

SZLIFOWANIE POWIERZCHNI PŁASKICH ZA POMOCĄ TARCZ ŚCIERNYCH

A. RIPIANU, C. TUDOSIE (CLUJ)

Weźmy pod uwagę tarczę ścierną, cylindryczną, która szlifuje powierzchnię płaską swą powierzchnią czołową stanowiącą pierścień kołowy. Tarcza ścierna wykonuje ruch obrotowy wokół swej osi geometrycznej, która na ogół jest stała. Przedmiot, który szlifujemy, wykonuje ruch prostoliniowy lub obrotowy wokół równoległej do osi obrotu tarczy ściernej. Tarcza ścierna wykonuje również postępowy ruch przesuając się pionowo przy szlifowaniu wgłębnym płaskiej powierzchni szlifowanej.

W pracy rozważymy trzy odrębne przypadki:

1. Tarcza ścierna obraca się wokół swej osi symetrii z prędkością kątową ω , szlifowany zaś detal wykonuje ruch prostoliniowy z prędkością v_0 .
2. Tarcza ścierna obraca się wokół swej osi symetrii z prędkością obrotową ω , obrabiany zaś detal wykonuje ruch obrotowy z prędkością kątową ω_1 wokół stałej osi obrotu, równoległej do stałej osi obrotu tarczy ściernej.
3. Tarcza ścierna obraca się wokół swej osi symetrii z prędkością kątową ω , a oś ta z kolei przesuwa się po kole z prędkością kątową ω_1 . Szlifowana część przesuwa się prostoliniowo z prędkością v_0 .

W tych trzech przypadkach postawimy zagadnienie wyznaczenia energii zużytej w czasie procesu szlifowania tarczą ścierną i określenia zależności między prędkością napędu tarczy ściernej i szlifowanego detalu w taki sposób, aby zużyta energia była najmniejsza.

Jeśli oznaczymy przez a_1 oraz b_1 odpowiednio promień wewnętrzny i zewnętrzny tarczy ściernej, to powierzchnia czołowa tarczy stanowić będzie pierścień kołowy o promieniu wewnętrznym a_1 i zewnętrznym b_1 .

Wiadomo, że powierzchnia czynna tarczy efektywnie uczestnicząca w procesie szlifowania jest mniejsza od powierzchni czołowej tarczy.

Wielkość powierzchni czynnej zależy od kilku parametrów takich, jak położenie tarczy względem obrabianej części, płaskość powierzchni styku tarczy i detalu, wielkość ziaren tarczy, położenie krawędzi skrawających ziaren w stosunku do ich prędkości, jakość chłodzenia itd.

Powierzchnia czynna tarczy jest zawsze pierścieniem kołowym o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b . Oczywiście $a > a_1$ oraz $b < b_1$, a zatem pole powierzchni czynnej pierścienia, który oznaczymy przez A_a , jest mniejsze od pola powierzchni przekroju pierścienia czołowego, które oznaczymy przez A_f . Zatem

$$A_a = \pi (b^2 - a^2) < A_f = \pi (b_1^2 - a_1^2).$$

Oznaczenia

Przypadek pierwszy

- a, b odpowiednio promień wewnętrzny i zewnętrzny powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
- ϱ promień wewnętrzny elementarnego odcinka kołowego dA_a odpowiadającego powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
- $dA_a = \varrho d\varrho d\theta$ pole powierzchni elementarnego odcinka kołowego odpowiadającego powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
- θ kąt obrotu tarczy ścierniej około własnej osi symetrii, mierzony od stałej prostej $O\Delta$, położony w płaszczyźnie szlifowania,
- v_0 prędkość ruchu części szlifowanej wzdłuż osi $O\Delta$,
- ω prędkość kątowna obrotu tarczy ścierniej około własnej, stałej osi obrotu,
- p ciśnienie właściwe między powierzchnią czynną tarczy ścierniej a powierzchnią szlifowanej części,
- P całkowita siła wywierana przez powierzchnię czynną tarczy ścierniej na powierzchni szlifowanej części,
- v prędkość chwilowa elementarnego wycinka kołowego dA_a ,
- β kąt pomiędzy wektorem prędkości v_0 a wektorem prędkości v elementarnego wycinka kołowego dA_a ,
- μ współczynnik tarcza między tarczą ścierną i szlifowaną częścią, odpowiadający powierzchni czynnej tarczy,
- \mathbf{R} siła oporu odpowiadająca powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
- R_{Δ} składowa siły oporu \mathbf{R} , skierowana wzdłuż wektora prędkości v_0 albo wzdłuż osi $O\Delta$,
- R_n składowa siły oporu \mathbf{R} skierowana wzdłuż prostopadłej do osi $O\Delta$,
- M moment oporu odpowiadający powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
- W energia zużyta w czasie procesu szlifowania przy użyciu tarczy ścierniej,
- σ wersor osi $O\Delta$,
- \mathbf{n} wersor osi prostopadłej do osi $O\Delta$ zwróconą w kierunku wzrastającego kąta obrotowego θ ,
- $c'' = v_0/\omega$ stosunek odpowiednich prędkości.

Przypadek drugi

- r odległość stałej osi obrotu tarczy ścierniej od szlifowanej części,
- ω_1 prędkość kątowna obrotu szlifowanej części,
- ϱ_1 odległość elementarnego wycinka kołowego dA_a od osi obrotu szlifowanej części,
- φ kąt obrotu szlifowanej części mierzony od osi O_1V ,
- γ kąt utworzony przez prędkość v elementarnego wycinka kołowego dA_a z osią $O_1\Delta$,

- $k = \omega/\omega_1$ stosunek odpowiednich prędkości kątowych,
 \mathbf{R}_1 siła oporu odpowiadająca powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
 $R_{1\Delta}$ składowa siły oporu \mathbf{R}_1 skierowana wzdłuż osi $O\Delta$ równoległej do osi $O_1\Delta$,
 R_{2n} składowa siły oporu \mathbf{R}_1 skierowana wzdłuż prostopadłej do osi $O\Delta$,
 \mathbf{M}_1 moment oporu odpowiadający powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
 W_1 energia zużyta w toku procesu szlifowania tarczą ścierną.

Pozostałe oznaczenia są takie same jak w przypadku pierwszym.

Przypadek trzeci

- \mathbf{R}_2 siła oporu odpowiadająca powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
 $R_{2\Delta}$ składowa siły oporu \mathbf{R}_2 skierowana wzdłuż osi $O\Delta$ równoległej do osi $O_1\Delta$,
 R_{1n} składowa siły oporu skrawania \mathbf{R}_2 skierowana prostopadle do osi $O\Delta$,
 \mathbf{M}_2 moment oporu odpowiadający powierzchni czynnej tarczy ścierniej,
 W_2 energia zużyta w czasie procesu szlifowania tarczą ścierną.

Pozostałe oznaczenia są identyczne z używanymi w przypadku 1 i 2 z tym zastrzeżeniem, że ω_1 oznacza prędkość kątową poruszającej się osi tarczy ścierniej.

Przypadek pierwszy

Tarcza ścierna wykonuje ruch obrotowy wokół swej stałej osi symetrii z szybkością kątową ω , a szlifowany przedmiot wykonuje ruch prostoliniowy z szybkością v_0 (rys. 1).

Elementarna siła oporu odpowiadająca elementarnemu wycinkowi kołowemu wynosi $dA_a = \rho dq d\theta$ wektorowego

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_\Delta + d\mathbf{R}_n,$$

gdzie

$$d\mathbf{R} = -dR \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad d\mathbf{R}_\Delta = -dR_\Delta \boldsymbol{\sigma}, \quad d\mathbf{R}_n = -dR_n \mathbf{n}.$$

Długości sił elementarnych $d\mathbf{R}$, $d\mathbf{R}_\Delta$ oraz $d\mathbf{R}_n$ określone są wzorami

$$(1) \quad \begin{aligned} dR &= \mu p \rho dq d\theta, & dR_\Delta &= \mu p \rho \cos \beta dq d\theta, \\ & & dR_n &= \mu p \rho \sin \beta dq d\theta, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2) \quad \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\omega \rho \cos \theta}{v} = \frac{\omega \rho \cos \theta}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 \rho^2 - 2v_0 \omega \rho \sin \theta}}, \\ \cos \beta &= \frac{v_0 - \omega \rho \sin \theta}{v} = \frac{v_0 - \omega \rho \sin \theta}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 \rho^2 - 2v_0 \omega \rho \sin \theta}}. \end{aligned}$$

sunek c jest bardzo mały. We wzorze (3) opuścimy pod pierwiastkiem mianownika wyraz c^2 . Wykonując obliczenie we wzorze (3) i biorąc pod uwagę, że

$$(4) \quad p = \frac{P}{\pi (b^2 - a^2)}$$

otrzymujemy

$$R_A = \frac{\mu c P}{a+b}, \quad R_n = 0.$$

Długość całkowitej siły oporu wynosi

$$(5) \quad R = R_A = \frac{\mu c P}{a+b}.$$

Wyrażając to w postaci wektorowej mamy

$$\mathbf{R}_A = -\frac{\mu c P \boldsymbol{\sigma}}{a+b}, \quad \mathbf{R}_n = 0, \quad \mathbf{R} = -R \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Elementarny moment oporu odpowiadający elementarnemu wycinkowi kołowemu $dA_a = \rho d\varrho d\theta$ można przedstawić w następującej postaci wektorowej:

$$d\mathbf{M} = -\frac{\boldsymbol{\omega} dM}{\omega}.$$

Długość momentu elementarnego

$$dM = \rho dR \sin(\beta - \theta)$$

albo

$$dM = \frac{\mu \rho \varrho^2 (\omega \varrho - v_0 \sin \theta) d\varrho d\theta}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 \varrho^2 - 2v_0 \omega \varrho \sin \theta}}.$$

Całkując po całej powierzchni czynnej tarczy ścierniej otrzymujemy

$$M = \mu \rho \int_a^b d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 (\varrho - c \sin \theta) d\theta}{\sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c \varrho \sin \theta}}.$$

Pomijamy w pierwiastku mianownika wyrażenie c^2 . Po wykonaniu działań otrzymujemy

$$(6) \quad M = \frac{\mu P}{a+b} \left[\frac{2}{3} (a^2 + ab + b^2) - c^2 \right].$$

Wektor \mathbf{M} można wyrazić:

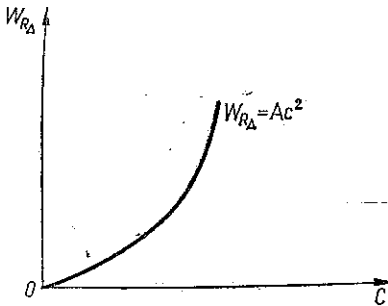
$$\mathbf{M} = -\frac{M\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$

Energię zużytą w jednostce czasu w toku procesu szlifowania przez tarczę ścierną i odpowiadającą całej powierzchni czynnej tarczy ścierniej wyrazimy wzorem

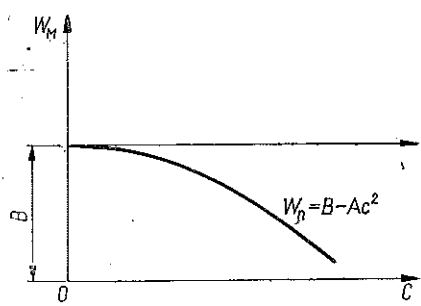
$$W = R_A v_0 + M\omega.$$

Podstawiając wyrażenie R_A i M na podstawie (5) i (6) otrzymujemy

$$(7) \quad W = \frac{2}{3} \frac{P\mu\omega}{a+b} (a^2 + ab + b^2).$$

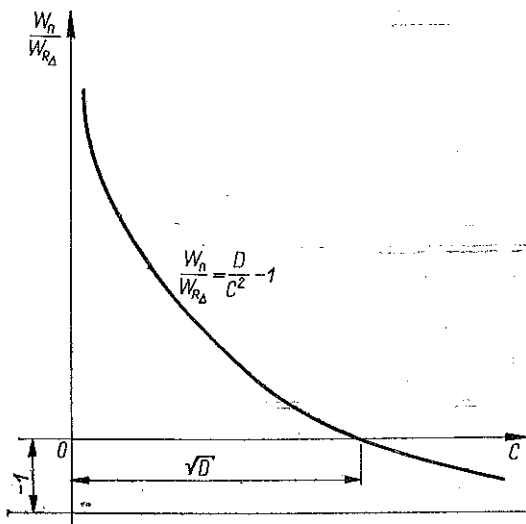


Rys. 2



Rys. 3

Energia zużyta w jednostce czasu na pokonanie oporu wynosi



Rys. 4

$$W_{R_A} = \frac{\mu\omega c^2 P}{a+b}.$$

Energia na jednostkę czasu związana z występowaniem momentu oporu M wynosi

$$W_M = \frac{\mu\omega P}{a+b} \left[\frac{2}{3} (a^2 + ab + b^2) - c^2 \right].$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$A = \frac{\mu\omega P}{a+b},$$

$$B = \frac{2}{3} \frac{\mu\omega P}{a+b} (a^2 + ab + b^2),$$

$$D = \frac{2}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

Otrzymujemy

$$W_{R_A} = Ac^2, \quad W_M = B - Ac^2, \quad \frac{W_M}{W_{R_A}} = \frac{D}{c^2} - 1.$$

Wykresy na rysunkach 2, 3 i 4 przedstawiają zmiany W_R , W_M oraz W_M/W_{R_A} w zależności od c .

$$(11) \quad R_{1d} = \mu p \int_a^b d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho \left(\rho \sin \theta + \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} \right) d\theta}{\sqrt{\left(\frac{r}{k} \right)^2 + \rho^2 + 2 \frac{r}{k} \rho \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta}},$$

$$R_{1n} = \mu p \int_a^b d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho \left(\rho \cos \theta + \frac{r}{k} \cos \frac{\theta}{k} \right) d\theta}{\sqrt{\left(\frac{r}{k} \right)^2 + \rho^2 + 2 \frac{r}{k} \rho \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta}}.$$

Prędkość kątowna ω tarczy ściernej jest znacznie większa od prędkości kątowej ω_1 szlifowanej części. Wynika z tego, że wartość k jest bardzo duża, a zatem wartość stosunku r/k jest bardzo mała. W wyrażeniu (11) opuszczamy wyraz $(r/k)^2$ pod pierwiastkiem mianownika. Przeprowadzając obliczenia w (11) i biorąc pod uwagę, że

$$(12') \quad p = \frac{P}{\pi(b^2 - a^2)}$$

otrzymujemy

$$(12'') \quad R_{1d} = \frac{\mu}{\pi} \frac{rP}{b^2 - a^2} \left[2(b-a) \frac{k-1}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} + r \frac{\ln \frac{b}{a}}{k(k-2)} \sin^2 \frac{2\pi}{k} \right],$$

$$R_{1n} = \frac{\mu}{\pi} \frac{rP}{b^2 - a^2} \left[(b-a) \frac{k}{2k-1} \sin \frac{2\pi}{k} + r \frac{\ln \frac{b}{a}}{2k(k-2)} \sin \frac{4\pi}{k} \right].$$

Stąd wzór na długość całkowitej siły oporu:

$$(13) \quad R_1 = \frac{\mu}{\pi} \frac{rP}{b^2 - a^2} \left\{ \left[2(b-a) \frac{k-1}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} + r \frac{\ln \frac{b}{a}}{k(k-2)} \sin^2 \frac{2\pi}{k} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[(b-a) \frac{k}{2k-1} \sin \frac{2\pi}{k} + r \frac{\ln \frac{b}{a}}{2k(k-2)} \sin \frac{4\pi}{k} \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Mamy następujące zależności wektorowe:

$$\mathbf{R}_{1d} = R_{1d} \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{R}_{1n} = -R_{1n} \mathbf{n}.$$

Elementarny moment oporu odpowiadający elementarnemu wycinkowi kołowemu $dA_a = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$ ma postać

$$d\mathbf{M}_1 = -dM_1 \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$

Aby podać wzór na długość elementarnego momentu oporu $d\mathbf{M}_1$, obliczamy najpierw ramię elementarnej siły oporu $d\mathbf{R}_1$ względem punktu O_1 , oznaczonego na rys. 6 przez $\overline{O_1N}$:

$$\overline{O_1N} = r \sin(\gamma + \varphi) + \rho \sin(\gamma + \theta).$$

Opuszczony pod pierwiastkiem mianownika wyraz $(r/k)^2$. Po dokonaniu obliczeń i biorąc pod uwagę (12), otrzymujemy

$$(17) \quad M_1 = \frac{\mu P}{\pi} \left\{ \frac{2\pi}{a+b} \left(\frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} + \frac{r^2}{k} \right) + \frac{r}{k-1} \left(\frac{r^2}{b^2 - a^2} \frac{\ln \frac{b}{a}}{k} - \frac{k}{2} \right) \sin \frac{2\pi}{k} - \frac{r^2}{a+b} \frac{k+1}{k^2} \left[\pi - \frac{k}{4(k-1)} \sin \frac{4\pi}{k} \right] \right\}.$$

Wektor M_1 ma postać

$$M_1 = - \frac{M_1 \omega}{\omega}.$$

Energia elementarna zużyta w jednostce czasu w toku procesu szlifowania tarczą ścierną, odpowiadająca wycinkowi kołowemu elementarnemu dA_a da się wyrazić za pomocą wzoru

$$dW_1 = |v dR_1| = \mu p \varrho \sqrt{\omega_1^2 r^2 + \omega^2 \varrho^2 + 2\omega_1 \omega r \varrho \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta} d\varrho d\theta.$$

Całkując po całej powierzchni czynnej tarczy ścierniej otrzymujemy

$$W_1 = \mu p \omega \int_a^b d\varrho \int_0^{2\pi} \varrho \sqrt{\left(\frac{r}{k}\right)^2 + \varrho^2 + 2\frac{r}{k} \varrho \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta} d\theta.$$

Opuszczamy pod znakiem pierwiastka wyraz $(r/k)^2$. Dokonawszy obliczeń i uwzględniając (12) otrzymujemy:

$$(18) \quad W_1 = \frac{\mu \omega P}{\pi} \left[\frac{2}{3} \pi \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} - \frac{r}{2(k-1)} \sin \frac{2\pi}{k} \right].$$

Przypadek trzeci

Tarcza ścierna wykonuje ruch obrotowy wokół swej osi symetrii z prędkością kątową ω , z kolei oś porusza się po kole z prędkością kątową ω_1 . Szlifowana część przesuwa się po prostej z szybkością v_0 (rys. 7).

Elementarną siłę oporu odpowiadającą elementarnemu wycinkowi kołowemu $dA_a = \varrho d\varrho d\theta$ wyraża wzór wektorowy

$$dR_2 = dR_{2A} + dR_{2n},$$

gdzie

$$dR_{2A} = dR_{2A} \sigma, \quad dR_{2n} = -dR_{2n} n.$$

Długości sił elementarnych dR_2 , dR_{2A} i dR_{2n} określamy za pomocą wzorów

$$(19) \quad dR_2 = \mu p \varrho d\varrho d\theta, \quad dR_{2A} = \mu p \varrho \cos \gamma d\varrho d\theta, \\ dR_{2n} = \mu p \varrho \sin \gamma d\varrho d\theta,$$

a prędkość v elementarnego wycinka kołowego dA_a

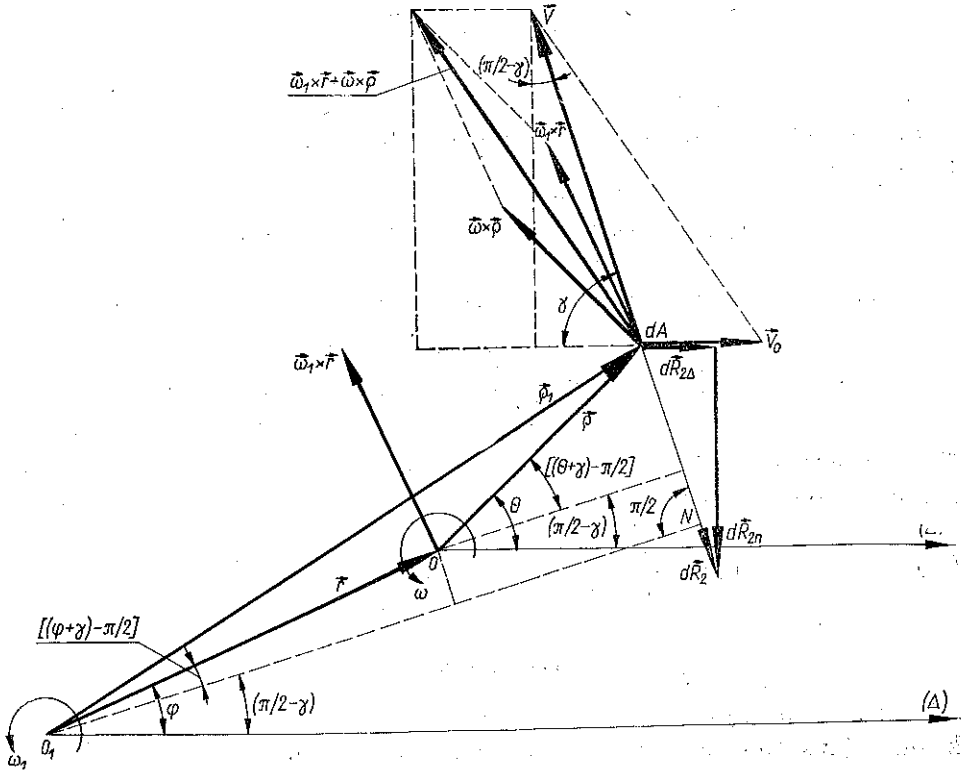
$$v = v_0 + \omega_1 \times r + \omega \times \rho.$$

W dalszym ciągu posłużymy się następującymi oznaczeniami:

$$\frac{v_0}{\omega} = c, \quad \frac{\omega}{\omega_1} = k,$$

zatem

$$\frac{\theta}{\varphi} = k, \quad \beta = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\theta, \quad \theta - \beta = \frac{\theta}{k}.$$



Rys. 8

Na podstawie rys. 8 otrzymujemy

$$(20) \quad \sin \gamma = \frac{\frac{r}{k} \cos \frac{\theta}{k} + e \cos \theta}{\sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{k}\right)^2 + e^2 - 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2ce \sin \theta + 2 \frac{r}{k} e \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} + e \sin \theta - c}{\sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{k}\right)^2 + e^2 - 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2ce \sin \theta + 2 \frac{r}{k} e \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta}}$$

Podstawiamy wyrażenia na $\sin \gamma$ i $\cos \gamma$ ze wzorów (20) do (19) i całkujemy po całej powierzchni czynnej tarczy ścierniej. Otrzymujemy

$$(21) \quad R_{2A} = \mu p \int_a^b d\varrho \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{\varrho \left(\frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} + \varrho \sin \theta - c \right) d\theta}{\sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{k} \right)^2 + \varrho^2 - 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2c \varrho \sin \theta + 2 \frac{r}{k} \varrho \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta}},$$

$$R_{2n} = \mu p \int_a^b d\varrho \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{\varrho \left(\frac{r}{k} \cos \frac{\theta}{k} + \varrho \cos \theta \right) d\theta}{\sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{k} \right)^2 + \varrho^2 - 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2c \varrho \sin \theta + 2 \frac{r}{k} \varrho \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta}}.$$

Ponieważ wartości stosunku $v_0/\omega = c$ oraz $r(\omega_1/\omega) = r/k$ są bardzo małe, opuszczamy we wzorze (21) pod pierwiastkiem mianownika wyrazy c^2 , $(r/k)^2$ i $2c r/k \sin \theta/k$. Dokonawszy obliczeń w wyrażeniu (21) i uwzględniając, że

$$(22) \quad p = \frac{P}{\pi(b^2 - a^2)},$$

otrzymujemy

$$(23) \quad R_{2A} = \frac{\mu}{\pi} \frac{P}{b^2 - a^2} \left\{ (b - a) \left(2r \frac{k-1}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} - c\pi \right) + \right. \\ \left. + r \left[\frac{r}{k(k-2)} \sin^2 \frac{2\pi}{k} - c \frac{2k+1}{k^2-1} \sin \frac{2\pi}{k} \right] \ln \frac{b}{a} \right\},$$

$$R_{2n} = \frac{\mu}{\pi} \frac{r}{b^2 - a^2} P \left\{ (b - a) \frac{k}{2k-1} \sin \frac{2\pi}{k} + \right. \\ \left. + \left[2c \frac{k}{k^2-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} + \frac{r}{2k(k-2)} \sin \frac{4\pi}{k} \right] \ln \frac{b}{a} \right\}.$$

Wynika stąd wzór na długość całkowitej siły oporu:

$$(24) \quad R_2 = \frac{\mu}{\pi} \frac{P}{b^2 - a^2} \left\{ \left\{ (b - a) \left(2r \frac{k-1}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} - c\pi \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + r \left[\frac{r}{k(k-2)} \sin^2 \frac{2\pi}{k} - c \frac{2k+1}{k^2-1} \sin \frac{2\pi}{k} \right] \ln \frac{b}{a} \right\}^2 + \right. \\ \left. + r^2 \left\{ (b - a) + \frac{k}{2k-1} \sin \frac{2\pi}{k} + \left[2c \frac{k}{k^2-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} + \frac{r}{2k(k-2)} \sin \frac{4\pi}{k} \right] \ln \frac{b}{a} \right\}^2 \right\}^{1/2}.$$

W postaci wektorowej mamy

$$\mathbf{R}_{2d} = R_{2d} \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{R}_{2n} = -R_{2n} \mathbf{n}, \quad \mathbf{R}_2 = -R_2 \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Aby nawiązać do pierwszego przypadku, gdy $\omega_1 = 0$, wystarczy wykonać w (23) przejście graniczne $k = \omega/\omega_1 \rightarrow \infty$. Otrzymujemy wtedy

$$[R_{2d}]_{k=\infty} = -\frac{\mu c P}{a+b}, \quad [R_{2n}]_{k=\infty} = 0.$$

Powracamy więc do wzoru (5).

Aby nawiązać do drugiego przypadku, gdzie $v_0 = 0$, wystarczy w (23) przyjąć $c = v_0/\omega = 0$. Otrzymujemy

$$(25) \quad [R_{2d}]_{c=0} = \frac{\mu}{\pi} \frac{r}{b^2 - a^2} P \left[2(b-a) \frac{k-1}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} + r \frac{\ln \frac{b}{a}}{k(k-2)} \sin^2 \frac{2\pi}{k} \right],$$

$$[R_{2n}]_{c=0} = \frac{\mu}{\pi} \frac{r}{b^2 - a^2} P \left[(b-a) \frac{k}{2k-1} \sin \frac{2\pi}{k} + r \frac{\ln \frac{b}{a}}{2k(k-2)} \sin \frac{4\pi}{k} \right].$$

Otrzymaliśmy ponownie wzór (12).

Elementarny moment oporu odpowiadający elementarnemu wycinkowi kołowemu $dA_a = \rho d\varrho d\theta$ określa wzór wektorowy

$$(26) \quad d\mathbf{M}_2 = -\frac{\omega dM_2}{\omega}.$$

Aby podać wzór na długość elementarnego momentu oporu $d\mathbf{M}_2$, wyprowadzamy najpierw wzór na ramię siły oporu elementarnego $d\mathbf{R}_2$ względem punktu O_1 , oznaczone na rys. 8 przez $\overline{O_1 N}$:

$$\overline{O_1 N} = \sin r(\gamma + \varphi) + \varrho \sin(\gamma + \theta).$$

Uwzględniając (20) i oznaczenie $\varphi = \theta/k$ mamy

$$(27) \quad \overline{O_1 N} = \frac{\frac{r^2}{k} \mp \varrho r \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta - cr \sin \frac{\theta}{k} + \varrho \frac{r}{k} \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta + \varrho^2 - \varrho c \sin \theta}{\sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{k}\right)^2 + \varrho^2 - 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2\varrho \sin \theta + 2\varrho \frac{r}{k} \cos \left(1 - \frac{1}{k}\right) \theta}}.$$

Długość elementarnej siły oporu $d\mathbf{R}_2$ określa wzór

$$(28) \quad dR_2 = \mu \rho \varrho d\varrho d\theta,$$

a długość elementarnego momentu oporu $d\mathbf{M}_2$

$$(29') \quad d\mathbf{M}_2 = \overline{O_1 N} dR_2.$$

Podstawiając wyrażenia (27) i (28) do wzoru (29) i całkując po całej powierzchni czynnej tarczy ścierniej, otrzymamy

$$M_2 = \mu p \int_a^b dQ \times \int_0^{2\pi} \frac{\rho \left[\frac{r^2}{k} + r\rho \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta - cr \sin \frac{\theta}{k} + \rho \frac{r}{k} \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta + \rho^2 - c\rho \sin \theta \right] d\theta}{\sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{k} \right)^2 + \rho^2 - 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2c\rho \sin \theta + 2\rho \frac{r}{k} \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta}}$$

Opuszczamy w wyrażeniu pod pierwiastkiem licznika wyrazy c^2 , $(r/k)^2$ i $2c r/k \sin \theta/k$. Po wykonaniu działań i biorąc przy tym pod uwagę (22), otrzymamy

$$(29'') \quad M_2 = \frac{\mu}{\pi} P \left\{ \frac{2\pi}{a+b} \left[\frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} + \frac{r^2}{k} \right] - \frac{\pi c^2}{a+b} + \right. \\ \left. + \frac{r}{k-1} \left[\frac{r^2(k+1) + k^3 c^2}{k(k+1)} \frac{\ln \frac{b}{a}}{b^2 - a^2} - \frac{k}{2} \right] \sin \frac{2\pi}{k} - 2 \frac{crk}{a+b} \frac{k-3}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} - \right. \\ \left. - \left(\frac{r}{k} \right)^2 \frac{k+1}{a+b} \left[\pi - \frac{k}{4(k-1)} \sin \frac{4\pi}{k} \right] - cr^2 \frac{1}{k-2} \frac{\ln \frac{b}{a}}{b^2 - a^2} \sin^2 \frac{2\pi}{k} \right\}$$

Mamy

$$M_2 = \frac{\omega M_2}{\omega}$$

Aby nawiązać do przypadku pierwszego, gdzie $\omega_1 = 0$, wystarczy we wzorze (29) wykonać przejście graniczne $k = \omega/\omega_1 = \infty$. Otrzymamy

$$(30) \quad [M_2]_{k=\infty} = \frac{\mu P}{a+b} \left[\frac{2}{3} (a^2 + ab + b^2) - c^2 \right].$$

Wracamy więc do wzoru (6).

Aby przejść do drugiego przypadku, gdzie $v_0 = 0$, wystarczy podstawić w (29) $c = v_0/\omega = 0$. Otrzymamy

$$(31) \quad [M_2]_{c=0} = \frac{\mu}{\pi} P \left\{ \frac{2\pi}{a+b} \left(\frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} + \frac{r^2}{k} \right) + \right. \\ \left. + \frac{r}{k-1} \left(\frac{r^2}{b^2 - a^2} \frac{\ln \frac{b}{a}}{k} - \frac{k}{2} \right) \sin \frac{2\pi}{k} - \frac{r^2}{a+b} \frac{k+1}{k^2} \left[\pi - \frac{k}{4(k-1)} \sin \frac{4\pi}{k} \right] \right\}.$$

Wróciliśmy więc do wzoru (17).

Energię podstawową zużyta w jednostce czasu w procesie szlifowania, odpowiadającą elementarnemu wycinkowi kołowemu dA_a , wyrazimy za pomocą wzoru

$$dW_2 = |\bar{v}d\bar{\mathbf{R}}_2| = \mu p \varrho \left[v_0^2 + \omega_1^2 r^2 + \omega^2 \varrho^2 - 2v_0 \omega_1 r \sin \frac{\theta}{k} - 2v_0 \omega \varrho \sin \theta + \right. \\ \left. + 2\omega_1 \omega r \varrho \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta \right]^{1/2} d\varrho d\theta.$$

Całkując po całej powierzchni tarczy ścierniej otrzymujemy

$$W_2 = \mu p \omega \int_a^b d\varrho \int_0^{2\pi} \varrho \left[c^2 + \left(\frac{r}{k} \right)^2 + \varrho^2 + 2c \frac{r}{k} \sin \frac{\theta}{k} - 2c\varrho \sin \theta + \right. \\ \left. + 2\varrho \frac{r}{k} \cos \left(1 - \frac{1}{k} \right) \theta \right]^{1/2} d\theta.$$

Opuszczamy w wyrażeniu pod pierwiastkiem wyrazy c^2 , $(r/k)^2$ oraz $2c r/k \sin \theta/k$. Po wykonaniu działań i uwzględnieniu (22) otrzymujemy

$$(32) \quad W_2 = \frac{\mu \omega P}{\pi} \left[\frac{2}{3} \pi \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} - \frac{r}{2(k-1)} \sin \frac{2\pi}{k} \right].$$

Porównując odpowiednio wyrażenia na \mathbf{R}_{1A} , \mathbf{R}_{1n} i \mathbf{M}_1 z wyrażeniami \mathbf{R}_{2A} , \mathbf{R}_{2n} i \mathbf{M}_2 otrzymujemy następujące zależności:

$$\mathbf{R}_{2A} = \mathbf{R}_{1A} - \frac{\mu c}{\pi} \frac{P}{b^2 - a^2} \left[\pi(b-a) + r \ln \frac{b}{a} \frac{2k+1}{k^2-1} \sin \frac{2\pi}{k} \right] \boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{R}_{2n} = \mathbf{R}_{1n} - 2 \frac{\mu c}{\pi} \frac{P}{b^2 - a^2} r \ln \frac{b}{a} \frac{k}{k^2-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} \mathbf{n},$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1 - \frac{\mu c}{\pi} P \left\{ \frac{c}{a+b} \left(r \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} \frac{k^2}{k^2-1} \sin \frac{2\pi}{k} - \pi \right) + \right. \\ \left. + r \left[-2 \frac{k}{a+b} \frac{k-3}{2k-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} - \frac{r}{k-2} \sin^2 \frac{2\pi}{k} \frac{\ln \frac{b}{a}}{b^2 - a^2} \right] \right\} \boldsymbol{\omega}$$

oraz nadto

$$R_2 = \left(\left\{ \mathbf{R}_{1A} - \frac{\mu c}{\pi} \frac{P}{b^2 - a^2} \left[\pi(b-a) + r \ln \frac{b}{a} \frac{2k+1}{k^2-1} \sin \frac{2\pi}{k} \right] \right\}^2 + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{R}_{1n} + 2 \frac{\mu c}{\pi} \frac{P}{b^2 - a^2} r \ln \frac{b}{a} \frac{k}{k^2-1} \sin^2 \frac{\pi}{k} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Wzory na energię zużyta podane w (18) w przypadku drugim i wzór (32) w przypadku trzecim określa ta sama funkcja k :

$$W_1 = f(k), \quad W_2 = f(k).$$

Stawiamy zagadnienie następujące: określić wartości zmiennej k w taki sposób, aby W_1 albo W_2 było minimalne, a zatem aby energia zużyta w toku procesu szlifowania była najmniejsza; zmienna k jest zależna od prędkości kątowej ω_1 , ponieważ prędkość kątową ω przyjęto za stałą.

Przyjmijmy

$$(33) \quad W^* = \frac{W_1}{\mu P} = \frac{W_2}{\mu P} = \omega \left(\frac{2}{3} \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} - \frac{r}{2\pi} \frac{1}{k-1} \sin \frac{2\pi}{k} \right)$$

i przyrównujemy do zera pochodną W^* względem k : $\partial W^* / \partial k = 0$. Otrzymujemy równanie przestępne

$$(34) \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{k} = 2\pi \frac{1-k}{k^2}.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy wartość k , przy którym W^* osiąga ekstremum.

Wobec tego, że

$$(35) \quad k = \frac{\omega}{\omega_1},$$

otrzymujemy wartość prędkości kątowej, ω_1 przy której W^* , a zatem W_1 oraz W_2 mają najmniejsze wartości. Podstawiając wartość znaną dla k do wzorów (33) otrzymujemy minimum dla W^* , a zatem i W_1 oraz W_2 .

Przykład liczbowy

Przyjmijmy następujące wartości liczbowe:

$$a = 165 \text{ mm}, \quad b = 200 \text{ mm}, \quad \omega = 150 \text{ s}^{-1}, \quad r = 5 \text{ cm}.$$

Zatem

$$n = \frac{30}{\pi} \omega = \frac{30}{3,1416} 150 = 1432,391 \frac{\text{obr}}{\text{min}}.$$

Podstawiamy te wartości liczbowe do wzoru (33) i otrzymujemy

$$(36) \quad W^* = 150 \left(18,254 - 0,7958 \frac{\sin \frac{2\pi}{k}}{k-1} \right).$$

Energia W^* osiąga minimum dla pierwiastków równania przestępnego (34). Najdogodniejszym sposobem rozwiązania tego równania jest metoda graficzna, która polega na wykreśleniu dwu krzywych będących przedstawieniem graficznym pierwszego i drugiego wyrazu równania (34).

Odcięte punktów przecięcia tych krzywych są pierwiastkami równania (34). Dla ułatwienia opracowano tablicę 1 i przy jej użyciu nakreślono na rys. 9 krzywe

$$y = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{k}, \quad y = 2\pi \frac{1-k}{k^2};$$

przecinają się one w punkcie, którego odcięta $k = 2,877$. Stąd otrzymujemy prędkość kątową

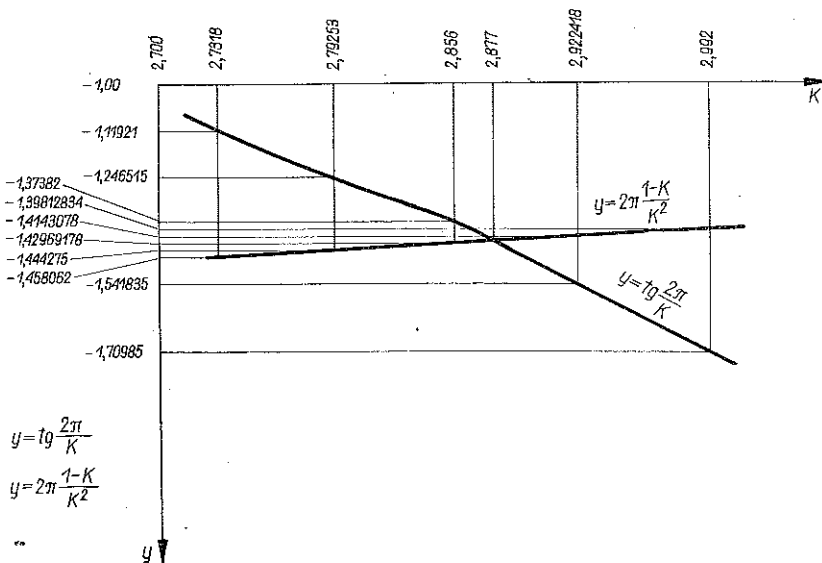
$$\omega_1 = \frac{\omega}{k} = \frac{150}{2,877} = 52,13764 \text{ s}^{-1}$$

oraz odpowiednią prędkość obrotową

$$n_1 = \frac{30}{\pi} \omega_1 = \frac{30}{3,1416} 52,13764 = 497,87661 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$$

Tablica 1

k	$\frac{2\pi}{k}$	$\text{tg} \frac{2\pi}{k}$	$1 - k$	$\frac{1 - k}{k}$	$2\pi \frac{1 - k}{k^2}$
2,7318	2,3	-1,11921	-1,7318	-0,63394	-1,458062
2,79253	2,25	-1,246515	-1,79253	-0,6419	-1,444275
2,856	2,2	-1,37382	-1,856	-0,6498599	-1,42969178
2,922418	2,15	-1,541835	-1,922418	-0,6578176	-1,4143078
2,992	2,1	-1,70985	-1,992	-0,6657754	-1,39812834



Rys. 9

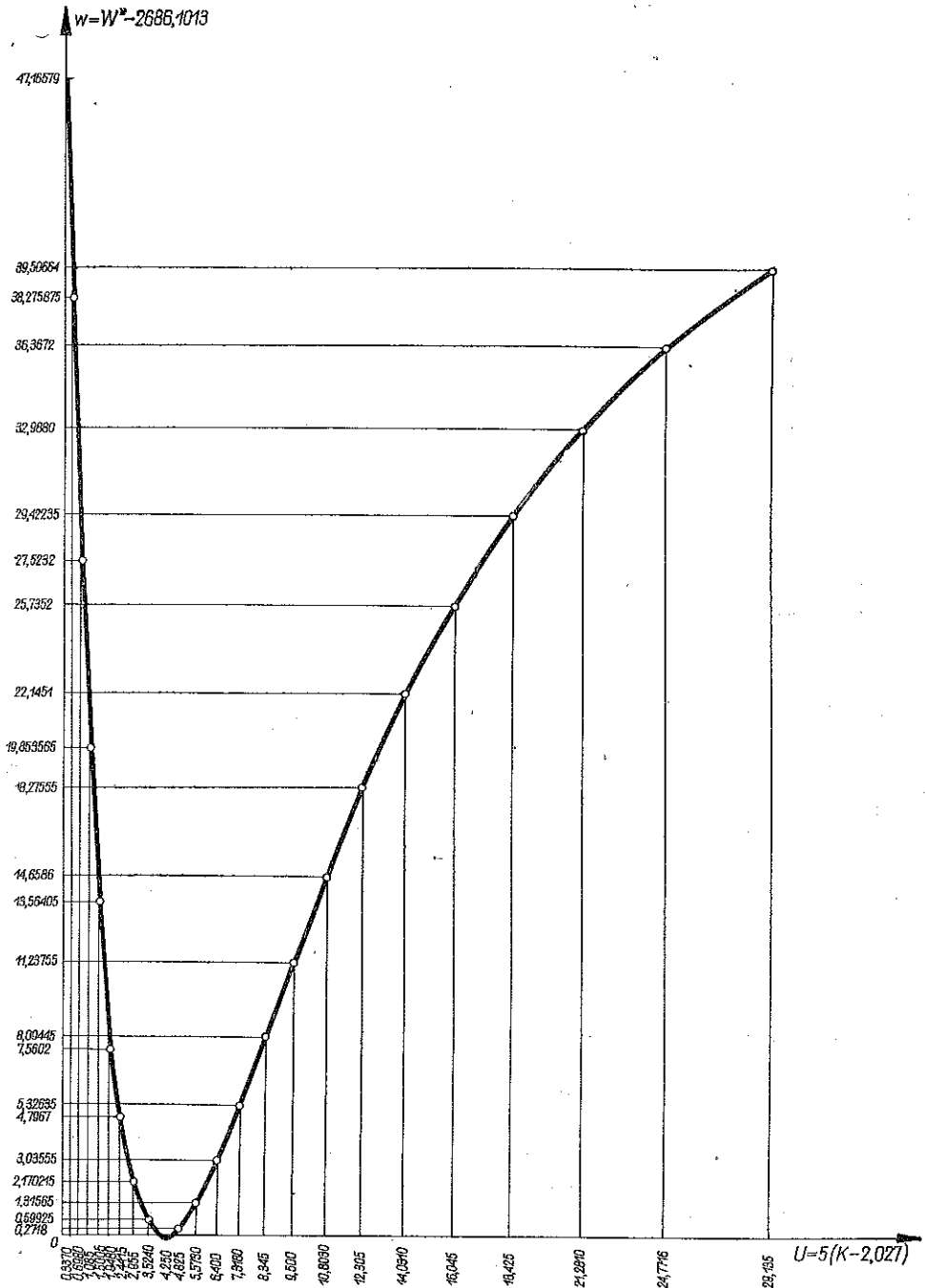
Przedstawiając znalezione k do wzoru (36) otrzymamy

$$W^* = 150 \left(18,254 - 0,7958 \frac{0,817285551}{1,877} \right) = 2686,12377.$$

Energię zużyta w przypadku 2 i 3, odpowiadającą wartości $k = 2,877$, określa wzór

$$W_1 = W_2 = 2686,12377 \mu\text{P}.$$

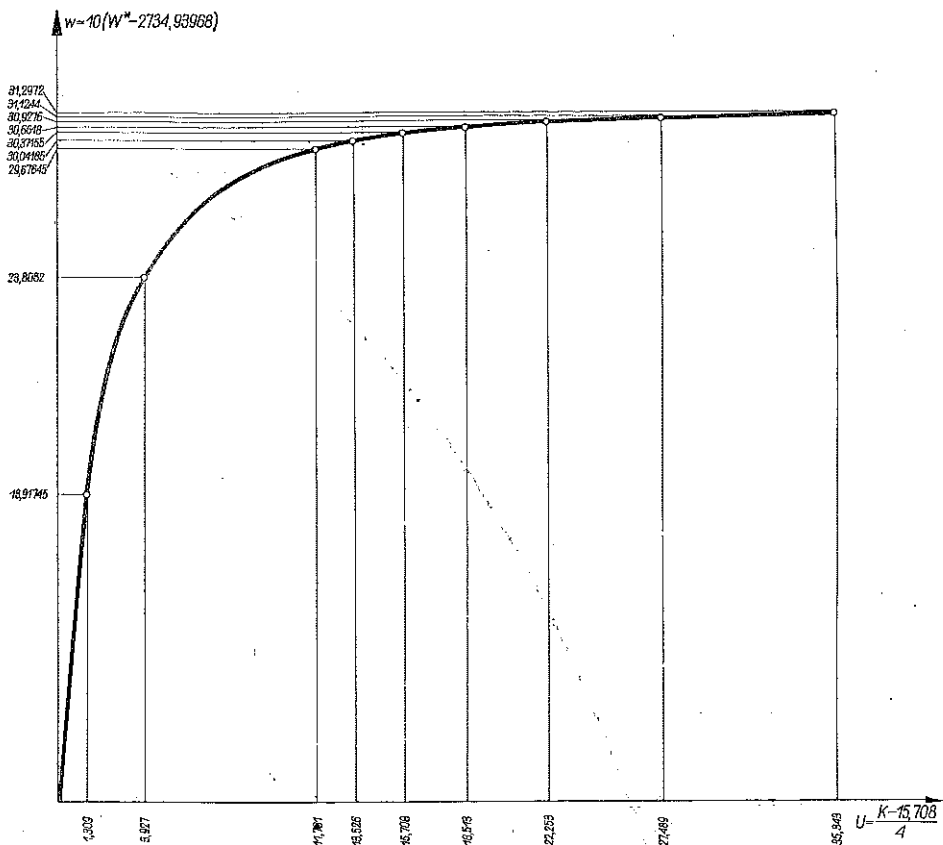
Na rysunku 10 wykreślono krzywą $W^* = f(k)$ uzyskaną na podstawie (36) podstawiając dla k wartości leżące w przedziale wyznaczonego przez punkty $k = 2,027$ oraz $k = 7,854$.



Rys. 10

Analizując kształt tej krzywej zauważamy występowanie wartości minimalnej W^* przy $k = 2,877$.

Aby graficzne przedstawienie krzywych było wyrazistsze i aby ich przebieg uwiadczał wyraźne zmiany zużytej mocy w procesie szlifowania i istnienie jej minimalnej wartości na osi odciętych, naniesiono zmienną $u = 5(k - 2,027)$, stosując podziałkę 1 cm = 1 jednostka u .



Rys. 11

Następnie na osi rzędnych naniesiono funkcję $w = W^* - 2686,1013$ stosując podziałkę

$$1 \text{ cm} = 1 \text{ jednostka } w.$$

Na rysunku 11 wykreślono krzywą $W^* = f(k)$ na podstawie (33) i przyjmując dla k wartości leżące w przedziale $k = 15,708$ do $k = 157,08$.

Na osi odciętych naniesiono zmienną

$$u = \frac{k - 15,708}{4}$$

stosując podziałkę 1 cm = 1 jednostka u , a na osi rzędnych naniesiono funkcję $w = 10$ ($W^* - 2734,93968$) stosując podziałkę 1 cm = 1 jednostka w .

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. G. ALEXEEV, A. V. ARSINOV, A. E. SMOLNIKOV, *Calculul și construcția sculelor aşchietoare*, Editura Tehnică București, 1953.
 [2] S. M. MASLENNIKOV, *Dispozitive și scule aşchietoare pentru prelucrarea metalelor*, Editura Tehnică București, 1953.
 [3] I. LĂZĂRESCU, *Calculul și construcția sculelor aşchietoare*, Editura Technica București, 1961.
 [4] A. RIPIANU, *Curs de statică*, Litografia Institutului Politehnică Cluj, 1953.
 [5] A. RIPIANU, *Dinamică*, Litografia Invățământului, 1955.

Резюме

ШЛИФОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ШЛИФОВАЛЬНЫХ КРУГОВ

Рассматривается цилиндрический шлифовальный круг, который шлифует своей плоской, лицевой поверхностью, представляющей круговое кольцо. Шлифовальный круг вращается вокруг своей геометрической оси с постоянной, в общем, скоростью. Предмет, подвергаемый шлифованию имеет прямолинейное или вращательное движение вокруг оси, параллельной оси оборота шлифовального круга. Этот круг имеет также поступательное движение, передвигаясь в вертикальном направлении при шлифовании вглубь плоской шлифованной поверхности.

В настоящей работе рассматриваются три различных случая:

- 1) шлифовальный круг вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω , а шлифованный элемент вращается прямолинейно со скоростью v_0 ;
- 2) шлифовальный диск вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω , а обрабатываемый элемент вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг постоянной оси оборота, параллельной постоянной оси оборота шлифовального круга;
- 3) шлифовальный круг вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии, которая в свою очередь передвигается по кругу с угловой скоростью ω_1 . Шлифованный элемент передвигается прямолинейно со скоростью v_0 .

В этих трех случаях решается вопрос определения энергии, затраченной во время шлифования кругом и даются зависимости между скоростью привода шлифовального диска и шлифованного элемента, так чтобы затраченная энергия была наименьшая.

Summary

GRINDING OF PLANE SURFACES BY MEANS OF ABRASIVE DISCS

A cylindrical abrasive disc is considered in the process of grinding a plane surface by means of its end surface constituting a circular ring. The abrasive disc rotates about its geometric axis which is fixed in general. The ground object performs a rectilinear or rotatory motion about an axis parallel to the axis of the disc. The disc performs also a translational motion, in the vertical direction if the ground surface forms a recess.

Three different cases are considered.

1) The disc rotates about its symmetry axis with angular velocity ω and the ground object moves rectilinearly with velocity v_0 .

2) The disc rotates about its symmetry axis with angular velocity ω , and the object rotates with angular velocity ω_1 about a fixed axis parallel to that of rotation of the disc.

3) The disc rotates about its symmetry axis with angular velocity ω and this axis moves along a circular path with angular velocity ω_1 . The ground object moves rectilinearly with velocity v_0 .

In these cases the problem of power consumption is solved for the grinding process. Relations between the speed of the disc and that of the work are derived for minimum power consumption.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lipca 1962 r.
