty$, $t = \tau_1, \dots, T$

$$(8.6) \quad F_{iq}(T) = - \int_s \frac{N_i N}{E_b F_b^*} \left[1 + \frac{1-w_2}{w_1-w_2} f(w_1) - \frac{1-w_1}{w_1-w_2} f(w_2) \right] ds + \\ - \int_s \frac{M_i M}{E_b I_b^*} \left[1 + \frac{w_1-1}{w_1-w_2} f(w_1) - \frac{w_2-1}{w_1-w_2} f(w_2) \right] ds - \\ - \int_{s_1} \frac{N_i M - M_i N}{E_b I_b^*} e_a \frac{1}{w_1-w_2} [f(w_1) - f(w_2)] ds,$$

gdzie

$$f(w) = \left(\frac{\tau_1}{t} e^{-wk\beta} - 1 \right) + \frac{wkP}{\gamma t} e^{wke^{-\gamma t}} [E_i(-wkPe^{-\gamma t}) - E_i(-wkPe^{-\gamma \tau_1})];$$

dla obciążenia zmiennego okresowo $N(t) = N \cos \pi t/Q$, $M(t) = M \cos \pi t/Q$, $t = \tau_1, \dots, T$

$$(8.7) \quad F_{iq}(T) = - \cos \frac{\pi}{Q} T \int_s \left(\frac{N_i N}{E_b F_b^*} - \frac{M_i M}{E_b I_b^*} \right) ds + \\ + \int_s \frac{N_i N}{E_b F_b^*} \left[\frac{1-w_2}{w_1-w_2} e^{w_1 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty A_m(w_1) - \frac{1-w_1}{w_1-w_2} e^{w_2 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty A_m(w_2) \right] ds - \\ - \int_s \frac{M_i M}{E_b I_b^*} \left[\frac{w_1-1}{w_1-w_2} e^{w_1 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty A_m(w_1) - \frac{w_2-1}{w_1-w_2} e^{w_2 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty A_m(w_2) \right] ds +$$

$$+ \int_s \frac{N_i M - M_i N}{E_b I_b^*} e_a \frac{1}{w_1 - w_2} \left[e^{w_1 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty A_m(w_1) - e^{w_2 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty A_m(w_2) \right] ds,$$

gdzie

$$A_m(w) = \frac{(-1)^m (w k P)^{m+1}}{m! \left[(m+1)^2 + \left(\frac{\pi}{\gamma T} \right)^2 \right]} \left\{ e^{-\gamma T(m+1)} \left[(m+1) \cos \pi \frac{T}{Q} - \frac{\pi}{\gamma T} \sin \pi \frac{T}{Q} \right] - e^{-\gamma \tau_1(m+1)} \left[(m+1) \cos \pi \frac{\tau_1}{Q} - \frac{\pi}{\gamma Q} \sin \pi \frac{\tau_1}{Q} \right] \right\};$$

dla obciążenia zmiennego asymptotycznie $N(t) = N [1 - e^{-\lambda(t-\tau_1)}]$, $M(t) = M [1 - e^{-\lambda(t-\tau_1)}]$, $t = \tau_1, \dots, T$

$$(8.8) \quad F_{i,q}(T) = - [1 - e^{-\lambda(T-\tau_1)}] \int_s \left(\frac{N_i N}{E_b F_b^*} - \frac{M_i M}{E_b I_b^*} \right) ds + \\ + \int_s \frac{N_i N}{E_b F_b^*} \left\{ \frac{1 - w_2}{w_1 - w_2} \left[(1 - e^{-w_1 k \beta}) - e^{-w_1 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty B_m(w_1) \right] - \frac{1 - w_1}{w_1 - w_2} \times \right. \\ \times \left. \left[(1 - e^{-w_2 k \beta}) - e^{-w_2 k \beta} \sum_0^\infty B_m(w_2) \right] \right\} ds - \int_s \frac{M_i M}{E_b I_b^*} \left\{ \frac{w_1 - 1}{w_1 - w_2} \left[(1 - e^{-w_1 k \beta}) - \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-w_1 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty B_m(w_1) \right] - \frac{w_2 - 1}{w_1 - w_2} \left[(1 - e^{-w_2 k \beta}) - e^{-w_2 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty B_m(w_2) \right] \right\} ds + \\ + \int_s \frac{N_i M - M_i N}{E_b I_b^*} e_a \frac{1}{w_1 - w_2} \left\{ \left[(1 - e^{-w_1 k \beta}) - e^{-w_1 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty B_m(w_1) \right] - \right. \\ \left. - \left[(1 - e^{-w_2 k \beta}) - e^{-w_2 k P e^{-\gamma T}} \sum_0^\infty B_m(w_2) \right] \right\} ds,$$

gdzie

$$B_m(w) = \frac{(-1)^m (w k P)^{m+1}}{m! \left(m + 1 + \frac{\lambda}{\gamma} \right)} \left(e^{-\gamma T(m+1) - \lambda(T-\tau_1)} - e^{-\gamma \tau_1(m+1)} \right).$$

Dla jednorazowego przesunięcia podpór oraz w przypadku stałego działania temperatury mamy

$$(8.9) \quad F_{iL\theta}(T) = e^{-\beta(T, \tau_1)} [L_i - \delta_{i\theta}],$$

przy czym oznaczenia są identyczne z oznaczeniami w (5.11).

W przypadku liniowo zmiennych ruchów podpór oraz działania temperatury mamy

$$(8.10) \quad F_{iL\beta}(T) = \left\{ 1 + \left(1 - e^{-\beta(T, \tau_1)} \frac{\tau_1}{T} \right) - \frac{P}{\gamma T} e^{-Pe^{-\gamma T}} [E_i(-Pe^{-\gamma \tau_1}) - E_i(-Pe^{-\gamma T})] \right\} [L_i - \delta_{i0}]$$

przy oznaczeniach identycznych z oznaczeniami w (5.12) i (5.13). W przypadku okresowo zmiennych ruchów podpór oraz działania temperatury mamy

$$(8.11) \quad F_{iL\theta}(T) = \left(\cos \frac{\pi}{Q} T + e^{Pe^{-\gamma T}} \sum_0^{\infty} c_n \right) [L_i - \delta_{i0}]$$

przy oznaczeniach przyjętych we wzorach (5.14) i (5.15). W przypadku asymptotycznie zmiennych ruchów podpór oraz działania temperatury mamy

$$(8.12) \quad F_{iL\theta}(T) = \left[(1 - e^{-\lambda(T - \tau_1)}) + (1 - e^{-\beta(T, \tau_1)}) - e^{-Pe^{-\gamma T}} \sum_0^{\infty} D_n \right] [L_i - \delta_{i0}]$$

przy oznaczeniach przyjętych w (5.16) i (5.17).

Dla afinicznego skurczu betonu znajdziemy wzór

$$(8.13) \quad F_{i\eta}(T) = \frac{S}{P} \int_s \left(1 - \varphi_n - \frac{\varphi_m}{e_a} \right) N_i ds + \frac{S}{P} (1 - e^{-\beta(T, \tau_1)}) \int_s N_i ds,$$

a dla nieafinicznego skurczu betonu wzór

$$(8.14) \quad F_{i\eta}(T) = \frac{2S}{P^2} \int_s N_i \left\{ \beta \left(\varphi_n + \frac{v_a}{e_a} \psi_n \right) - \frac{1}{v_o k} (v_o + v_a) \left(1 - \varphi_n - \frac{v_a}{e_a} \psi_n \right) - \frac{1}{v_o k} \left[\varphi_m - (1 - \psi_m) \frac{v_a}{e_a} \right] \right\} ds - \frac{2S}{P^2} \left[e^{-\beta(T, \tau_1)} \left(e^{-\gamma \tau_1} + \frac{1}{P} \right) - \left(e^{-\gamma T} + \frac{1}{P} \right) \right] \int_s N_i ds.$$

Przy obliczeniach numerycznych F_i należy korzystać z tablic współczynników funkcyjnych φ_n , φ_m , ψ_n i ψ_m podanych w pracy [2]. Funkcję obciążeń F_{ni} obliczyć można całkując funkcję F_i według (6.18); numeryczne rozwiązania można uzyskać rozwijając funkcje F_i w szereg, jeśli podanie rozwiązania zamkniętego prowadzi do skomplikowanego całkowania.

9. Szczególne przypadki ustrojów statycznie niewyznaczalnych

Wyróżnić można następujące przypadki szczególne:

- a) ustroje z jedną warstwą zbrojenia w przekroju,
- b) belki ciągłe oraz ramy, dla których możemy pominąć wpływ sił normalnych na odkształcenia,

- c) kratownice (pręty zbrojone centrycznie),
- d) kratownice o stałym procencie zbrojenia prętów,
- e) ustroje z jedną niewiadomą statycznie niewyznaczalną.

Ustrojom z jedną warstwą zbrojenia w przekroju, dla których $v_o = 0$, odpowiada uproszczona budowa wyrazów jądra-macierzy (6.5):

$$(9.1) \quad h_{ki}(U-u) = - \int_s e^{-k(1+v_a)(u-U)} k \left(\frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} + \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} v_a - \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} e_a \right) ds.$$

Zachęca to do bezpośredniej transformacji (9.1). Pojawiają się jednak trudności przy transformacji odwrotnej i nie uzyskuje się efektywnych rozwiązań. Nadal celowe jest rozwinięcie (9.1) w szereg

$$(9.2) \quad h_{ki}(U-u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (u-U)^n \delta_{kin},$$

gdzie

$$\delta_{kin} = - \int_s k^{n+1} (1+v_a)^n \left(\frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} + \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} v_a - \frac{N_k M_i - M_k N_i}{E_b I_b^*} e_a \right) ds.$$

Uzyskujemy więc tylko uproszczenie budowy wyrazów macierzy h , δ_n oraz ω_{nl} . Z wyjątkiem macierzy β macierze h , δ_n i ω_{nl} są nadal niesymetryczne, jeśli (6.19) nie przyjmuje wartości zera chociażby w części obszaru s . Analogicznie przedstawia się zagadnienie z macierzami $h(0)$, $\bar{\beta}$ i λ w metodzie rekurencyjnej.

Belkom ciągłym oraz ramom, dla których możemy pominąć wpływ sił normalnych na odkształcenia, odpowiadają symetryczne macierze (6.5):

$$(9.3) \quad h_{ki}(U-u) = \int_s \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} k \psi_M(u-U) ds.$$

Celowe jest rozwinięcie (9.3) w szereg potęgowy; otrzymujemy uproszczenie wyrazów macierzy h , δ_n i ω_{nl} , z których jednak tylko ostatnia pozostaje niesymetryczna.

Rozwiązanie rekurencyjne charakteryzuje się macierzami δ , $\bar{\beta}$ i $h(U-u)$, symetrycznymi i z uproszczonymi wyrazami. Macierze $\lambda(U-u)$ pozostają niesymetryczne. Macierz $\bar{\beta}$ przybiera postać

$$(9.4) \quad \bar{\beta} = \left(\delta - \frac{\Delta}{2} h(0) \right)^{-1} = - \left(\int_s \left(1 + k \frac{\Delta}{2} (v_o + v_a) \right) \frac{M_k M_i}{E_b I_b^*} ds \right)^{-1}.$$

Kratownice, dla których można pominąć wpływ drugorzędnych momentów węzłowych, wymagają centrycznego zbrojenia prętów. Przy tym założeniu $v_a = 0$. Macierz (6.5) staje się symetryczna:

$$(9.5) \quad h_{ki}(U-u) = - \int_s^U k e^{-k\beta} \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} ds = - \sum_s k e^{-k\beta} \frac{Z_k Z_i}{E_b F_b^*} l.$$

Celowe jest rozwinięcie (9.5) w szereg potęgowy. Wyrazy macierzy h , δ_n i ω_{ni} upraszczają się; jedynie macierz ω_{ni} pozostaje niesymetryczna.

Rozwiązanie rekurencyjne charakteryzuje się macierzami δ , β i $h(U-u)$, symetrycznymi i z uproszczonymi wyrazami. Macierze $\lambda(U-u)$ pozostają niesymetryczne. Macierz $\bar{\beta}$ przybiera postać

$$(9.6) \quad \bar{\beta} = \left(\delta - \frac{\Delta}{2} h(0) \right)^{-1} = - \left(\int_s^U \left(1 - k \frac{\Delta}{2} \right) \frac{N_k N_i}{E_b F_b^*} ds \right)^{-1} = \\ = - \left(\sum_s \left(1 - k \frac{\Delta}{2} \right) \frac{Z_k Z_i}{E_b F_b^*} l \right)^{-1}.$$

Kratownice sprężone centrycznie o stałym procencie przekroju zbrojenia odznaczają się stałą wartością charakterystyki powierzchni k (1.15) we wszystkich prętach kratownicy. Powoduje to symetrię i uproszczenie wyrazów macierzy oraz równań (6.5):

$$(9.7) \quad \begin{cases} h(U-u) = - k e^{-k(u-U)} \delta, \\ X(U) \delta + k \delta \int_{u_1}^U e^{-k(u-U)} X(u) du = F(U), \\ \delta = \left(\sum_s \frac{Z_k Z_i}{E_b F_b^*} l \right). \end{cases}$$

Po zastosowaniu do (9.7) transformacji Laplace'a i odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$(9.8) \quad x(s) = \beta f(s) - \frac{k}{s} \beta f(s).$$

Funkcja (9.8) nadaje się bezpośrednio do transformacji odwrotnej, po której otrzymujemy

$$(9.9) \quad X(U) = \beta F(U) - \beta \int_{u_1}^U k F(u) du.$$

Niewiadome statycznie niewyznaczalne otrzymujemy jako składowe wektora (9.9) w postaci następującej:

$$(9.10) \quad X_k(U) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \left[F_i(U) - \int_{u_1}^U k F_i(u) du \right], \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Dla najważniejszego przypadku szczególnego (sprężenia, stałego działania obciążeń i temperatury, jednorazowego ruchu podpór oraz afinicznego skurczu betonu) otrzymujemy z (9.10)

$$(9.11) \quad X_k(T) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \left\{ \sum_s \frac{Z_i \mathfrak{N}(\tau_1)}{E_b F_b^*} l - \sum_s \frac{Z_i Z_o}{E_b F_b^*} l + \right. \\ \left. + [e^{-\beta(T, \tau_1)} + k(1 - e^{-\beta(T, \tau_1)})] [L_i - \sum_s Z_i l \varepsilon_0] - \frac{S}{P} (1 - e^{-\beta(T, \tau_1)}) (1 - k) \sum_s Z_i l \right\}.$$

Z (9.11) wynika, że w omawianym przypadku X_k podlega zmianom jedynie, gdy zmienia się temperatura, położenie podpór oraz gdy kurczy się beton. Wzór (9.11) posłuży do sprawdzenia, czy w najprostszym przypadku symetrii macierzy układu rozprężonego słuszne jest założenie upraszczające Sattlera, stosowane np. w pracy [7] przy rozwiązywaniu ogólnego zagadnienia ustrojów statycznie niewyznaczalnych. SATTLER zakłada, że przyrost $Y(u)$ niewiadomych statycznie niewyznaczalnych jest proporcjonalny do wartości funkcji pełzania, co w naszym zapisie wektorowym daje

$$(9.12) \quad Y(u) = X(u) - X(u_1) = Y(U) \frac{u_1 - u}{u_1 - U}.$$

Podstawiamy (9.12) do (9.7) i po scałkowaniu otrzymujemy dla rozpatrywanej kratownicy centrycznie zbrojonej o stałym procencie zbrojenia wzory

$$(9.13) \quad \begin{cases} Y(U) = \frac{k(u_1 - U)}{1 - e^{-k(u_1 - U)}} \beta [F(U) - F(u_1) e^{-k(u_1 - U)}], \\ X(U) = \beta \left[\frac{k(u_1 - U)}{1 - e^{-k(u_1 - U)}} F(U) + \frac{1 - e^{-k(u_1 - U)} [1 + k(u_1 - U)]}{1 - e^{-k(u_1 - U)}} F(u_1) \right]. \end{cases}$$

Dla stałego obciążenia i temperatury, jednorazowego przesuwu podpór oraz afinicznego skurczu otrzymujemy z (9.13)

$$(9.14) \quad X_k(T, \tau_1) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki} \left\{ \sum_s \frac{Z_i \mathfrak{N}(\tau_1)}{E_b F_b^*} l - \sum_s \frac{Z_i Z_o}{E_b F_b^*} l + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{k\beta(T, \tau_1)}{1 - e^{-k\beta(T, \tau_1)}} (e^{-\beta T, \tau_1} - e^{-k\beta(T, \tau_1)}) \right] \left(L_i - \sum_s Z_i l \varepsilon_0 \right) - \right. \\ \left. - \frac{S}{P} \frac{k\beta(T, \tau_1)}{1 - e^{-k\beta(T, \tau_1)}} (e^{-k\beta(T, \tau_1)} - e^{-\beta(T, \tau_1)}) \sum_s Z_i l \right\}.$$

Porównanie (9.14) z (9.11) wykazuje, że w rozpatrywanym najprostszym przypadku założenie Sattlera spełnione jest:

a) dokładnie w odniesieniu do sprężenia i obciążeń stałych,

b) w przybliżeniu dla stałej temperatury i afinicznego skurczu betonu; błąd maleje do zera, dla granicznego procentu zbrojenia $k = 0$. Ogólnie, założenie Sattlera (por. [7]) prowadzi do symetryzacji macierzy układu rozprężonego, co jest sprzeczne z wynikiem dokładnym (6.18).

Układ z jedną niewiadomą statycznie niewyznaczalną charakteryzuje się tym, że macierze sprowadzają się do liczb

$$(9.15) \quad \delta \rightarrow \delta_{11}, \quad \beta \rightarrow \frac{1}{\delta_{11}}, \quad \delta_n \rightarrow \delta_{n_{11}}, \quad \lambda_n \rightarrow \frac{\delta_{n_{11}}}{\delta_{11}}, \quad \omega_{nl} \rightarrow \frac{\delta_{n_{11}}^l}{\delta_{11}^{l+1}}.$$

Wzór (6.17) upraszcza się w sposób następujący:

$$(9.16) \quad X_1(U) = \frac{F_1(U)}{\delta_{11}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \right]^l \left(\frac{\delta_{n_{11}}}{\delta_{11}} \right)^l \int_{u_1}^U (u-U)^{nl} \frac{F_1(u)}{\delta_{11}} du.$$

Ze wzoru (9.16) otrzymujemy niewiadomą statycznie niewyznaczalną w postaci nie zawierającej szeregów:

$$(9.17) \quad X_1(U) = \frac{F_1(U)}{\delta_{11}} + \int_{u_1}^U \frac{h_{11}(u-U)}{\delta_{11} - h_{11}(u-U)} \frac{F_1(u)}{\delta_{11}} du.$$

Scałkowanie (9.17) może być praktycznie trudne przy zmiennym przekroju prętów; łatwiej uzyskać wtedy rozwiązanie na drodze ogólnej.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Z. WIŚNIEWSKI, *Mechanika konstrukcji sprężonych w stanie naprężeń dopuszczalnych, jako reologiczna teoria zmienności odkształceń narzuconych*, dysertacja doktorska, maszynopis. Bibl. Główna Politechniki Warszawskiej, 1959.
- [2] Z. WIŚNIEWSKI, *Reologiczna teoria zmienności odkształceń narzuconych w zastosowaniu do betonu zbrojonego i sprężonego*, Arch. Inżyn. Ładow., 1, 1961.
- [3] C. WHITNEY, *Plain and Reinforced Arches*. I. Amer. Conc. Inst., 1935.
- [4] Fr. DISCHINGER, *Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken*, Bauing., 1939.
- [5] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ pełzania betonu na sprężone ustroje prętowe*, Rozpr. Inżyn., 2, 4 (1956), 227-287.
- [6] C. EIMER, *Podstawy teorii pełzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych*, Rozpr. Inżyn., 3, 5 (1957), 421-458.
- [7] R. WINDELS, *Zur Spannungsumlagerung infolge Kriechens u. Schwindens bei Tragwerken mit Verbundquerschnitten*, Bet. Stahlb., 8, 1956.
- [8] C. EIMER, *Zastosowanie transformacji Laplace'a w obliczeniach reologicznych konstrukcji sprężonych*, Rozpr. Inżyn., 1, 6 (1958), 181-200.
- [9] C. EIMER, *Obliczenia reologiczne konstrukcji sprężonych*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 1958.
- [10] R. BUSEMANN, *Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern*, Bauing., 11, 1950.
- [11] K. SATTLER, *Kriechen u. Schwinden bei vorgespannten Verbundstahlbetonkonstruktionen*, Bet. Stahlb., 1, 2 (1954).

- [12] Z. WIŚNIEWSKI, *Problem funkcji pełzania i skurczu oraz zmienności obciążeń w konstrukcjach sprężonych*, Konferencja naukowa na temat zachowania się konstrukcji w czasie, P.Z.J.T.B. Kom. Nauki oraz K.O.L. PAN, Krynica 1960.
- [13] K. GIRMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1957.
- [14] R. VALENTIN, *Berechnung wandartiger Träger nach dem Zusammen setzverfahren*, Bet. Stahlb., 8, 1957 oraz 10, 1958.
- [15] F. LEONHARDT, *Spannbeton für die Praxis*, Berlin 1955.
- [16] E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Lipsk 1943.
- [17] G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace — Transformation*, Berlin 1937.
- [18] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Basel 1950-1956.

Резюме

ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РЕОЛОГИИ

Используются результаты работ [1] и [2] для получения точных, замкнутых и довольно общих решений стержневых произвольно армированных и предварительно напряженных конструкций, с точки зрения реологии, с помощью матричного исчисления и преобразования Лапласа. Функция ползучести и усадки определяется формулами (1.1), (1.2) и (1.3).

В разделах 2 и 3 приводятся формулы для напряжений деформации, прогиба, а также обороты произвольной армированной и напряженной конструкции, состоящей из частей, которые можно отдельно рассматривать как плоские стержни, подвергающиеся нагрузке только в своей главной плоскости. Ними могут быть: плоские балки, рамы, арки, фермы или пространственные системы напр. складчатые системы, балки-стенки или ростверки статически определяемые или неопределяемые.

Обобщенные, статические неопределяемые силы $X_k(t)$ разлагаются на сумму двух элементов: элемент $H_k(t)$ соответствует конечным замедленным деформациям (5.6) и элемент $R_k(t)$ отвечает упругим мгновенным деформациям. Обобщенные силы $X_k(t)$ даются в виде функции или рекурсивной форме (7.5).

В разделе 8 приводится функция нагрузки F_i для случаев: напряжения F_{i_s} , внешней нагрузки F_{i_q} , движения опор и температуры $F_{i_{L\theta}}$, а также усадки бетона; учитываются постоянная нагрузка и нагрузка изменяющаяся линейно, периодически и асимптотически, а также движение опор как и воздействие температуры.

В разделе 9 обсуждаются следующие особые случаи: системы с одним слоем арматуры в сечении (9.1), неразрезные балки (9.3), фермы (9.5), фермы напряженные силами, действующими в середине сечения, с постоянным сечением арматуры и системы с одной, статически неопределяемой силой.

Формулируется также условие симметрии (6.19) матрицы (6.5), (6.6) системы нерешенной по отношению к h и δ_n , а также некоторое предложение, касающееся общей асимметрии матрицы (6.16). системы ω_{nL} , решенной по отношению к неизвестным. Проводится проверка предположения В. Затлера, [7] и [11], в особом случае (9.4).

Summary

RHEOMECHANICS OF REINFORCED AND PRESTRESSED BAR STRUCTURES INCLUDING HIGHLY REDUNDANT ONES

The results of Refs. [1] and [2] are used to obtain accurate effective closed and possibly general rheomechanical solutions for bar structures reinforced and prestressed in any manner, by means of methods of the matricial calculus and Laplace transformation. The functions expressing the creep and shrinkage are assumed in the form (1.1), (1.2), (1.3).

Sections 2 and 3 bring equations for stresses, strains, deflections, displacements, and rotations of any reinforced and prestressed structure composed of elements which can be treated separately as flat bars loaded in their principal planes only. They may be flat beams, frames, arches, lattices or three-dimensional structures such as plate structures, high section beams or gridworks, statically determinate or indeterminate.

The (generalized) redundant forces $X_k(t)$ are resolved into the irreversible part $H_k(t)$ corresponding to the durable retarded deformation (5.6) and the reversible part $R_k(t)$ corresponding to the elastic transitory strains. The generalized forces $X_k(t)$ are expressed in the functional form (6.18) or the recurrence form (7.5). In Sec. 8 the load function F_i is given in the cases of prestressing F_{is} , external load F_{i0} , movement of the support and the action of temperature $F_{iL\theta}$ and concrete shrinkage. Constant and linear periodic and asymptotic changes of loads and movements of the supports and temperatures are discussed.

In Section 9 some particular cases are considered: structures with one layer of reinforcement (9.1), continuous beams (9.3), lattices (9.5), centrally prestressed lattices with constant cross-sectional area of the reinforcement and systems with one redundant force as unknown. The symmetry condition (6.19) of the matrices (6.5), (6.6) of the coupled system h and δ_n are formulated as well as a conclusion concerning the general asymmetry of the matrix (6.16) of the uncoupled system ω_{nl} . The assumption of K. Sattler [7], [11] is verified in the particular case (9.4).

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 grudnia 1960 r.