ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, 11 (1963)

POWIERZCHNIOWE OGRZEWANIE PÓŁPRZESTRZENI WARSTWOWEJ

VÁCLAV VODIČKA (PLZEŇ)

Wstęp

Dobrze są znane osobliwości występujące w zagadnieniach przewodzenia ciepła w ciałach półnieskończonych, jeśli ciepło jest doprowadzane poprzez pewien obszar kołowy na powierzchni płaskiej, [1]; podobne fakty obserwujemy w odpowiednich zagadnieniach z dziedziny elektryczności. Sytuacja staje się znacznie bardziej skomplikowana w przypadku półprzestrzeni złożonej z warstw i to właśnie zagadnienie jest przedmiotem niniejszej pracy.

1. Sformułowanie zagadnienia

Niech ośrodek półnieskończony

$$x \geqslant 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty \tag{1.1}$$

będzie złożony z n jednorodnych i izotropowych części

$$\begin{aligned} &x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad x_0 = 0, \\ &x \geqslant x_{n-1}, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \end{aligned} \tag{1.2}$$

przy czym λ_k, c_k i γ_k oznaczają odpowiednio współczynnik przewodnictwa cieplnego, ciepło właściwe i gęstość k-tej części.

Zagadnienie polega na znalezieniu rozkładu temperatury w ciele w założeniu, że ciepło jest doprowadzane do czołowej powierzchni $x = 0$ dla $t > 0$ z prędkością $q(y, z)$ przypadającą na jednostkę czasu i powierzchni oraz że początkowa temperatura jest zerowa w całym obszarze.

Przy założeniu ciągłości przy przejściu przez powierzchnie podziału między poszczególnymi warstwami, zarówno dla temperatury jak i dla strumienia ciepła, nasz problem polega na znalezieniu rozwiązań $u_k = u_k(x, y, z, t)$ układu równań

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_k}{\partial t} = \varkappa_k \Delta u_k, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ &\frac{\partial u_n}{\partial t} = \varkappa_n \Delta u_n, \quad x > x_{n-1}, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad t > 0, \\ &\varkappa_k = \frac{\lambda_k}{c_k \gamma_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

z następującymi warunkami:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = q(y, z), \quad x = 0, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} u_k = u_{k+1}, \quad \Lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}, \quad x = x_k, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad t > 0, \\ \Lambda_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$u_n(x, y, z, t) \to 0, \quad \text{gdy} \quad x \to \infty, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad t > 0, \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} u_k(x, y, z, 0) = 0, \quad x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ u_n(x, y, z, 0) = 0, \quad x \geqslant x_{n-1}, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Ponadto zakładamy, że dana funkcja $q(y, z)$ jest takiego rodzaju, że zapewnia spełnienie warunku

$$u_k(x, y, z, t) \to 0, \quad y^2+z^2 \to \infty, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.8}$$

Uzyskane wyniki będą słuszne również w licznych przypadkach odbiegających od tych założeń.

2. Transformaty Fouriera

Stosując znaną operację

$$\begin{gathered} \tilde{h}(\eta, \zeta) = F[h(y, z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int h(y, z)\, e^{i(\eta y + \zeta z)}\, dy\, dz, \\ h(y, z) = F^{-1}[\tilde{h}(\eta, \zeta)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \tilde{h}(\eta, \zeta)\, e^{-i(\eta y + \zeta z)}\, d\eta\, d\zeta \end{gathered} \tag{2.1}$$

sprowadzamy nasze zagadnienie (1.3)-(1.8) do następujących równań i warunków

$$\begin{gathered} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} = \varkappa_k \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial x^2} - \varrho^2 \tilde{u}_k \right), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} = \varkappa_n \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2} - \varrho^2 \tilde{u}_n \right), \quad x > x_{n-1}, \quad t > 0, \quad \varrho^2 = \eta^2 + \zeta^2, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} = \tilde{q}(\eta, \zeta), \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k+1}, \quad \Lambda_k \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}_{k+1}}{\partial x}, \quad x = x_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{2.4}$$

$$\tilde{u}_n \to 0, \quad \text{gdy} \quad x \to \infty, \quad t > 0, \tag{2.5}$$

$$\tilde{u}_k = 0, \quad x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad t = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \qquad \tilde{u}_n = 0, \quad x > x_{n-1}, \quad t = 0. \tag{2.6}$$

Zadanie nasze sprowadziliśmy do wyznaczenia transformat Fouriera $\tilde{u}_k = \tilde{u}_k(x, \eta, \zeta, t)$ poszukiwanych funkcji temperatury $u_k = u_k(x, y, z, t)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

3. Transformaty Laplace'a

Transformacja Laplace'a w postaci

$$\tilde{h}(p) = L[h(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} h(t)\, dt \tag{3.1}$$

sprowadza nasz problem (2.2)-(2.6) do zwyczajnego zagadnienia

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{u}}_k}{dx^2} - \frac{1}{\varkappa_k}(p + \varkappa_k \varrho^2)\tilde{\tilde{u}}_k = 0, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \qquad \frac{d^2 \tilde{\tilde{u}}_n}{dx^2} - \frac{1}{\varkappa_n}(p + \varkappa_n \varrho^2)\tilde{\tilde{u}}_n = 0, \quad x > x_{n-1}, \tag{3.2}$$

$$\lambda_1 \frac{d\tilde{\tilde{u}}_1}{dx} + \frac{1}{p}\tilde{q}(\eta, \zeta) = 0, \quad x = 0, \tag{3.3}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_k = \tilde{\tilde{u}}_{k+1}, \quad \Lambda_k \frac{d\tilde{\tilde{u}}_k}{dx} = \frac{d\tilde{\tilde{u}}_{k+1}}{dx}, \quad x = x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{3.4}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_n \to 0, \quad \text{gdy} \quad x \to \infty \tag{3.5}$$

określającego transformaty Laplace'a $\tilde{\tilde{u}}_k = \tilde{\tilde{u}}_k(x, \eta, \zeta, p)$ dla transformat Fouriera $\tilde{u}_k(x, \eta, \zeta, t)$ wprowadzonych w p. 2.

4. Funkcje $\tilde{\tilde{u}}_k(x, \eta, \zeta, p)$

Całkowanie (3.2) daje w przypadku ogólnym funkcję

$$\tilde{\tilde{u}}_k = A_k \operatorname{ch} q_k(x - x_{k-1}) + B_k \operatorname{sh} q_k(x - x_{k-1}), \qquad q_k^2 = \frac{1}{\varkappa_k}(p + \varkappa_k \varrho^2), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{4.1}$$

które spełniają również dodatkowe warunki (3.3)-(3.5) wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\lambda_1 q_1 B_1 + \frac{1}{p}\tilde{q}(\eta, \zeta) = 0, \quad A_n + B_n = 0, \tag{4.2}$$

$$A_{k+1} = A_k \operatorname{ch} q_k l_k + B_k \operatorname{sh} q_k l_k, \qquad B_{k+1} = \frac{\Lambda_k q_k}{q_{k+1}}(A_k \operatorname{sh} q_k l_k + B_k \operatorname{ch} q_k l_k), \qquad l_k = x_k - x_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{4.3}$$

Najlepszy sposób poszukiwania nieznanych współczynników $A_k = A_k(\eta, \zeta, p)$, $B_k = B_k(\eta, \zeta, p)$ w (4.2) i (4.3) uzyskałoby się prawdopodobnie na drodze analizy macierzowej, [2].

Wprowadzenie macierzy

$$
K_k = \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad M_k(\varrho, p) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} q_k l_k, & \operatorname{sh} q_k l_k \\ \frac{\Lambda_k q_k}{q_{k+1}} \operatorname{sh} q_k l_k, & \frac{\Lambda_k q_k}{q_{k+1}} \operatorname{ch} q_k l_k \end{bmatrix}, \tag{4.4}
$$

$$
1 \leqslant k \leqslant n-1
$$

pozwala napisać równania (4.3) w postaci

$$
K_{k+1} = M_k(\varrho, p)\, K_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,
$$

z której, ze względu na pierwszy warunek (4.2), wynika

$$
K_{k+1} = P_k(\varrho, p) \begin{bmatrix} A_1 \\ -\frac{1}{\lambda_1 p q_1} \tilde{q}(\eta, \zeta) \end{bmatrix}, \tag{4.5}
$$

$$
P_k(\varrho, p) = M_k(\varrho, p)\, M_{k-1}(\varrho, p) \ldots M_1(\varrho, p), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1.
$$

Wprowadzając oznaczenie $P_k(\varrho, p) = [p_k^{(r,s)}(\varrho, p)]$, $r, s = 1, 2$, obliczając A_n, B_n z ostatniego warunku (4.5) i podstawiając do drugiego warunku (4.2), otrzymujemy wartość A_1. Wówczas równanie (4.5) określa pozostałe współczynniki A_k i B_k.

W całości otrzymujemy następujące rozwiązanie równań (4.2) i (4.3):

$$
A_1 = \frac{Z(\varrho, p)}{\lambda_1 p q_1 N(\varrho, p)} \tilde{q}(\eta, \zeta), \qquad B_1 = -\frac{1}{\lambda_1 p q_1} \tilde{q}(\eta, \zeta),
$$

$$
\begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{P_k(\varrho, p)}{\lambda_1 p q_1 N(\varrho, p)} \begin{bmatrix} Z(\varrho, p) \\ -N(\varrho, p) \end{bmatrix} \tilde{q}(\eta, \zeta), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{4.6}
$$

$$
Z(\varrho, p) = p_{n-1}^{(12)}(\varrho, p) + p_{n-1}^{(22)}(\varrho, p), \qquad N(\varrho, p) = p_{n-1}^{(11)}(\varrho, p) + p_{n-1}^{(21)}(\varrho, p);
$$

przy tym $\tilde{q}(\eta, \zeta)$ jest transformatą Fouriera danego strumienia $q(y, z)$.

Podstawienie wyrażeń na A_k i B_k z (4.6) do wzoru (4.1) daje rozwiązanie naszego pomocniczego problemu (3.2)-(3.5), tj. transformatę Laplace'a $\tilde{\tilde{u}}_k(x, \eta, \zeta, p)$.

5. Ogólne rozwiązanie

Mając znalezione za pomocą (4.1) i (4.6) transformaty $\tilde{\tilde{u}}_k = \tilde{\tilde{u}}_k(x, \eta, \zeta, p)$, można otrzymać funkcje $\tilde{u}_k = \tilde{u}_k(x, \eta, \zeta, t)$, tj. rozwiązanie pierwszego pomocniczego zagadnienia (2.2)-(2.6). Można tego dokonać metodami rachunku operatorowego lub przez całkowanie po konturze. W końcu poszukiwane rozwiązania

$u_k(x, y, z, t)$ naszego początkowego zagadnienia (1.3)-(1.8) znajdujemy z transformat Fouriera $\tilde{u}_k(x, \eta, \zeta, t)$ po zastosowaniu drugiego wzoru (2.1) w postaci

$$(5.1) \qquad u_k(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_k(x, \eta, \zeta, t)\, e^{-i(\eta y + \zeta z)}\, d\eta\, d\xi, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Najtrudniejsza część metody polega na niemożliwości określenia zamkniętej formy macierzy $P_k(\varrho, p)$ zdefiniowanych przez (4.4) i (4.5). Rozważymy pokrótce przynajmniej najprostszy przypadek ciała jednorodnego.

6. Przypadek jednorodności

Niech λ, c i γ oznaczają odpowiednio współczynnik przewodnictwa cieplnego, ciepło właściwe i gęstość materiału. Na podstawie (1.3) i (1.5) mamy

$$\varkappa_k = \varkappa = \frac{\lambda}{c\gamma}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \Lambda_k = 1, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

z definicji zaś q_k w (4.1) wynika

$$q_k^2 = q^2 = \frac{1}{\varkappa}(p + \varkappa\varrho^2), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Macierze $M_k(\varrho, p)$ z (4.4) przybierają prostą postać, typową np. w teorii czterech biegunów elektrycznych; możemy zatem wykonać mnożenie macierzy jak zaznaczono w (4.5). Daje to

$$P_k(\varrho, p) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} qx_k, & \operatorname{sh} qx_k \\ \operatorname{sh} qx_k, & \operatorname{ch} qx_k \end{bmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

a wzory (4.6) prowadzą do

$$A_k = -B_k = \frac{e^{-qx_{k-1}}}{\lambda pq} \tilde{q}(\eta, \xi), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Podstawienie powyższych wyników do (4.1) wyznacza rozwiązanie $\tilde{\tilde{u}}_k(x, \eta, \zeta, p)$ równań (3.2)-(3.5) w postaci

$$\tilde{\tilde{u}}_k(x, \eta, \zeta, p) = \frac{e^{-qx}}{\lambda pq} \tilde{q}(\eta, \zeta), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

W następstwie tego w całym obszarze ciała mamy określoną taką samą funkcję

$$(6.1) \qquad \tilde{\tilde{u}}(x, \eta, \zeta, p) = \frac{e^{-qx}}{\lambda pq} \tilde{q}(\eta, \zeta), \qquad x > 0, \qquad q = (\varrho^2 + p/\varkappa)^{1/2}, \qquad \varrho^2 = \eta^2 + \zeta^2,$$

która pozwala określić transformatę Fouriera

$$\tilde{u}(x,\eta,\xi,t)=\frac{\tilde{q}(\eta,\zeta)}{2\lambda\varrho}\left[e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)-e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)\right],$$

(6.2)

$$\varrho=\sqrt{\eta^2+\zeta^2},\qquad \Psi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}\,d\zeta$$

poszukiwanej funkcji temperatury $u(x,y,z,t)$.

Drugi wzór (2.1) daje rozwiązanie

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi\lambda}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(\eta,\zeta)}{\varrho}\left[e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)-\right.$$
$$\left.-e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)\right]e^{-i(\eta y+\zeta z)}\,d\eta\,d\zeta, \tag{6.3}$$

przy czym ϱ i Ψ są zdefiniowane przez (6.2).

Elementarny wzór teorii transformacji (2.1)

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{\varrho}\left[e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)-e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)\right]\right\}=$$
$$=\int_0^\infty\left[e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)-e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)\right]J_0(r\varrho)\,d\varrho,\qquad r^2=y^2+z^2$$

oraz odpowiednie twierdzenie o splocie prowadzą do odmiennej postaci wyniku (6.3), mianowicie

(6.4.1)

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi\lambda}\int\int_{-\infty}^{\infty}q(y-\sigma,z-\omega)\,d\sigma\,d\omega\int_0^\infty\left[e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)-\right.$$
$$\left.-e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)\right]J_0\left(\varrho\sqrt{\sigma^2+\omega^2}\right)d\varrho$$

lub

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi\lambda}\int\int_{-\infty}^{\infty}q(\sigma,\omega)\,d\sigma\,d\omega\int_0^\infty\left[e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}-\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)-\right.$$
$$\left.-e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\varrho\sqrt{\varkappa t}\right)\right]J_0\left[\varrho\sqrt{(y-\sigma)^2+(z-\omega)^2}\right]d\varrho. \tag{6.4.2}$$

Dalsze obliczenia zależą od konkretnej postaci danej funkcji strumienia $q(y,z)$; są one skomplikowane nawet w całkiem prostych przypadkach. Jako przykład można rozważyć zagadnienie Oosterkampa zdefiniowane matematycznie w sposób następujący:

(6.5) $q(y, z) = Q$ dla $0 \leqslant y^2+z^2 < R^2$, $q(y, z) = 0$ dla $y^2+z^2 > R^2$,

gdzie Q i R są stałymi dodatnimi.

Wykorzystując oznaczenie

$$(6.6) \qquad U(x, t; \varrho) = e^{-\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} - \varrho\sqrt{\varkappa t}\right) - e^{\varrho x}\Psi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} + \varrho\sqrt{\varkappa t}\right)$$

oraz podstawiając $y = r\cos\beta$, $z = r\sin\beta$, $\sigma = s\cos\varphi$, $\omega = s\sin\varphi$ otrzymujemy nasz ogólny wynik (6.4.2) dla rozważanego przypadku (6.5) w postaci

$$u(x, y, z, t) = \frac{Q}{4\pi\lambda}\int_0^R s\,ds\int_\beta^{2\pi+\beta} d\varphi\int_0^\infty U(x, t; \varrho)\,J_0\left[\varrho\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-\beta)}\right]d\varrho.$$

Zmiana kolejności całkowania oraz wzięcie pod uwagę wyniku Gegenbauera

$$\int_0^{2\pi} J_0\left(\varrho\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\psi}\right)d\psi = 2\pi J_0(\varrho r)\,J_0(\varrho s)$$

prowadzą do ostatecznego rozwiązania

$$(6.7) \qquad u(x, y, z, t) = \frac{QR}{2\lambda}\int_0^\infty J_0(\varrho r)\,J_1(\varrho R)\,U(x, t; \varrho)\frac{d\varrho}{\varrho}$$

wyżej wymienionego przypadku Oosterkampa (6.5). Funkcję $U(x, t; \varrho)$ określa wzór (6.6), dopełniającą funkcję błędu Ψ (6.2).

Literatura cytowana w tekście

[1] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1959.

[2] V. Vodička, *Three-dimensional steady temperature in a stratiform doubly infinite strip*, Acta Phys. Austr., 3, **15** (1962), 193-200.

Резюме

ПОВЕРХНОСТНЫЙ НАГРЕВ МНОГОСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Цель работы состоит в определении нестационарного температурного поля в теле

$$x \geqslant 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty,$$

состоящем из n однородных изотропных частей

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad x_0 = 0, \quad x \geqslant x_{n-1}, \quad -\infty < y,\ z < \infty.$$

Тело, начиная с момента $t = 0$, подвергается нагреву на поверхности $x = 0$ потоком тепла, интенсивность которого составляет $q(y, z)$, а его начальная температура равняется нулю. Общие результаты применяются к случаю однородного полупространства. В качестве особой задачи решается некоторая задача Остеркампа.

Summary

A MULTI-LAYER SEMI-INFINITE BODY SUBJECT TO HEATING ON THE SURFACE

The object of the paper is to determine the non-steady temperature field in the body

$$x \geqslant 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

composed of n homogeneous isotropic layers

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad x_0 = 0, \quad x \geqslant x_{n-1}, \quad -\infty < y,\ z < \infty.$$

Stating at the moment $t = 0$ the body is heated on the surface $x = 0$, the heat being supplied at the rate $q(y, z)$. The initial temperature is zero. The general results are applied to the case of homogeneous semi-space. A certain Oosterkamp's problem is solved as a simple special case.

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1963 r.