

## PRZYKŁADY OBLICZENIA KRZYWYCH NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

MIŁOSZ WNUK (KRAKÓW)

## 1. Sformułowanie zagadnienia

Przy obliczaniu elementów konstrukcji z uwzględnieniem ich własności plastycznych istotną rolę odgrywa znajomość tzw. powierzchni granicznej, określonej w przestrzeni obciążeń zewnętrznych za pomocą równania

$$(1.1) \quad F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0,$$

gdzie  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) oznaczają uogólnione siły zewnętrzne działające na rozpatrywany element.

Zazwyczaj wprowadza się zmienne bezwymiarowe  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , które otrzymujemy dzieląc  $i$ -tą siłę uogólnioną przez jej wartość graniczną  $\bar{Q}_i$  uzyskaną w przypadku, gdy wszystkie pozostałe siły  $Q_k$  dla  $k \neq i$  są równe zeru, a zatem w przypadku obciążenia jednowymiarowego (np. czyste skręcanie, czyste rozciąganie itd.). Układ sił  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  lub równoważny mu układ obciążeń bezwymiarowych  $q_1, q_2, \dots, q_n$  nazywamy granicznym (lub niszczącym), jeżeli spełnia równanie (1.1)

Nie trudno podać interpretację geometryczną osiągnięcia stanu granicznego: dopóki koniec wektora  $Q_i$  pozostaje wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią  $F = 0$ , dotąd nośność graniczna pozostaje nie wyczerpana; w chwili gdy koniec wektora obciążeń uogólnionych dotyka powierzchni granicznej, mówimy o zniszczeniu konstrukcji w sensie osiągnięcia nośności plastycznej.

Znajomość równania powierzchni  $F(Q_i) = 0$  pozwala więc ocenić oddalenie aktualnego układu obciążeń ( $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ) od stanu granicznego, co z punktu widzenia praktyki inżynierskiej posiada pierwszorzędne znaczenie. Pełniejsze omówienie zagadnień wyężenia konstrukcji oraz wiążącego się z tym zagadnienia geometrycznej interpretacji stanów granicznych można znaleźć w pracach M. ŻYCKOWSKIEGO [11] i [12].

W niniejszej pracy zajmiemy się efektywnym rozwiązaniem problemu nośności granicznej w przypadku obciążenia «dwuwymiarowego»:  $n = 2$ ,  $Q_1 = M_s$  oraz  $Q_2 = N$  ( $M_s$  oznacza skręcający,  $N$  siłę podłużną), przy czym wykorzystamy podstawy teoretyczne podane w pracy [8]. Rozpatrzmy kilka różnych, najczęściej spotykanych w praktyce kształtów przekroju poprzecznego pręta, zwracając uwagę na wpływ kształtu przekroju na postać szukanej krzywej granicznej  $f(M_s, N) = 0$  (wielkości decydujące o charakterze tej krzywej zostaną określone analitycznie oraz za pomocą tablic).

## 2. Równanie krzywej nośności granicznej w płaszczyźnie $M_sN$ dla dowolnego kształtu przekroju

W niniejszych rozważaniach nie będziemy zajmować się analizą rozkładu naprężeń w stanie granicznym wywołanym jednoczesnym działaniem momentu skręcającego  $M_s$  oraz siły podłużnej  $N$ . Odpowiednie wzory oraz podstawy teoretyczne umożliwiające obliczenie składowych tensora naprężeń

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

zostały podane w pracy [8]. Obecnie skorzystamy z ogólnego równania krzywej granicznej, [8],

$$(2.2) \quad m_s^2 + \left(3 - \frac{1}{a}\right)n^2 + \left(\frac{1}{a} - 2\right)n^3 = 1,$$

gdzie  $m_s$  oznacza bezwymiarowy moment skręcający,  $m_s = M_s/\bar{M}_s$ ,  $n$  bezwymiarową siłę podłużną,  $n = N/\bar{N}$ ,  $a$  współczynnik zależny od kształtu przekroju a  $\bar{M}_s$  i  $\bar{N}$  odpowiednio graniczne wartości momentu skręcającego oraz siły podłużnej przy czystym skręcaniu i czystym rozciąganiu. Równanie to, jak wykazaliśmy, stosuje się dla dowolnego kształtu przekroju. Znaczenie współczynnika  $a$  można określić następująco: jeżeli równanie krzywej granicznej

$$(2.3) \quad f(m_s, n) = 0$$

rozwikłamy ze względu na  $n$ ,

$$(2.4) \quad n = n(m_s),$$

i rozwiemy na szereg potęgowy Maclaurina

$$(2.5) \quad n = 1 - am_s^2 - \dots,$$

to współczynnik występujący przy wyrazie  $m_s^2$  będzie identyczny z wielkością  $\alpha$ , która została wprowadzona do równania (2.2). Współczynnik ten, określający kształt krzywej nośności granicznej, może być znaleziony ze wzorów, [8],

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{V_N^2}{FV_p}, \quad \alpha = \frac{2V_N^2}{FI_s}$$

lub inaczej (dla przekroju jednospójnego)

$$(2.7) \quad \alpha = \frac{\left[ \int_F \int_F \Phi dF \right]^2}{F \int_F \int_F \Psi dF},$$

gdzie  $F$  oznacza pole przekroju,  $V_n$  objętość wżgorza piasku wg. analogii A. Nádaia (wielkość charakteryzująca sztywność skręcania w zakresie czysto plastycznym),

$V_P$  objętość wzgórza Prandtla (wielkość charakteryzująca sztywność skręcania w zakresie czysto sprężystym),  $I_s = 2V_P$  zastępczy moment bezwładności przekroju przy skręcaniu.

Omawiane wielkości posiadają następujące wymiary:

$$F [\text{cm}^2], \quad \Phi [\text{cm}], \quad \Psi [\text{cm}^2], \quad V_N [\text{cm}^3], \quad V_P [\text{cm}^4] \quad \text{oraz} \quad I_s [\text{cm}^4].$$

Wzór (2.7) określa w sposób jawny  $\alpha$  w zależności od funkcji naprężeń, a mianowicie:

1)  $\Phi = \Phi(x, y)$  jest funkcją naprężeń Hilla, odnoszącą się do stanu granicznego ( $M_s, 0$ ); związana jest ona z polem naprężeń (2.1) w następujący sposób:

$$(2.8) \quad \nu\tau_{zx} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \nu\tau_{zy} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \nu\sigma_z = \sqrt{Q^2 - 3\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]} = 0,$$

gdzie  $x, y$  oznaczają współrzędne wymiarowe oraz  $Q$  granicę plastyczności, przy czym indeks  $p$  dajemy dla zaznaczenia, że chodzi tu o stan naprężenia w zakresie pełnego uplastycznienia. Funkcja naprężeń  $\Phi(x, y)$  powinna spełniać równanie różniczkowe

$$(2.9) \quad |\text{grad } \Phi| = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

oraz warunek brzegowy  $\Phi = 0$  wzdłuż konturu  $C$ .

2)  $\Psi = \Psi(x, y)$  jest funkcją naprężeń Prandtla, odnoszącą się do zagadnienia swobodnego skręcania w zakresie czysto sprężystym (problem Saint Venanta); związana jest ona ze stanem naprężenia związkami

$$(2.10) \quad \nu\tau_{zx} = -G\vartheta \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \nu\tau_{zy} = G\vartheta \frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

oraz spełnia równanie

$$(2.11) \quad \nabla^2 \Psi = -2$$

i warunek brzegowy  $\Psi = 0$  wzdłuż konturu  $C$ . Jeżeli  $f(x, y) = 0$  jest równaniem konturu, to zarówno funkcja  $\Phi$  jak i  $\Psi$  zależą od kształtu konturu:  $\Phi = \Phi[f(x, y)]$ ,  $\Psi = \Psi[f(x, y)]$  i również  $F = F[f(x, y)]$ . Współczynnik  $\alpha$  określający kształt krzywej nośności granicznej (2.2) wyraża się więc przez pewne funkcjonały  $V_N, V_P$  i  $F$  zależne tylko od kształtu konturu ograniczającego rozpatrywany przekrój.

Wzór (2.2) został wyprowadzony na gruncie teorii odkształceń plastycznych Hencky'ego - Iliuszina przy założeniu istnienia materiału izotropowego, idealnie sprężysto - plastycznego i nieściśliwego. W celu efektywnego rozwiązania problemu zastosowano metodę małego parametru a następnie interpolację typu Hermite'a. Ścisłe równanie krzywej granicznej  $f(m_s, n) = 0$  nie jest dotychczas znane; zastosowanie jednakże twierdzeń wariacyjnych teorii plastyczności (kresy górne oraz dolne) pozwala na oszacowanie dokładności wzoru (2.2). Wykazaliśmy, że wzór ten daje wyniki bardzo zbliżone do wartości ścisłych, popełniany błąd nie przekracza 3%. Szeroki zakres stosowalności oraz prosta budowa równania (2.2) zachęca

do efektywnego określenia nośności granicznej dla rozmaitych kształtów przekroju poprzecznego.

Wzory (2.6) można stosować również dla przekrojów wielospójnych, przy czym wielkość  $V_N$  powinna być określona zgodnie z uogólnioną analogią A. Nádai'a dla przekrojów wielospójnych w sposób podany przez M. A. SADOWSKYEGO, [7]:

$$(2.12) \quad V_N = V_0 + S_1 h_1 + S_2 h_2 + \dots + S_n h_n,$$

gdzie  $V_0 = \iint \Phi dF$  oznacza objętość wzgórza piasku według analogii M. A. SADOWSKYEGO,  $S_i$  powierzchnię  $i$ -tego otworu,  $h_i$  - wysokość wzgórza piasku na krawędzi  $i$ -tego otworu oraz  $n$  ilość otworów [przekrój jest  $(n+1)$ -spójny]. Korzystanie ze wzorów (2.2) oraz (2.6) umożliwia napisanie równania krzywej nośności granicznej bez dokonywania analizy rozkładu naprężeń w stanie granicznym. Wniosek ten w sposób istotny ułatwi nam efektywne rozwiązanie kilku przypadków szczególnych dotyczących różnych kształtów przekroju poprzecznego, często spotykanych w praktyce.

### 3. Przekrój o kształcie dowolnego wielokąta foremnego

Objętość wzgórza piaskowego  $V_N$  (przy przyjęciu  $\operatorname{tg} \mu = 1$ , gdzie  $\mu$  jest kątem zsypu) może być dla rozpatrywanego przekroju określona prostym wzorem

$$(3.1) \quad V_N = \frac{1}{3} Fr,$$

gdzie  $r$  jest promieniem koła wpisanego. Wówczas drugi spośród wzorów (2.6) przyjmie postać

$$(3.2) \quad a = \frac{2}{9} \frac{Fr^2}{I_s}$$

dogodną do dalszych obliczeń.

Dla  $p = 3$  (trójkąt równoboczny o boku  $a$ ) mamy

$$(3.3) \quad F = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad I_s = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4.$$

Po wstawieniu do (3.2) otrzymujemy

$$(3.4) \quad a = \frac{10}{27} = 0,3704$$

oraz równanie (2.2) poszukiwanej krzywej granicznej

$$(3.5) \quad m_s^2 + 0,3000 n^2 + 0,7000 n^3 = 1.$$

Analogicznie dla  $p = 4$  (kwadrat o boku  $a$ ) znajdujemy

$$(3.6) \quad F = a^2, \quad r = \frac{a}{2}, \quad I_s = 0,1406 a^4,$$

zatem

$$(3.7) \quad \alpha = 0,3954$$

i równanie krzywej granicznej

$$(3.8) \quad m_s^2 + 0,4709 n^2 + 0,5291 n^3 = 1.$$

Dla  $p = 6$ , uwzględniając

$$(3.9) \quad F = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2, \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad I_s = 1,0477 a^4$$

otrzymujemy

$$(3.10) \quad \alpha = 0,4129$$

i równanie krzywej granicznej

$$(3.11) \quad m_s^2 + 0,5779 n^2 + 0,4221 n^3 = 1.$$

Wreszcie dla  $p > 6$ , a więc dla wszystkich wielokątów umiarowych o liczbie boków większej od sześciu, nośność graniczna może być określona jednym przybliżonym równaniem z błędem  $\Delta < 1\%$ . Równanie to wyprowadzimy korzystając z «uniwersalnego» przybliżonego wzoru Saint Venanta<sup>1</sup>

$$(3.12) \quad I_s = \frac{1}{4\pi^2} \frac{F^4}{I_0},$$

gdzie dla dowolnego wielokąta foremnego

$$(3.13) \quad F = \frac{p}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{p},$$

gdzie  $R$  jest promieniem koła opisanego, oraz biegunowy moment bezwładności

$$(3.14) \quad I_0 = \frac{pR^4}{4} \sin \frac{2\pi}{p} \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{p} \right).$$

Uwzględniając ponadto

$$(3.15) \quad \frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{p}}$$

otrzymujemy

$$(3.16) \quad \alpha = \frac{4\pi^2}{9p^2} \frac{1 - 2/3 \sin^2 \pi/p}{\sin^2 \pi/p}$$

<sup>1</sup> Jest to wzór przybliżony dla zakresu sprężystego i dowolnych kształtów przekroju — z dużymi na ogół błędami. W naszym przypadku ( $p > 6$ ) błąd nie przekracza 2%, natomiast dla  $p \rightarrow \infty$ , to jest w przypadku przekroju kołowego, wzór (3.12) staje się ścisły.

i równanie krzywej granicznej

$$(3.17) \quad m_s^2 + \left[ 3 - \frac{9p^2}{4\pi^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{p}}{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{p}} \right] n^2 + \left[ \frac{9p^2}{4\pi^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{p}}{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{p}} - 2 \right] n^3 = 1.$$

Przy przejściu granicznym  $p \rightarrow \infty$ , gdy wielokąt przekształca się w koło, otrzymujemy

$$(3.18) \quad a = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{4\pi^2}{9p^2} \frac{1 - 2/3 \sin^2 \pi/p}{\sin^2 \pi/p} = \frac{4}{9}.$$

Równanie krzywej granicznej przybiera wówczas postać

$$(3.19) \quad m_s^2 + 0,7500 n^2 + 0,2500 n^3 = 1,$$

co jest identyczne ze znanym, [4], [5], [6] i [10], rozwiązaniem ścisłym.

#### 4. Pierścień kołowy

Przypadek przekroju o kształcie pierścienia kołowego (rys. 1) rozwiążemy dwukrotnie: 1) w oparciu o analizę stanu naprężenia w sposób ścisły oraz 2) korzystając z podanych wzorów (2.2) i (2.6).

Stan naprężenia wyrażony we współrzędnych biegunowych  $r, \theta$  jest określony (por. M. ŻYCZKOWSKI, [10]) za pomocą wzorów

$$(4.1) \quad \tau_{z\theta} = \frac{Q}{\sqrt{3}} \frac{\varrho}{\sqrt{\kappa^2 + \varrho^2}}, \quad \sigma_z = Q\kappa \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \varrho^2}},$$

gdzie  $\kappa = \sqrt{3}\varepsilon/b\vartheta$  oznacza bezwymiarowy parametr,  $\varrho = r/b$  bezwymiarowy promień. Siły zewnętrzne  $M_s$  i  $N$  wyrażają się za pomocą elementarnych całek

$$(4.2) \quad N = b^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_p^1 \sigma_z \varrho d\varrho = 2\pi Q b^2 \kappa \int_p^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\kappa^2 + \varrho^2}} = \\ = 2\pi Q b^2 \kappa (\sqrt{\kappa^2 + 1} - \sqrt{\kappa^2 + p^2})$$

oraz

$$(4.3) \quad M_s = b^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_p^1 \tau_{z\theta} \varrho^2 d\varrho = \frac{2\pi Q b^3}{\sqrt{3}} \int_p^1 \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{\kappa^2 + \varrho^2}} = \\ = \frac{2\pi Q b^3}{3\sqrt{3}} [\sqrt{\kappa^2 + 1} (1 - 2\kappa^2) - \sqrt{\kappa^2 + p^2} (p^2 - 2\kappa^2)],$$

gdzie przez  $p$  oznaczyliśmy stosunek promieni,  $p = a/b$ . Równania (4.2) oraz (4.3) można przepisać w postaci bezwymiarowej, jeżeli uwzględnić wzory określające graniczne wartości obciążeń zewnętrznych dla rozpatrywanego przekroju, a mianowicie

$$(4.4) \quad \bar{N} = \pi Q b^2 (1 - p^2), \quad \bar{M}_s = \frac{2\pi Q b^3}{3\sqrt{3}} (1 - p^3).$$

Otrzymujemy zatem

$$(4.5) \quad \begin{aligned} n &= \frac{2\kappa}{1-p^2} \left[ \sqrt{\kappa^2+1} - \sqrt{\kappa^2+p^2} \right], \\ m_s &= \frac{1}{1-p^3} \left[ \sqrt{\kappa^2+1} (1-2\kappa^2) - \sqrt{\kappa^2+p^2} (p^2-2\kappa^2) \right]. \end{aligned}$$

Jest to parametryczne równanie krzywej granicznej  $n = n(\kappa)$ ,  $m_s = m_s(\kappa)$ . Wyrażenia (4.5) przekształcamy następnie tak, aby w mianowniku po prawej stronie obydwu równań nie występował czynnik  $(1-p)$ . Po wykonaniu potrzebnych przekształceń otrzymujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} n &= \frac{2\kappa}{\sqrt{\kappa+1} + \sqrt{\kappa^2+p^2}}, \\ m_s &= \frac{(1+p+p^2)(1+p^3) - 3\kappa^2(1+p)(1+p^2)}{(1+p+p^2) [\sqrt{\kappa^2+1}(1-2\kappa^2) + \sqrt{\kappa^2+p^2}(p^2-2\kappa^2)]}. \end{aligned}$$

Stąd po wyrugowaniu parametru  $\kappa$ , co wymaga długich i żmudnych przekształceń, otrzymalibyśmy pełne równanie krzywej nośności granicznej  $f(m_s, n) = 0$ .

M. A. SADOWSKY, [6], podał wspomniane równanie w roku 1943, jednakże postać tego równania jest bardzo złożona i nie nadaje się do dalszych obliczeń, tj. do wymiarowania przekroju według nośności granicznej.

Postąpimy więc inaczej. Przede wszystkim zauważmy, że dla  $p \rightarrow 1$ , tzn. w przypadku, gdy grubość pierścienia jest bardzo mała, mamy

$$(4.7) \quad \lim_{p \rightarrow 1} m_s = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+1}}, \quad \lim_{p \rightarrow 1} n = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+1}}.$$

Rugując stąd parametr  $\kappa$  otrzymujemy bez trudu ściśle równanie krzywej granicznej dla pierścienia cienkościennego:

$$(4.8) \quad m_s = \sqrt{1-n^2}.$$

Dla dowolnych  $p$  zawartych w przedziale  $\langle 0,1 \rangle$  możemy rozwinąć wyrażenia ściśle (4.6) w odpowiednie szeregi potęgowe parametru

$$(4.9) \quad \xi = \frac{1}{\kappa}$$

w otoczeniu punktu  $\xi = 0$  ( $\kappa = \infty$ ). Otrzymujemy w ten sposób

$$(4.10) \quad n = 1 - \frac{1+p^2}{4} \xi^2 - \dots, \quad m_s = \frac{3}{4} \frac{1-p^4}{1-p^3} \xi + \dots$$

Drugi z szeregów (4.10) nie trudno odwrócić znajdując

$$(4.11) \quad \xi = m_s \frac{4}{3} \frac{1-p^3}{1-p^4} + \dots,$$

co po wstawieniu do pierwszego ze wzorów (4.10) daje

$$(4.12) \quad n = 1 - \frac{4}{9} \frac{(1+p+p^2)^2}{(1+p^2)(1+p)^2} m_s^2 - \dots$$

Stąd przez porównanie z szeregiem (2.5) znajdujemy współczynnik  $\alpha$

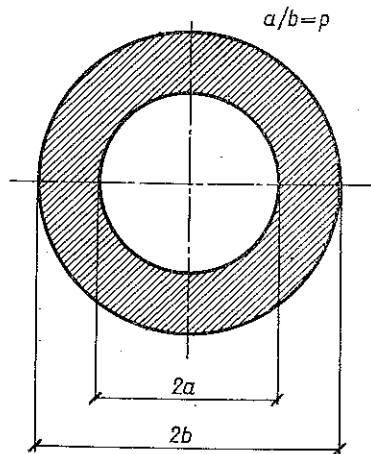
$$(4.13) \quad \alpha = \frac{4}{9} \frac{(1+p+p^2)^2}{(1+p^2)(1+p)^2}$$

W szczególności dla  $p = 0$  (przekrój kołowy) otrzymujemy  $\alpha = 4/9$ , jak być powinno, oraz dla  $p = 1$  (pierścień cienkościenny) mamy  $\alpha = 1/2$ , co jest w zgodzie ze ścisłym wyrażeniem (4.8). Aby wykazać, że tak jest istotnie, rozwikłajmy wyrażenie (4.8) ze względu na  $n$  oraz rozwińmy otrzymane wyrażenie na szereg potęgowy w otoczeniu punktu  $m_s = 0$ :

$$(4.14) \quad n = \sqrt{1 - m_s^2} = 1 - \frac{1}{2} m_s^2 - \dots,$$

czyli dostajemy  $\alpha = 1/2$ , zgodnie z przewidywaniem.

Warto zauważyć, że wzór (4.13) możemy uzyskać natychmiast ze wzoru ogólnego (2.6) pomijając całą analizę stanu naprężenia, jaką przeprowadziliśmy. Dla pierścienia kołowego (rys. 1) mamy



Rys. 1

$$(4.15) \quad \begin{aligned} F &= \pi b^2 (1 - p^2), & V_N &= \frac{\pi}{3} b^3 (1 - p^3), \\ V_P &= \frac{\pi}{4} b^4 (1 - p^4). \end{aligned}$$

Wielkość  $V_N$  została znaleziona przy użyciu wzoru (2.12), tj. w oparciu o analogię M. A. SADOWSKYEGO, [7], dla przekroju dwuspójnego. Współczynnik  $\alpha$ , obliczony według podanego na wstępie wzoru

$$(4.16) \quad \alpha = \frac{V_N^2}{F V_P} = \frac{4}{9} \frac{(1+p+p^2)^2}{(1+p^2)(1+p)^2}$$

posiada identyczną postać z uzyskaną poprzednio (4.13). Stosując na koniec interpolację typu (2.2), znajdujemy pełne równanie krzywej nośności granicznej  $f(m_s, n) = 0$  dla przekroju pierścieniowego:

$$(4.17) \quad m_s^2 + \left[ 3 - \frac{9}{4} \frac{(1+p^2)(1+p)^2}{(1+p+p^2)^2} \right] n^2 + \left[ \frac{9}{4} \frac{(1+p^2)(1+p)^2}{(1+p+p^2)^2} - 2 \right] n^3 = 1.$$

Łatwo sprawdzić, że w obydwu przypadkach szczególnych  $p = 0$  oraz  $p = 1$  równanie (4.17) jest identyczne z podanymi już równaniami ścisłymi krzywej nośności granicznej  $(M_s, N)$  dla przekroju kołowego oraz pierścienia cienkościennego, odpowiednio.



Równanie krzywej granicznej (4.17) może być zapisane w postaci ogólnej

$$(4.18) \quad m_s^2 + Bn^2 + Cn^3 = 1.$$

Równanie to opisuje jednoparametrową rodzinę krzywych  $B = B(p)$ ,  $C = C(p)$ . Liczbowe wartości współczynników  $\alpha$ ,  $B$  i  $C$  decydujących o kształcie krzywej granicznej (4.17) zebrano w tablicy 1.

Tablica 1

| $p$ | $\alpha$ | $B$    | $C$    |
|-----|----------|--------|--------|
| 0,0 | 0,4444   | 0,7500 | 0,2500 |
| 0,1 | 0,4481   | 0,7684 | 0,2316 |
| 0,2 | 0,4563   | 0,8085 | 0,1915 |
| 0,3 | 0,4662   | 0,8550 | 0,1450 |
| 0,4 | 0,4757   | 0,8978 | 0,1022 |
| 0,5 | 0,4839   | 0,9335 | 0,0665 |
| 0,6 | 0,4903   | 0,9604 | 0,0396 |
| 0,7 | 0,4950   | 0,9798 | 0,0202 |
| 0,8 | 0,4980   | 0,9920 | 0,0080 |
| 0,9 | 0,4995   | 0,9980 | 0,0020 |
| 1,0 | 0,5000   | 1,0000 | 0,0000 |

### 5. Przekrój eliptyczny

Pomijamy analizę stanu naprężenia w stanie granicznym. Znane jest ściśle rozwiązanie zagadnienia Saint Venanta dla przekroju eliptycznego: funkcja naprężeń  $\Psi = \Psi(x, y)$  jest proporcjonalna do lewej strony równania konturu  $f(x, y) = 0$ , nie trudno zatem znaleźć objętość wzgórza Prandtla  $V_P = \frac{1}{2} I_s = \int_F \int \Psi(x, y) dx dy$ . Mamy więc

$$(5.1) \quad F = \pi p a^2, \quad V_P = \frac{\pi}{2} \frac{p^3}{1+p^2} a^4.$$

Znalezienie ścisłego wyrażenia na objętość wzgórza piasku  $V_N$  według analogii A. Nádai'a zmusza do użycia funkcji nieelementarnych, mianowicie pełnych całek eliptycznych pierwszego i drugiego rodzaju. Korzystając z pracy M. GALOSA i M. ŻYCZKOWSKIEGO, [1], przytoczymy gotowy wzór

$$(5.2) \quad V_N = \frac{2}{3} a^3 p^2 [2E(k) - p^2 K(k)],$$

gdzie  $K(k)$ ,  $E(k)$  są to pełne całki eliptyczne odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju oraz  $k = (1 - p^2)^{1/2}$  jest modułem całek. Korzystając z (5.2)-(5.3) oraz ze wzoru (2.6), otrzymujemy współczynnik  $\alpha$  określający kształt krzywej nośności granicznej:

$$(5.3) \quad \alpha = \frac{8}{9\pi^2} (1+p^2) [2E(k) - p^2 K(k)]^2.$$

Nie trudno sprawdzić, że wzór ten daje rezultaty poprawne w obydwu przypadkach szczególnych:

- 1) gdy  $k = 0$ ,  $p = 1$  (przekrój kołowy), to  $\alpha = 4/9$ ;
- 2) gdy  $k = 1$ ,  $p = 0$  (pasma nieskończenie długie), to

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 1 \\ p \rightarrow 0}} \alpha = \frac{32}{9\pi^2} = 0,3604.$$

Należy również wspomnieć o przybliżonym wzorze A. R. RZANICYNA, [5]:

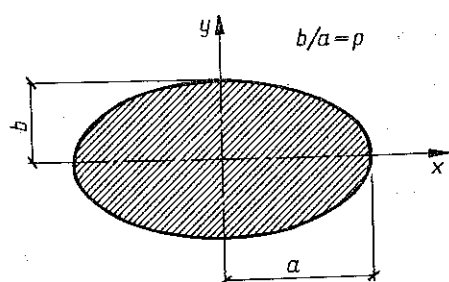
$$(5.4) \quad V_N = \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{p}{1+p},$$

który umożliwi wyrażenie szukanego współczynnika  $\alpha$  bez użycia funkcji nieelementarnych:

$$(5.5) \quad \alpha = \frac{8}{9} \frac{1+p^2}{p^2(1+p)^2}.$$

Wzór ten, jakkolwiek prosty, może być stosowany jedynie dla wartości parametru  $p$  bliskich jedności.

W przypadku, gdy elipsa niewiele różni się od okręgu koła ( $k \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 1$ ), możliwe jest rozwinięcie funkcji  $E(k)$  i  $K(k)$  na szeregi potęgowe zbieżne w otoczeniu punktu  $k = 0$ ; wówczas wzory ściśle (5.2) oraz (5.3) przybiorą postać..



Rys. 2

$$(5.6) \quad V_N = \frac{\pi}{3} a^3 \left( 1 - \frac{3}{4} k^2 - \frac{15}{64} k^4 + \dots \right)$$

oraz

$$(5.7) \quad \alpha = \frac{2}{9} \frac{1+p^2}{p^4} \left( 1 - \frac{3}{2} k^2 + \frac{3}{32} k^4 + \dots \right)$$

lub

$$(5.8) \quad \alpha = \frac{4}{9} \left( 1 - \frac{5}{32} k^4 + \dots \right).$$

Wartości liczbowe współczynników  $\alpha$ ,  $B$  i  $C$  określających kształt krzywej granicznej dla przekroju eliptycznego przy różnych wartościach parametru  $p$  zebrano w tabelicy 2; odpowiednie obliczenia zostały przeprowadzone w oparciu o wzór ściśle (5.3).

Tablica 2

| $p$  | $\alpha$ | $B$    | $C$    |
|------|----------|--------|--------|
| 1,00 | 0,4444   | 0,7500 | 0,2500 |
| 0,9  | 0,4420   | 0,7376 | 0,2624 |
| 0,8  | 0,4350   | 0,7012 | 0,2988 |
| 0,7  | 0,4246   | 0,6444 | 0,3556 |
| 0,6  | 0,4123   | 0,5746 | 0,4254 |
| 0,5  | 0,3994   | 0,4962 | 0,5038 |
| 0,4  | 0,3869   | 0,4154 | 0,5846 |
| 0,3  | 0,3800   | 0,3684 | 0,6316 |
| 0,0  | 0,3604   | 0,2253 | 0,7747 |

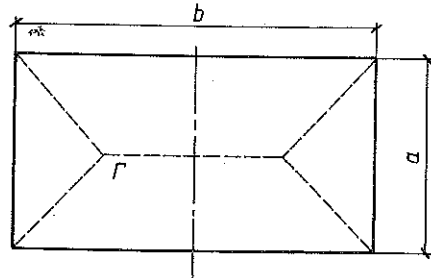
6. Przekrój prostokątny

Dla przekroju przedstawionego na rys. 3 mamy

$$(6.1) \quad F = a^2 p, \quad V_P = \frac{1}{2} p \beta a^4, \quad V_N = \frac{a^3}{12} (3p - 1).$$

Przy tym parametr  $p = b/a$  ( $p \geq 1$ ). Odpowiednie wartości współczynnika  $\beta$ , występującego w drugim spośród wzorów (6.1), można znaleźć w każdym prawie podręczniku teorii sprężystości (rozwiązanie problemu Saint Venanta dla przekroju prostokątnego) lub w odpowiednich monografiach (np. S. D. PONOMARIEW i inni, [3]). W szczególności dla pasma o nieskończonej długości

$$(6.2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \beta = \frac{1}{3}.$$



Rys. 3

Trzeci spośród wzorów (6.1) przedstawia objętość klina, którego kontury (linie załomu wzgórza piaskowego według analogii A. NÁDAIA) zostały zaznaczone na rys. 3.

Korzystając ze wzorów (2.6) oraz (6.1) znajdujemy

$$(6.3) \quad \alpha = \frac{1}{72\beta} \frac{(3p-1)^2}{p^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że w przypadku pasma o nieskończonej długości

$$(6.4) \quad \alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{72\beta} \frac{(3p-1)^2}{p^2} = \frac{1}{72} \frac{1}{3} 9 = 0,3750.$$

Oznacza to, że równanie krzywej granicznej, gdy  $m_s \leq n$ , może być określone za pomocą szeregu

$$(6.5) \quad n = 1 - 0,3750 m_s^2 - \dots,$$

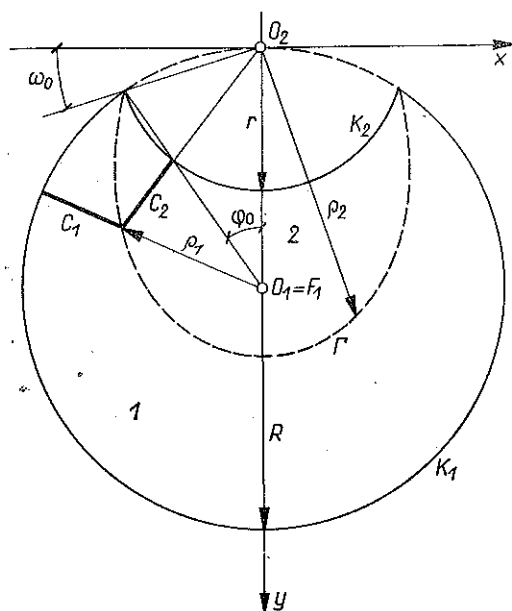
co jest identyczne z rozwinięciem wyrażenia ścisłego  $n = n(m_s)$ , M. A. SADOWSKY, [6], na szereg potęgowy w otoczeniu punktu  $m_s = 0$ . Wartości liczbowe współczynników  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $B$  i  $C$  dla różnych  $p$  zebrano w tabelicy 3.

Tablica 3

| $p$      | $\beta$ | $\alpha$ | $B$    | $C$    |
|----------|---------|----------|--------|--------|
| 1,0      | 0,1406  | 0,3954   | 0,4709 | 0,5291 |
| 1,5      | 0,196   | 0,386    | 0,409  | 0,591  |
| 1,75     | 0,214   | 0,383    | 0,389  | 0,611  |
| 2,0      | 0,229   | 0,379    | 0,361  | 0,639  |
| 2,5      | 0,249   | 0,377    | 0,347  | 0,653  |
| 3,0      | 0,263   | 0,376    | 0,340  | 0,660  |
| 4,0      | 0,281   | 0,374    | 0,326  | 0,674  |
| $\infty$ | 0,333   | 0,375    | 0,333  | 0,667  |

## 7. Przekrój kołowy z wycięciem kołowym

Linia załomu wzgórza piaskowego dzieli rozpatrywany obszar na dwa podobszary, w każdym z których funkcja naprężeń  $\Phi$  jest określona inną relacją. Zanim przejdziemy do dalszych obliczeń, będziemy musieli znaleźć równanie linii nieciągłości  $\Gamma(x, y) = 0$ , posiadającej następującą własność: krzywa  $\Gamma$  jest miejscem



Rys. 4

geometrycznym punktów równo odległych od obydwu części konturu  $K_1$  i  $K_2$  (własność ta wynika z warunku stałości kąta zsypania  $\mu = \text{const}$ ). Mamy więc warunek (rys. 4)

$$(7.1) \quad c_1 = c_2$$

ale

$$(7.2) \quad c_1 = R - \varrho_1.$$

Ponadto z danych geometrycznych (rys. 4) wynika równość

$$(7.3) \quad (c_2 + r)^2 = R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos \varphi.$$

Wstawiając  $c_2 = R - \varrho_1$  i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy

$$(7.4) \quad \varrho_1 = \frac{r^2 + 2Rr}{2R(1 - \cos \varphi) + 2r},$$

co stanowi biegunowe równanie  $\varrho_1 = \varrho_1(\varphi)$  krzywej  $\Gamma$ . Przyjmując układ odniesienia  $x, y$  o początku w punkcie  $O_1$  i uwzględniając oczywiste związki

$$(7.5) \quad \varrho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dochodzimy do szukanego równania  $\Gamma(x, y) = 0$

$$(7.6) \quad 4(1+p)^2 x^2 + 4(2p+p^2) y^2 - 4(p^2+2p) Ry = (p^2+2p)^2 R^2,$$

gdzie  $p = r/R$ . Jest to równanie elipsy. Zbadamy obecnie położenie jej ognisk. Przesuwając układ odniesienia

$$(7.7) \quad \bar{y} = y - \frac{R}{2}, \quad \bar{x} = x$$

możemy równanie (7.6) przekształcić do postaci

$$(7.8) \quad \frac{\bar{x}^2}{\frac{R^2}{4}(p^2+2p)} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{R^2}{4}(p+1)^2} = 1,$$

przy czym, jak nie trudno stwierdzić, w nowym układzie odniesienia współrzędne ognisk elipsy  $F_1$  i  $F_2$  są następujące:

$$(7.9) \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \pm \frac{R}{2};$$

dla ogniska  $F_1$  należy wybrać znak minus

$$(7.10) \quad F_1 \begin{cases} \bar{x} = 0, \\ \bar{y} = -\frac{R}{2}, \end{cases}$$

co jest identyczne ze współrzędnymi środka koła dużego  $O_1$  ( $0, -R/2$ ). W ten sposób wykazaliśmy więc, że ognisko  $F_1$  elipsy przedstawiającej linię załomu wzgórze piaskowego  $\Gamma(x, y) = 0$  pokrywa się ze środkiem koła dużego  $O_1$ .

W dalszym ciągu rozważań będziemy korzystać z równania biegunowego (7.4), które przepiszemy w postaci

$$(7.11) \quad \varrho_1 = \frac{R}{2} \frac{p^2 + 2p}{p + 1 - \cos \varphi}$$

lub [przechodząc na układ  $(\lambda, \omega)$ , którego biegun umieszczamy w punkcie  $O_2$ ] po wykorzystaniu oczywistych zależności geometrycznych otrzymujemy

$$(7.12) \quad \varrho_2 = \frac{R}{2} \frac{p^2 + 2p}{p + 1 - \sin \omega}.$$

Obecnie przystąpimy do wyliczenia całek  $V_N = \int \int_F \Phi dF$  rozbijając obszar całkowania na dwa podobszary (1) i (2) wyznaczone linią nieciągłości  $\Gamma$  oraz częściami konturu  $K_1$  i  $K_2$ . Dla uproszczenia obliczeń w każdym z rozpatrywanych podobszarów przyjmiemy inny układ odniesienia: dla podobszaru (1) układ  $\varrho, \varphi$  o początku w punkcie  $O_1$ , dla podobszaru (2) układ  $\lambda, \omega$  o początku w punkcie  $O_2$ . Objętość wzgórze piasku wyrazi się wzorem

$$(7.13) \quad V_N = V_{N1} + V_{N2} = \int \int_{F_1} \Phi_1 dF_1 + \int \int_{F_2} \Phi_2 dF_2.$$

Przede wszystkim należy określić funkcję naprężeń  $\Phi_1$  w podobszarze (1) oraz  $\Phi_2$  w podobszarze (2). Przy przyjęciu  $\operatorname{tg} \mu = 1$ , funkcja naprężeń  $\Phi$  rozwiązująca zagadnienie czystego skręcania w stanie granicznym jest po prostu odległością punktu bieżącego przekroju od brzegu: od  $K_1$  w podobszarze (1), od  $K_2$  w podobszarze (2). Wzdłuż linii nieciągłości  $\Gamma$  mamy oczywiście

$$(7.14) \quad \Phi_1 = \Phi_2.$$

Warunek ten został spełniony już wcześniej [por. równość (7.1)]. Uwzględniając

$$(7.15) \quad \Phi_1 = R - \varrho, \quad dF_1 = \varrho d\varrho d\varphi$$

oraz

$$(7.16) \quad \Phi_2 = \lambda - r, \quad dF_2 = \lambda d\lambda d\omega$$

otrzymujemy

$$(7.17) \quad V_N = 2 \left[ \int_{\varphi_0}^{\pi} d\varphi \int_{\varrho_1}^R (R - \varrho) \varrho d\varrho + \int_{\omega_0}^{\pi/2} d\omega \int_r^{\varrho_2} (\lambda - r) \lambda d\lambda \right],$$

co po wylczeniu całek wewnętrznych i wstawieniu granic całkowania [ $\varrho_1$  i  $\varrho_2$  są określone za pomocą wzorów (7.11) i (7.12)] daje się sprowadzić do postaci

$$(7.18) \quad V_N = \frac{R^3}{3} \left\{ \int_{\omega_0}^{\pi/2} \left[ \frac{2}{8} H^3(p, \omega) - \frac{3p}{4} H^2(p, \omega) + p^3 \right] d\omega - \int_{90^\circ - \varphi_0}^{-\pi/2} \left[ 1 - \frac{3}{4} H^2(p, \psi) + \frac{2}{8} H^3(p, \psi) \right] d\psi \right\},$$

gdzie  $\psi = 90^\circ$ ,  $\varphi$  jest nową zmienną całkowania oraz

$$(7.19) \quad H(p, \omega) = \frac{p^2 + 2p}{p + 1 - \sin \omega}, \quad H(p, \psi) = \frac{p^2 + 2p}{p + 1 - \sin \psi}.$$

Całki (7.18) prowadzą do dość żmudnych rachunków, dają się jednak wszystkie efektywnie wylczyć i ostatecznie po uwzględnieniu

$$(7.20) \quad \varphi_0 = 2 \arcsin \frac{p}{2}, \quad \omega_0 = \arcsin \frac{p}{2}$$

otrzymujemy poszukiwane wyrażenie<sup>2</sup> na  $V_N$  jako funkcji parametru  $p = r/R$ :

$$(7.21) \quad V_N = \frac{R^3}{3} \left\{ \left( 1 + \frac{p^3}{2} \right) \pi - (2 + p^3) \arcsin \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 + 2p}}{4} (W_1 + W_2) + \frac{p}{2} (1 - p) \sqrt{4 - p^2} \right\},$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przyjęto oznaczenia następujące:

$$(7.22) \quad W_1 = (2p^2 - 2p - 3) \left[ \arcsin \frac{-2 - p}{\sqrt{p^2 + 2p}} - \arcsin \frac{(2 - p^2)(p + 1) - 2 - p\sqrt{4 - p^2}}{(2 + p\sqrt{4 - p^2})\sqrt{p^2 + 2p}} \right],$$

$$W_2 = (4p^2 + 2p - 3) \left[ \arcsin \frac{p}{\sqrt{p^2 + 2p}} - \arcsin \frac{p(p + 1) - 2 - \sqrt{4 - p^2}}{(2 + \sqrt{4 - p^2})\sqrt{p^2 + 2p}} \right].$$

<sup>2</sup>) M. Życzkowski zauważył niedawno, że wzór (7.21) może być przepisany w znacznie prostszej postaci:

$$V_N = \frac{R^3}{3} \left[ (2 + p^3) \arcsin \frac{p}{2} - \frac{1}{4} (2p + p^2)^{3/2} \arcsin \frac{p - 1}{2} + \frac{p}{2} (1 - p) \sqrt{4 - p^2} \right].$$

Wzór ten można również znaleźć w pracy M. Gałosa i M. Życzkowskiego, [1].

Jak nie trudno stwierdzić, wzór (7.21) w obydwu przypadkach szczególnych: 1) przekrój kołowy ( $p = 0$ ), 2) przekrój znika ( $p = 2$ ) daje poprawne wartości  $V_N$ :

$$[V_N]_{p=0} = \frac{\pi R^3}{3}, \quad [V_N]_{p=2} = 0.$$

Funkcja (7.21) daje się rozwinąć na szereg potęgowy w otoczeniu punktu  $p = 0$ :

$$(7.23) \quad V_N = \frac{\pi R^3}{3} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} p^{3/2} - \frac{63}{64} \frac{\sqrt{2}}{2} p^{5/2} - \dots \right].$$

Szereg ten jest jednak dosyć słabo zbieżny i można będzie go wykorzystać w dalszych rachunkach jedynie dla bardzo małych wartości parametru  $p$ .

Aby napisać równanie krzywej nośności granicznej ( $M_s, N$ ) należy określić współczynnik  $\alpha$ , a zatem należy obliczyć ponadto całki:

$$(7.24) \quad F = \int_{\omega_0}^{\pi/2} [2R^2 (1 - \cos 2\omega) - r^2] d\omega$$

oraz

$$(7.25) \quad V_P = \int_{\omega_0}^{\pi/2} d\omega \int_r^{2R \sin \omega} \left[ r^2 - \lambda^2 + 2\lambda R \left( 1 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right) \sin \omega \right] \lambda d\lambda,$$

przy czym wyrażenie podcałkowe w równaniu (7.24) przedstawia podwojony element powierzchni

$$(7.26) \quad dF = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) d\omega,$$

jeżeli  $r_1 = r$ ,  $r_2 = 2R \sin \omega$  są równaniami biegunowymi ( $O_2$ ) małego ( $r_1$ ) i dużego ( $r_2$ ) koła. Całka ta daje się łatwo obliczyć; otrzymujemy

$$(7.27) \quad F = R^2 \left[ (2 - p^2) \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{p}{2} \right) + \frac{p}{2} \sqrt{4 - p^2} \right]$$

lub po rozwinięciu w szereg potęgowy w otoczeniu punktu  $p = 0$

$$(7.28) \quad F = \pi R^2 \left( 1 - \frac{1}{2} p^2 + \frac{2}{3\pi} p^3 + \dots \right).$$

Z obydwu wzorów (7.27) i (7.28) będziemy korzystał przy dalszych obliczeniach. Nie trudno stwierdzić, że również całka (7.25)

$$(7.29) \quad V_P = V_P(p)$$

jest funkcją parametru  $p = r/R$ , jej wartości (por. S. D. PONOMARIEW i inni, [3]) dla różnych  $0 \leq p \leq 2$  zestawiono w tablicy 4. Wyrażenie stojące pod znakiem całki, jak łatwo się domyślić, jest funkcją naprężeń Prandtla  $\Psi(x, y)$ .

Wartości liczbowe funkcji  $V_P$  (7.25),  $F$  (7.27) oraz  $V_N$  (7.21) dla różnych stosunków  $r/R = p$  zebrano w tablicy 4. Ostatnie trzy kolumny tablicy 4 podają ostateczne

wyniki naszych obliczeń: odpowiednie wartości współczynników  $\alpha$ ,  $B$  i  $C$ , określających kształt krzywej nośności granicznej ( $m_s, n$ ).

Warto zwrócić uwagę, że dla  $p \rightarrow 0$ , a więc gdy promień wycięcia  $r$  jest mały w porównaniu z promieniem koła dużego  $R$ , kształt krzywej granicznej  $f(m_s, n, p) = 0$  nie wiele różni się od kształtu krzywej granicznej dla koła pełnego, bez wycięcia (por. pierwsze trzy wiersze tablicy 4). Wniosek ten jest całkowicie odmienny od rezultatów podawanych przez teorię sprężystości: przy swobodnym skręcaniu w zakresie sprężystym naprężenie w środkowym punkcie wycięcia kołowego  $\tau_{\max}$  zmierza do wartości  $2\tau$ , gdy  $p \rightarrow 0$ , a  $\tau$  oznacza naprężenie styczne na nieosłabionym brzegu rozpatrywanego przekroju. Lokalne wycięcie posiada więc w zakresie sprężystym duży wpływ na rozkład naprężeń i jest związane z miejscowym spiętrzeniem naprężeń. Mimo to, jak się okazuje, nośność graniczna (cały przekrój przechodzi w stan pełnego uplastycznienia) nie ulega wyraźnej zmianie.

### 8. Przekrój kwadratowy z centralnym otworem kołowym

Ze względu na symetrię rozpatrujemy jedynie oktant

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a - x.$$

Równanie linii załomu wzgórza piaskowego (rys. 5) wyprowadzimy w oparciu o uogólnioną analogię A. NÁDAIA podaną przez M. A. SADOWSKYEGO, [7]. Poszukiwana krzywa  $\Gamma$  jest miejscem geometrycznym punktów spełniających równość

$$(8.1) \quad x = x_0 + s$$

(oznaczenia — por. rys. 5).

Z danych geometrycznych

$$(8.2) \quad y = \sqrt{(r_0 + s)^2 - (r_0 + x_0 - x)^2}.$$

Stąd, po uwzględnieniu (8.1), otrzymujemy równanie paraboli

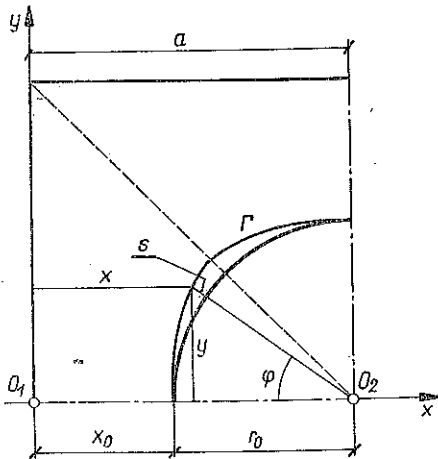
$$(8.3) \quad y^2 = 4r_0(x - x_0).$$

Dalsze obliczenia dogodniej będzie przeprowadzić przy użyciu współrzędnych biegunowych, przy czym początek układu  $r, \varphi$  przyjmijmy w punkcie  $O_2$ . Mamy więc związki

$$(8.4) \quad x = x_0 + r_0 - r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

co po wstawieniu do równania (8.3) daje

$$(8.5) \quad r^2 \sin^2 \varphi + 4r_0 r \cos \varphi - 4r_0^2 = 0.$$



Rys. 5



Równanie to nie trudno rozwiązać ze względu na  $r$ :

$$(8.6) \quad r = r_1 = \frac{-4r_0 \cos \varphi + 4r_0}{2 \sin^2 \varphi}$$

lub krócej

$$(8.7) \quad r_1 = \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Jest to równanie biegunowe  $r_1 = r_1(\varphi)$  paraboli (8.3).

Przystępujemy obecnie do obliczenia momentu granicznego:

$$(8.8) \quad \bar{M}_s = \frac{2QV_N}{\sqrt{3}},$$

gdzie wielkość  $V_N$  należy obliczyć ze wzoru M. A. SADOWSKYEGO (2.12); wzór ten w rozważanym przez nas przypadku przekroju dwuspójnego przybierze postać

$$(8.9) \quad V_N = \iint_F \Phi dF + \pi r_0^2 x_0,$$

przy czym pierwszy wyraz wzoru (8.9) przedstawia objętość wzgórza piasku usypanego na rozpatrywanym przekroju w sposób podany przez M. A. SADOWSKYEGO, drugi natomiast przedstawia objętość walca o podstawie  $\pi r_0^2$  i wysokości równej wysokości wzgórza piaskowego na krawędzi otworu:

$$(8.10) \quad x_0 = [\Phi(r, \varphi)]_{r=r_0}.$$

Funkcja  $\Phi = \Phi(x, y)$  jest funkcją naprężeń Hilla, rozwiązującą zagadnienie nośności granicznej rozpatrywanego pręta przy prostym schemacie obciążenia  $(M_s, 0)$ . Funkcja  $\Phi$  przedstawia równocześnie równanie wzgórza piasku usypanego na rozważanym przekroju.

Rozbijemy obszar całkowania  $F$  na dwa podobszary:  $F_0$  zawarty między krawędzią otworu a krzywą  $F(x, y) = 0$ , oraz  $F_1$  pozostała część rozpatrywanego oktantu. Korzystając ze współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$ , uwzględniając (8.7) oraz pamiętając, że

$$(8.11) \quad x_0 + r_0 = a,$$

gdzie  $a$  oznacza połowę boku kwadratu, a  $r_0$  promień otworu, otrzymujemy następujące określenie granic całkowania:

$$(8.12) \quad F_1 \begin{cases} \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \leq r \leq \frac{a}{\cos \varphi}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

oraz

$$(8.13) \quad F_0 \begin{cases} r_0 \leq r \leq \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Tablica 4

| $\nu$ | $2V_p/R^4$ | $F/R^2$ | $3V_N/\pi R^3$ | $\alpha = \frac{V_N^2}{FV_P}$ | $B = 3 - \frac{1}{\alpha}$ | $C = \frac{1}{\alpha} - 2$ |
|-------|------------|---------|----------------|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0,00  | 1,57       | 3,142   | 1,000          | 0,444                         | 0,750                      | 0,250                      |
| 0,05  | 1,56       | 3,138   | 0,992          | 0,441                         | 0,732                      | 0,268                      |
| 0,10  | 1,56       | 3,126   | 0,978          | 0,429                         | 0,669                      | 0,331                      |
| 0,20  | 1,46       | 3,084   | 0,933          | 0,423                         | 0,636                      | 0,364                      |
| 0,40  | 1,22       | 2,912   | 0,809          | 0,404                         | 0,525                      | 0,475                      |
| 0,60  | 0,92       | 2,649   | 0,658          | 0,390                         | 0,436                      | 0,564                      |
| 0,80  | 0,63       | 2,310   | 0,501          | 0,379                         | 0,361                      | 0,639                      |
| 1,00  | 0,38       | 1,913   | 0,351          | 0,371                         | 0,305                      | 0,695                      |
| 1,50  | 0,04       | 0,812   | 0,059          | 0,359                         | 0,215                      | 0,785                      |
| 2,00  | 0,00       | 0,000   | 0,000          | 0,375                         | 0,333                      | 0,667                      |

Funkcję naprężeń  $\Phi = \Phi(r, \varphi)$  zapiszemy osobno w poszczególnych podobszarach:

$$(8.14) \quad \Phi_0 = x - (r_1 - r) = a - r \cos \varphi + r - \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

oraz

$$(8.15) \quad \Phi_1 = x = a - r \cos \varphi.$$

Obecnie możemy już przystąpić do obliczenia całki  $\iint_F \Phi dF$ . Uwzględniając (8.12), (8.13), (8.14) oraz (8.15) otrzymujemy

$$(8.16) \quad \iint_F \Phi dF = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}^{\frac{r_0}{\cos \varphi}} (a - r \cos \varphi) r dr + \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{r_0}^{\frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \left( a - r \cos \varphi + r - \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right) r dr = \frac{a^3}{6} \left\{ \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{2p^3 - 3p^2}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} - \frac{2p^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^6 \frac{\varphi}{2}} \right) d\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/4} \left[ 3p^2 \left( \frac{1}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} - 1 \right) + 4p^3 \left( \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^6 \frac{\varphi}{2}} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) - 3p^3 \left( \frac{1}{\cos^6 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \right] d\varphi \right\},$$

gdzie  $p = r_0/a$ . Po wylczeniu całek (8.16) oraz dodaniu ich do drugiego wyrazu wyrażenia (8.9), mianowicie

$$(8.17) \quad \pi r_0^2 x_0 = \pi a^3 p^2 (1 - p),$$

otrzymujemy

$$(8.18) \quad V_N = \frac{4}{3} a^3 (1 - \gamma p^3),$$

przy czym współczynnik

$$(8.19) \quad \gamma = 3q_3 - 2(q_1 + q_2) - \sqrt{2} + \frac{5}{4} \pi,$$

gdzie

$$(8.20) \quad \begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} + 2 \right), \\ q_2 &= \frac{2}{5} \frac{\operatorname{tg} \pi/8}{\cos^4 \pi/8} - \frac{1}{5} q_1, \\ q_3 &= \frac{2}{5} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{8}} - 5 \right) + \frac{4}{5} q_1. \end{aligned}$$

Wykonując proste przeliczenia znajdujemy

$$(8.21) \quad q_1 = 0,8770, \quad q_2 = 0,0520, \quad q_3 = 0,1006$$

i wreszcie

$$(8.22) \quad \gamma = 0,9566.$$

Moment graniczny dla rozpatrywanego przekroju wyrazi się więc wzorem

$$(8.23) \quad \bar{M}_s = \frac{8Qa^3}{3\sqrt{3}} (1 - 0,9566 p^3).$$

Łatwo sprawdzić, że dla  $p = 0$ , tzn. gdy otwór znika i otrzymujemy pełny pręt pryzmatyczny o przekroju kwadratowym, to

$$(8.24) \quad [\bar{M}_s]_{p=0} = \frac{8Qa^3}{3\sqrt{3}},$$

jak być powinno.

Dla napisania równania krzywej granicznej  $f(m_s, n) = 0$  wystarczy określić współczynnik  $\alpha$ . Ścisłe rozwiązanie zagadnienia Saint Venanta dla rozpatrywanego przez nas pręta (kwadrat z centralnym otworem kołowym) nie jest znane. Objętość wzgórza Prandtla, to jest wielkość charakteryzująca sztywność na skręcanie w zakresie sprężystym, można jednak obliczyć ze wzoru przybliżonego, podanego przez A. S. NIKOLICZA, [2]:

$$(8.25) \quad V_P = 8a^4 \left( 0,1406 - \frac{\pi}{32} p^4 \right).$$

Wzór ten został wyprowadzony przy założeniu niewielkich różnic między kształtem otworu a kształtem trajektorii naprężeń stycznych  $\Psi(x, y) = \text{const}$ . Wzór (8.25) można stosować dla

$$(8.26) \quad 0 \leq p \leq 0,65,$$

co odpowiada najczęściej spotykanym w praktyce proporcjom  $r_0/a = p$ , przy czym błąd nie przekracza 5,5%.

Korzystając ze wzorów (8.18) i (8.25) oraz z oczywistego związku

$$(8.27) \quad F = 4a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} p^2\right)$$

możemy obliczyć poszukiwany współczynnik  $\alpha$ , określający kształt krzywej granicznej:

$$(8.28) \quad \alpha = \frac{1}{18} \frac{(1 - 0,9566 p^3)^2}{\left(1 - \frac{\pi}{4} p^2\right) \left(0,1406 - \frac{\pi}{32} p^4\right)}.$$

Wartości liczbowe współczynników  $\alpha$ ,  $B$  i  $C$  zostały zebrane w tablicy 5.

Tablica 5

| $p$  | $\alpha$ | $B$    | $C$    |
|------|----------|--------|--------|
| 0,00 | 0,3954   | 0,4709 | 0,5291 |
| 0,10 | 0,3974   | 0,4836 | 0,5164 |
| 0,20 | 0,4022   | 0,5137 | 0,4863 |
| 0,30 | 0,4057   | 0,5351 | 0,4649 |
| 0,40 | 0,4055   | 0,5339 | 0,4661 |
| 0,50 | 0,3984   | 0,4800 | 0,5100 |
| 0,60 | 0,3812   | 0,3766 | 0,6233 |
| 0,65 | 0,3670   | 0,2752 | 0,7248 |

Należy zaznaczyć, że w podobny sposób można by uzyskać równanie krzywej nośności granicznej  $(M_s, N)$  dla prętów o bardziej złożonym kształcie konturu, np. sześciokąt lub ośmiokąt z centralnym otworem kołowym. Odpowiednie wzory na  $V_p$  (przybliżone) można znaleźć w pracy A. S. NIKOLICZA, [2], natomiast wielkość  $V_N$  może być bez większych trudności oszacowana w sposób elementarny.

### 9. Przekroje cienkościennie o stałej grubości ścianki

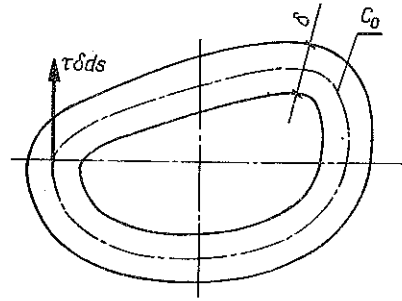
Gdy grubość ścianki  $\delta = \text{const}$  dowolnego przekroju dwuspójnego przedstawionego na rys. 6 zmierza do zera, możemy przyjąć, że naprężenia  $\sigma$  i  $\tau$  nie zależą od współrzędnych  $x, y$  i zachowują stałą wartość na całym przekroju poprzecznym:

$$(9.1) \quad \sigma = \varphi Q, \quad \tau = \frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varphi^2},$$

gdzie  $\varphi$  jest to bezwymiarowy parametr zmieniający się w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ . Przyjęcie (9.1) zapewnia spełnienie warunku plastyczności Hubera - Misesa - Hencky'ego,

ponadto wektor  $\tau$  powinien być w każdym punkcie styczny do linii środkowej przekroju ( $C_0$ ), co możemy zapisać:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\varphi^2} \frac{dx}{ds}, \\ \tau_{zy} &= \frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\varphi^2} \frac{dy}{ds}. \end{aligned}$$

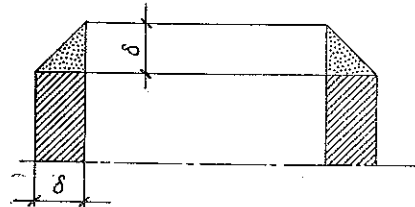


Przyjmijmy za wymiar podstawowy grubość ścianki  $\delta$ , wówczas

$$(9.3) \quad \begin{aligned} dF &= \delta^2 dx dy, \\ f &= \frac{F}{\delta^2} = \frac{l\delta}{\delta^2} = \frac{l}{\delta}, \end{aligned}$$

gdzie  $x, y$  są to współrzędne bezwymiarowe.

Siły zewnętrzne znajdujemy obliczając całki



Rys. 6

$$(9.4) \quad \begin{aligned} N &= \iint_F \sigma_z dF = \delta^2 \varphi Q \iint_F dx dy = \varphi Q F, \\ M_s &= \delta^3 \oint_{C_0} (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) ds = \delta^3 \frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\varphi^2} \oint_{C_0} x dy - y dx = \\ &= \frac{Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\varphi^2} 2\delta \left( \frac{F}{2} + F_0 \right) = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\varphi^2} V_N. \end{aligned}$$

W ostatnim z wykonanych przekształceń wykorzystaliśmy wzór

$$(9.5) \quad V_N = \frac{l\delta^2}{2} + F_0 \delta = \left( \frac{F}{2} + F_0 \right) \delta$$

wynikający z uogólnionej analogii A. NÁDAIA (por. M. A. SADOWSKY, [7]): u dołu na rys. 6 zaznaczono kształt wzgórza piasku usypanego na rozpatrywanym przekroju. Wielkość  $F_0$  oznacza tutaj pole obszaru ograniczonego krzywą  $C_0$ ,  $l$  jest całkowitą długością krzywej  $C_0$ .

Korzystając z definicji bezwymiarowej siły podłużnej oraz bezwymiarowego momentu skręcającego otrzymujemy

$$(9.6) \quad n = \frac{N}{\bar{N}} = \varphi, \quad m_s = \frac{M_s}{\bar{M}_s} = \sqrt{1-\varphi^2}.$$

Ostatecznie, po wyrugowaniu parametru  $\varphi$ , dostajemy ściśle równanie krzywej granicznej dla przekroju cienkościennego o dowolnym kształcie konturu, zamkniętego i o stałej grubości ścianki

$$(9.7) \quad m_s^2 + n^2 = 1.$$

Równanie to możemy otrzymać natychmiast, pomijając rozważania dotyczące stanu naprężenia, jeżeli skorzystamy ze wzorów (2.2) i (2.6) oraz ze znanego wzoru na zastępczy moment bezwładności przekroju przy skręcaniu (S. D. PONOMARIEW i inni, [3]):

$$(9.8) \quad I_s = \frac{4F_0^2}{\int \frac{ds}{\delta}} = \frac{4\delta F_0^2}{1} \approx \frac{4V_N^2}{F}.$$

Znak przybliżonej równości dajemy dla zwrócenia uwagi na pominięcie małych wyższego rzędu (to jest wyższego niż  $\delta^2$ ). Otrzymujemy dalej

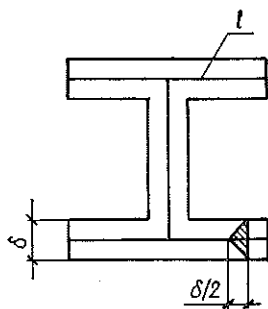
$$(9.9) \quad a = \frac{2V_N^2}{FI_s} = \frac{1}{2}.$$

A zatem współczynniki określające kształt krzywej granicznej  $m_s^2 + Bn^2 + Cn^3 = 1$  wyniosą

$$(9.10) \quad B = 1, \quad C = 0.$$

Otrzymane w ten sposób równanie  $m_s^2 + n^2 = 1$  jest identyczne z wyprowadzonym poprzednio równaniem (9.7).

Równie łatwo można znaleźć nośność graniczną przekrojów cienkościennych otwartych (np. przekrój teowy, dwuteowy, ceowy itp.) o stałej grubości ścianki  $\delta$ . Wielkość  $V_p$  lub  $I_s$  jest podawana w odpowiednich normach wytworów hutniczych, natomiast objętość wzgórza piasku można obliczyć w przybliżeniu posługując się uproszczonym wzorem



Rys. 7

$$(9.11) \quad V_N = \frac{\delta^2 l}{4},$$

Wzór (9.11) łatwo otrzymać uważając (w przybliżeniu) wzgórze piasku za leżący graniastosłup o podstawie w kształcie trójkąta równoramiennego (zob. rys. 7) i wysokości  $l$ , równej całkowitej długości linii środkowej przekroju.

## 10. Wymiarowanie prętów na gruncie teorii nośności granicznej

Stanowi granicznemu pręta obciążonego złożonym układem sił:  $M_s$  (moment skręcający) i  $N$  (siła podłużna) w interpretacji geometrycznej odpowiada punkt  $P(M_s, N)$  znajdujący się na krzywej nośności granicznej

$$(10.1) \quad m_s^2 + Bn^2 + Cc^3 = 1.$$

W równaniu tym tkwi w postaci niejawniej pewien wymiar liniowy  $a$ , charakteryzujący dany przekrój; wymiar ten będziemy umownie nazywać «wymiarem

подставowym». Рównanie (10.1) daje się po pewnych przekształceniach, [9], zapisać w postaci

$$(10.2) \quad a^6 - B\alpha_1^2 \left(\frac{N}{Q}\right)^2 a^2 - \alpha_0^2 \left(\frac{M_s}{Q}\right)^2 - C\alpha_1^3 \left(\frac{N}{Q}\right)^3 = 0,$$

gdzie  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  są to pewne bezwymiarowe charakterystyki geometryczne przekroju, proporcjonalne do sztywności na skręcanie oraz na rozciąganie w stanie granicznym. Poszukiwany wymiar podstawowy występuje tu w sposób jawny, należy jedynie rozwiązać równanie (10.2). Bliższe omówienie możliwości rozwiązania równania (10.2) oraz efektywne wzory umożliwiające bezpośrednie wymiarowanie pręta, jak również odpowiednie tablice wielkości  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  dla różnych kształtów przekroju poprzecznego można znaleźć w pracy [9].

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M. GALOS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analityczne określenie nośności granicznej prętów skręcanych* (w przygotowaniu do druku).
- [2] А. С. Николаич, *Кручение граниной полой штанги*, Вестник Машиностроения, 2, 40 (1960).
- [3] С. Д. Пономарев и другие, *Расчеты на прочность в машиностроение*, т. 1, Машгиз, Москва 1956.
- [4] А. Р. Ржаницын, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Стройвоенмориздат, Москва 1949.
- [5] А. Р. Ржаницын, *Приближенные решения по вопросам строительной механики и теории пластичности*, ТУС, Москва 1956.
- [6] M. A. SADOWSKY, *A principle of maximum plastic resistance*, J. Appl. Mech., June 1943.
- [7] M. A. SADOWSKY, *An extension of sand-heap analogy in plastic torsion applicable to cross sections having one or more holes*, J. Appl. Mech., Dec. 1941, 166-168.
- [8] M. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcанego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., 3, 10 (1962).
- [9] M. WNUK, *Wymiarowanie prętów jednocześnie skręcanych i rozciąganych w oparciu o teorię nośności granicznej*, Arch. Bud. Masz., 2, 10 (1963).
- [10] M. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955).
- [11] M. ŻYCZKOWSKI, *Begriff der Konstruktionsansträngung und die Berechnungsbeispiele*, referat wygłoszony na Konferencji GAMM, Würzburg 1961.
- [12] M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wyteżenia*, Rozpr. Inż., 4, 9 (1961).

#### Резюме

#### ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВЫХ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Автор предлагает эффективное определение несущей способности стержней с различными формами сечений, часто встречаемых в инженерной практике. В особенности автор занимается сечениями в форме равнобедренного треугольника, квадрата, произвольного правильного многоугольника, круга, кругового кольца, прямоугольника, круга с круговым отверстием (профиль применяемый напр. в нефтяной промышленности), тонкостенными сечениями с постоянной толщиной стенки (закрытое, напр. коробчатое сечение, открытое, профильное сечение).

## S u m m a r y

## COMPUTATION EXAMPLES OF LIMIT CURVES

This paper is devoted to effective determination of the limit load of bars of various forms of the cross-section often met with in engineering practice. In particular are treated profiles having the form of a regular triangle, square, hexagon, any regular polygon, circle, ellipse, circular ring circle with a circular hole, square with central circular hole (drills for oil pits) thin walled structures with constant wall thickness (closed, such as box beams, and open).

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
KATEDRA FIZYKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 stycznia 1963 r.*

---