

PEWNE TWIERDZENIE Z ZAKRESU KSZTAŁTOWANIA WYTRZYMAŁOŚCIOWEGO BELEK SPRĘŻONYCH

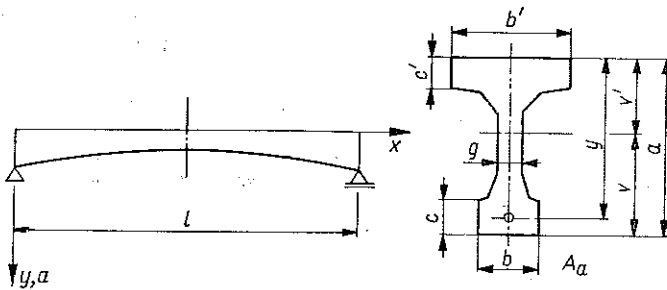
ANDRZEJ BRANDT (WARSZAWA)

I. Wstęp

Celem pracy jest udowodnienie pewnego twierdzenia, odnoszącego się do zagadnień kształtowania belek z betonu sprężonego.

Rozwój historyczny prac nad kształtowaniem wytrzymałościowym konstrukcji oraz związek z zagadnieniami projektowania przedstawiono szczegółowo w pracy Z. WASIUTYŃSKIEGO i A. BRANDTA «Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji» (Rozprawy Inżynierskie, nr 2, tom X, 1962). W pracy tej umieszczono obszerny spis bibliograficzny, którego pozycje będą tu cytowane.

Rozpatrzmy belki jednoprzęsłowe, podparte swobodnie, o przekrojach poprzecznych symetrycznych względem osi pionowej (rys. 1). Przyjmijmy, że na-



Rys. 1

prężenia w belkach nie przekraczają wielkości dozwolonych w betonie i spełniają znany układ czterech nierówności, oznaczony numerami (3.5)-(3.8) w pracy [137]. W stosunku do użytych tam oznaczeń w pracy niniejszej zmienione zostały znaki naprężeń w betonie (znak dodatni odpowiada ścisnaniu). Jest to zgodne z ogólnie przyjętymi obecnie zwyczajami.

Poszukiwane będą funkcje wyznaczające kształt belek, zwane parametrami kształtu. Ze względu na sens fizyczny i zastosowania tylko rzeczywiste i nieujemne wartości tych parametrów będą brane pod uwagę.

Przyjmujemy, że belki spełniają następujące założenia:

1. Odształcenia są sprężyste, a rozkład naprężeń i odształceń może być wyznaczony na podstawie wzorów wytrzymałości materiałów.

2. Wpływ tarcia kabli i odkształceń belek na siły sprężające jest mały i może być pominięty; to samo odnosi się do nieciągłości tych sił przy zmianach ilości kabli.

3. Wobec małej krzywizny trasy kabli pozioma składowa siły sprężającej równa się całkowitej sile.

Przy kształtowaniu belek bierzemy pod uwagę dwa stany obciążenia. Stan 1 odpowiada obciążeniu ciężarem własnym oraz siłą sprężającą, a w stanie 2 występuje ponadto obciążenie użytkowe, działające pionowo i rozłożone równomiernie wzdłuż rozpiętości belki.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

	a	wysokość belki,
a_1, \dots, a_k		funkcje pomocnicze,
	b	szerokość belki,
	\bar{b}	pole przekroju półki,
	c	grubość półki,
c_1, c_2		wielkości stałe,
	g	grubość środnika,
	l	rozpiętość belki,
	p	obciążenie użytkowe rozłożone równomiernie,
	q	ciężar własny belki,
	v	odległość dolnej krawędzi przekroju od środka ciężkości,
x, u, ξ		współrzędne przekrojów poprzecznych belki,
	y	rzędna środków ciężkości uzbrojenia sprężającego,
	\mathcal{A}	pole przekroju poprzecznego,
	E	moduł sprężystości liniowej,
	G	moduł sprężystości postaciowej,
	I	moment bezwładności przekroju poprzecznego,
	M	moment zginający,
	N	siła sprężająca,
	T	siła poprzeczna,
	U	potencjał (energia) odkształcenia sprężystego,
	V	objętość tworzywa belki,
	γ	ciężar jednostkowy żelazobetonu,
	σ	naprężenie.

Indeksy dodawane do niektórych z wymienionych liter podają bliższe informacje. Zastosowano następujące indeksy:

q	ciężar własny (indeks dolny),
p	obciążenie użytkowe (indeks dolny),
0	sprężenie (indeks dolny),
'	krawędź górna (indeks górny); krawędź dolna — symbol bez indeksu,
1	pierwszy stan obciążenia (indeks dolny),

2	drugi stan obciążenia (indeks dolny),	} indeksy dolne.
a	stal sprężająca	
b	beton	
T	ściananie	
M	zginanie	

Ponadto kreska nad symbolem lub pod nim oznacza największą (najmniejszą) wartość dozwoloną.

2. Wzory i zależności podstawowe

Warunek stałej objętości tworzywa konstrukcji ma podstawowe znaczenie w teorii kształtowania na podstawie kryterium minimum energii odkształceń sprężystych, [33]. Warunek ten trzeba sformułować również w przypadku belek sprężonych, wykonywanych z dwóch odmiennych materiałów.

Ponieważ oba materiały różnią się zasadniczo własnościami mechanicznymi i cenami, przeto wygodnie jest posługiwać się pojęciem objętości zastępczej. Określenie to oznacza sumę objętości betonu oraz iloczynu objętości stali przez pewien współczynnik liczbowy \bar{n} :

$$(1) \quad V = V_b + \bar{n}V_a = \int_0^l \mathcal{A}_b dx + \bar{n} \int_0^l \mathcal{A}_a dx.$$

Analogiczny sposób określania objętości zastępczej można znaleźć w pracy [51], gdzie uwzględniono dwa różne rodzaje tworzywa w półkach i w środku belki stalowej.

Energia odkształceń sprężystych w zginanej belce z betonu sprężonego może być wyrażona wzorem

$$(2) \quad U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^l \frac{N^2}{2E\mathcal{A}_b} dx,$$

gdzie całkowity moment zginający M jest sumą momentów wywołanych działaniem ciężaru własnego, obciążenia użytkowego i sprężenia

$$M = M_q + M_p - M_0 = \gamma \int_0^{l/2} \mathcal{A}_b dx - \gamma \int_0^x \mathcal{A}_b(x - \xi) d\xi + M_p(x) - N(y - v).$$

Naprężenia normalne na krawędziach przekroju przedstawione są za pomocą wzorów: na krawędzi górnej w stanie nieobciążonym

$$(3) \quad \sigma'_1 = \frac{N}{\mathcal{A}_b} + (M_q - M_0) \frac{v'}{I};$$

na krawędzi ^{górnym} dolnej w stanie obciążonym

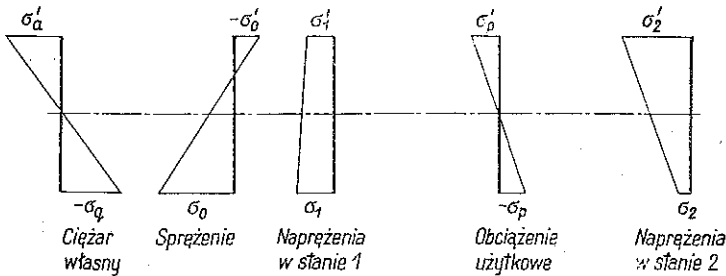
$$\sigma'_2 = \frac{N}{\mathcal{A}_b} + (M_q + M_p - M_0) \frac{v'}{I};$$

na krawędzi dolnej w stanie nieobciążonym

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_b} + (-M_q + M_0) \frac{v}{I};$$

na krawędzi dolnej w stanie obciążonym

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_b} + (-M_q - M_p + M_0) \frac{v}{I}.$$



Rys. 2

Warunki bezpiecznego rozkładu naprężeń w belce określają cztery znane nierówności, wspomniane w p. 1. Zastąpienie wszystkich nierówności przez równości i wyznaczenie kształtu belki z otrzymanych w ten sposób czterech równań jest niecelowe, [127], prowadzi bowiem do nadmiernego zużycia stali sprężającej. Dlatego też nie będziemy wszystkich naprężeń przedstawionych równaniami (3) przyrównywać do wielkości dozwolonych $\bar{\sigma}$ lub σ , a tylko dwa z nich. W ten sposób spośród czterech nierówności tylko dwie zamienimy na równości, traktowane jako warunki dodatkowe przy wyznaczaniu ekstremum potencjału, a pozostałe dwie nierówności pominiemy całkowicie w dalszych rozważaniach. Powoduje to konieczność sprawdzenia wytrzymałości belki po jej ukształtowaniu, co zresztą odpowiada zwykłej kolejności pracy przy projektowaniu.

Można opracować szczegółowe wskazówki wyboru warunków wyrównania naprężeń w różnych przypadkach obciążenia i kształtu przekroju belki. Próbą takiej analizy jest p. 8 w pracy [137]. Ograniczymy się tu tylko do przyjęcia dwóch warunków dotyczących najmniejszego dozwolonego naprężenia $\underline{\sigma}$,

$$\sigma'_1 = \underline{\sigma}, \quad \sigma_2 = \underline{\sigma}.$$

Postępowanie takie jest zgodne z praktyką inżynierską i ma na celu zabezpieczenie przed powstawaniem naprężeń rozciągających, które są szczególnie niewskazane w konstrukcjach betonowych.

3. Twierdzenie o zależności trasy uzbrojenia sprężającego od ciężaru własnego belki

Rozpatrzmy belkę wyżej opisaną. Niech przekrój poprzeczny belki będzie określony przez k niezależnych parametrów a_1, a_2, \dots, a_k .

Zauważmy, że liczba $k = 6$ odpowiada belce skrzynkowej lub dwuteowej niesymetrycznej względem osi poziomej, przy czym parametry w tym przypadku mają następującą interpretację: $a_1 = y$ oznacza współrzędną określającą położenie siły sprężającej, $a_2 = \mathcal{A}_b$ oznacza pole przekroju betonu, $a_3 = \mathcal{A}_a$ oznacza pole przekroju stali sprężającej, $a_4 = I$ oznacza moment bezwładności przekroju betonu, $a_5 = v'$ oraz $a_6 = v$ oznacza odpowiednio odległości górnej i dolnej krawędzi przekroju od osi obojętnej.

Przy mniejszej liczbie parametrów kształtu mamy prostsze przekroje belek: przekrój kołowy lub kwadratowy ($k = 3$), przekrój prostokątny ($k = 4$) oraz przekrój dwuteowy symetryczny ($k = 5$).

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem $k = 6$, który odpowiada najogólniejszemu przypadkowi przekroju belki spośród przydatnych w budownictwie. Przy $k < 6$ można wyprowadzić wszystkie zależności i wnioski w sposób analogiczny. Parametry kształtu, traktowane jako funkcje współrzędnej x , mierzonej na osi skierowanej wzdłuż rozpiętości belki, wyznaczają kształt belki. Parametry pragniemy wyznaczyć z warunku minimum energii odkształceń sprężystych przy spełnieniu pewnych warunków dodatkowych.

Energia odkształceń wyrażona może być za pomocą wzoru

$$(4) \quad U = \int_0^l \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EA} \right) dx = \int_0^l \left\{ \frac{[M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)]^2}{2Ea_4} + \frac{a_3^2 \sigma_a^2}{2Ea_2} \right\} dx.$$

Warunkami dodatkowymi są: warunek wyrównania naprężeń na krawędzi górnej w stanie nieobciążonym

$$(5) \quad \frac{a_3}{a_2} \sigma_a + [M_q - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{a_5}{a_4} - \underline{\sigma} = 0,$$

warunek wyrównania naprężeń na krawędzi dolnej w stanie obciążonym

$$(6) \quad \frac{a_3}{a_2} \sigma_a - [M_q - M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{a_6}{a_4} - \underline{\sigma} = 0$$

oraz warunek zachowania stałej objętości zastępczej belki $V = \text{const}$.

Twierdzenie. *Jedynie funkcja $a_1 = y(x)$ spośród parametrów kształtu przekroju, wyznaczonych z warunku na ekstremum energii odkształceń sprężystych i spełniających warunki wyrównania naprężeń (5) i (6) oraz warunek $V = V_0 = \text{const}$, jest zależna od ciężaru własnego belki q .*

Z twierdzenia tego wynika, że pozostałe parametry a_2, \dots, a_6 nie zależą od ciężaru q .

Dowód. Z twierdzeń rachunku wariacyjnego wynika, że ekstremum warunkowe funkcjonału U jest osiągane w zbiorze funkcji, dla których pewien funkcjonał osiąga ekstremum bezwarunkowe. Warto zauważyć, że warunek izoperymetryczny $V_0 = \text{const}$ łatwo można zastąpić przez równoważny warunek różniczkowy

$$(7) \quad a_2 + \bar{n}a_3 - V'(x) = 0, \quad V(0) = 0, \quad V(l) = V_0;$$

opieramy się tu na znanym twierdzeniu z rachunku wariacyjnego. Przy naszych założeniach należy więc znaleźć ekstremum następującego funkcjonału:

$$U^* = \int_0^l F(x, a_i) dx = \min, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

gdzie

$$(8) \quad F = \frac{[M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)]^2}{2EIa_4} + \frac{a_3^2 \sigma_a^2}{2Ea_2} + \\ + \lambda_1(x) [a_2 + \bar{n}a_3 - V'(x)] + \lambda_2(x) \left\{ \frac{a_3}{a_2} \sigma_a + [M_q - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{a_5}{a_4} - \sigma \right\} + \\ + \lambda_3(x) \left\{ \frac{a_3}{a_2} \sigma_a - [M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{a_6}{a_4} - \sigma \right\}.$$

Jak widać, funkcja F nie zależy od pochodnych funkcji niewiadomych. Prowadzi to do szczególnie prostych równań Eulera nie będących równaniami różniczkowymi.

Funkcje $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ i $\lambda_3(x)$ oznaczają pomocnicze funkcje niewiadome.

Warunkiem koniecznym osiągnięcia ekstremum funkcjonału U^* jest spełnienie przez funkcje niewiadome równań Eulera

$$(9) \quad F_{a_i} - \frac{d}{dx} F_{w_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

$$(10) \quad F_V - \frac{d}{dx} F_{V'} = 0$$

oraz równań (5)-(7).

Równania (9) mają następującą postać:

$$(11) \quad -[M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{a_3 \sigma_a}{a_4 E} - \lambda_2(x) \frac{a_3 a_5}{a_4} \sigma_a + \lambda_3(x) \frac{a_3 a_6}{a_4} \sigma_a = 0, \\ [M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{1}{a_4 E} \frac{\partial M_q}{\partial a_2} - \frac{1}{2E} \left(\frac{a_3 \sigma_a}{a_2} \right)^2 + \lambda_1(x) - \lambda_2(x) \frac{a_3 \sigma_a}{a_2^2} + \\ + \lambda_2(x) \frac{a_5}{a_4} \frac{\partial M_q}{\partial a_2} - \lambda_3(x) \frac{a_3 \sigma_a}{a_2^2} - \lambda_3(x) \frac{a_6}{a_4} \frac{\partial M_q}{\partial a_2} = 0, \\ -[M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] \frac{(a_1 - a_5) \sigma_a}{a_4 E} + \frac{a_3 \sigma_a^2}{a_2 E} + \lambda_1(x) \bar{n} + \lambda_2(x) \frac{\sigma_a}{a_2} - \\ - \lambda_2(x) (a_1 - a_5) \frac{a_5 \sigma_a}{a_4} + \lambda_3(x) \frac{\sigma_a}{a_2} + \lambda_3(x) (a_1 - a_5) \frac{a_6 \sigma_a}{a_4} = 0, \\ - \frac{1}{2a_4^2 E} [M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] - \frac{\lambda_2(x)}{a_4^2} [M_q - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] a_5 - \\ - \lambda_3(x) \frac{a_6}{a_4^2} [M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] = 0,$$

$$-\frac{\lambda_3(x)}{a_4} [M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] = 0,$$

$$\frac{a_3 \sigma_a}{a_4 E} [M_q + M_p - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5)] + \frac{\lambda_2(x)}{a_4} [M_q - a_3 \sigma_a (a_1 - a_5) + a_3 a_5 \sigma_a] +$$

$$+ \lambda_3(x) \sigma_a \frac{a_3 a_6}{a_4} = 0.$$

Z równania (10) otrzymujemy

$$\frac{d}{dx} \lambda_1(x) = 0,$$

przeto λ_1 jest wielkością stałą.

Z równania (11)₁ można wyznaczyć wyrażenie $M_q = a_1 a_3 \sigma_a$, a następnie wyrugować je z pozostałych równań. Otrzymany układ przedstawi się następująco:

$$M_q - a_1 a_3 \sigma_a = -E[\lambda_2(x) a_5 - \lambda_3(x) a_6] - M_p - a_3 a_5 \sigma_a,$$

$$\frac{a_3 \sigma_a}{2E} - \lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) = 0,$$

$$\frac{a_3 \sigma_a}{2E} + \lambda_1 \bar{n} + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) = 0,$$

$$(12) \quad \frac{1}{2} [\lambda_2(x) a_5 - a_3(x) a_6] + E \left[\lambda_2(x) \frac{a_5}{a_4} \right]^2 + E \left[\lambda_3(x) \frac{a_6}{a_4} \right]^2 - \lambda_2(x) \frac{a_5}{a_4} M_p = 0,$$

$$\lambda_3(x) \frac{E}{a_4} [\lambda_2(x) a_5 - \lambda_3(x) a_6] = 0,$$

$$\lambda_2(x) a_5^2 + 2\lambda_3(x) a_6 + \lambda_2(x) \{E[\lambda_2(x) a_5 + \lambda_3(x) a_6] + M_p - a_3 a_5 \sigma_a\} = 0.$$

W równaniach (12) występuje 6 funkcji niewiadomych a_i oraz dwie funkcje pomocnicze $\lambda_2(x)$ i $\lambda_3(x)$; aby te równania rozwiązać, trzeba uwzględnić także równania (5) i (6). Z równań (5) i (6) można wyrugować wyrażenie $M_q - a_1 a_3 \sigma_a$ za pomocą pierwszego z równań (12). Otrzymujemy w ten sposób następujące równania:

$$(13) \quad \frac{a_3 \sigma_a}{a_2} - \frac{a_5}{a_4} \{E[\lambda_2(x) a_5 - \lambda_3(x) a_6] + M_p\} - \underline{\sigma} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{a_3 \sigma_a}{a_2} + \frac{a_5}{a_4} E[\lambda_2(x) a_5 - \lambda_3(x) a_6] - \underline{\sigma} = 0.$$

Jest więc widoczne, że można wyznaczyć wszystkie poszukiwane funkcje prócz $a_1 = y(x)$ całkowicie niezależnie od momentu wywołanego ciężarem własnym M_q . Funkcja $a_1 = y(x)$ może być następnie znaleziona z pierwszego z równań (12) w zależności między innymi od M_q , co kończy dowód naszego twierdzenia.

W twierdzeniu tym oraz w dalszych rozważaniach przyjęto bez dowodu, że istnieje minimum funkcjonału U , odwołując się jedynie do fizycznej realizacji opisywanych tu zjawisk.

Analogiczne twierdzenie można sformułować i udowodnić w przypadku kształtowania z warunku na minimum energii tylko pod działaniem obciążeń użytkowych ($M_q = 0$) oraz gdy zadanie nie zawiera warunków wyrównania naprężeń (5) i (6).

Резюме

НЕКОТОРАЯ ТЕОРЕМА, КАСАЮЩАЯСЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК

Рассматриваются свободно опертые балки, изготовленные из предварительно-напряженного бетона, форма которых определяется из условия минимума потенциала упругих деформаций, при постоянном объеме материала. Для этих балок формулируется и доказывается следующая теорема: среди всех функций, определяющих форму балки, только функция, определяющая положение сопрягающей силы, зависит от собственного веса балки.

Summary

A THEOREM ON THE OPTIMUM DESIGN OF PRESTRESSED BEAMS

The object of the considerations are simply supported prestressed concrete beams of which the form has been determined from the condition of minimum elastic potential with constant material volume. For such beams the following theorem is formulated and proved.

Among all the functions determining the form of the beam the function determining the location of the prestressing force is the only depending on the weight of the beam.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 marca 1962 r.