

STATECZNOŚĆ SPRĘŻYŚCIE UTWIERDZONEGO PRĘTA ŚCISKANEGO
W OGÓLNYM PRZYPADKU ZACHOWANIA SIĘ OBCIĄŻENIA

ZDZISŁAWA KORDAS (KRAKÓW)

1. Wstęp

W ostatnich latach wiele uwagi poświęcono w literaturze zagadnieniu stateczności pręta obciążonego na swobodnym końcu, gdy siła w trakcie wyboczenia zmienia swój kierunek i punkt przyłożenia. Badania prowadzone metodami statycznymi przy wykorzystaniu równań równowagi statycznej okazują się w wielu przypadkach niewystarczające, a określenie obciążeń krytycznych wymaga badania małych drgań pręta wokół pierwotnego stanu równowagi. H. ZIEGLER, [13], oraz L. M. ZORIJ i M. JA. LEONOW, [14], podają przegląd rozwoju teorii stateczności prętów sprężystych i zwracają szczególną uwagę na ograniczoność zakresu stosowania statycznego kryterium stateczności statycznej.

Przypadek pręta utwierdzonego i obciążonego na swobodnym końcu siłą o zmiennym kierunku działania w trakcie wyboczenia pręta był przedmiotem badań prac G. JU. DŻANIELIDZEGO, [5], A. R. RŻANICYNA, [11], L. M. ZORIJ i M. JA. LEONOWA i innych. R. ROSMAN w pracy [10] zajmuje się badaniem stateczności pręta sprężysto utwierdzonego o zmiennym momencie bezwładności pod działaniem siły o zmiennym kierunku. W pracy [7] szczegółowo badano zależność siły krytycznej dla sztywno utwierdzonego pręta od «współczynnika śledzenia» η . Współczynnik ten został przyjęty podobnie jak u DŻANIELIDZEGO, [5], jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem siły (po wyboczeniu pręta) a nieodkształconą osią pręta do kąta nachylenia stycznej φ_l na swobodnym końcu pręta. Okazuje się, że kryterium statyczne daje tu rozwiązanie jedynie w zakresie $\eta \leq 0,5$, natomiast przy $\eta > 0,5$ można określić siłę krytyczną biorąc pod uwagę kinetyczne kryterium stateczności statycznej, uzyskane w drodze analizy drgań pręta.

W niniejszej pracy będziemy się zajmować prętem sprężysto utwierdzonym, a ponadto założymy, że w trakcie wyboczenia siła działająca na swobodnym końcu pręta zmienia nie tylko kierunek działania, ale i punkt przyłożenia (daje dodatkowy moment). Zjawisko to może mieć między innymi miejsce przy opływie badanego pręta strumieniem płynu.

Założmy, że przekrój pręta posiada co najmniej jedną oś symetrii i ograniczmy się do badania wyboczenia w płaszczyźnie symetrii.

Nachylenie wypadkowej do końcowego przekroju pręta może być scharakteryzowane wtedy kątem χ , jaki tworzy ona z kierunkiem stycznej do osi pręta w końco-

wym jego przekroju (rys. 1). Przesunięcie punktu przyłożenia wypadkowej możemy natomiast scharakteryzować mimośrodem e (czyli odległością punktu przyłożenia

wypadkowej ciśnien od środka ciężkości swobodnego przekroju pręta). Założymy, że funkcje e i χ są analitycznymi funkcjami strzałki ugięcia $f = y(l)$ i kąta $\varphi_l = y'(l)$, czyli

$$(1.1) \quad \begin{aligned} e &= e_{00} + e_{10}f + e_{01}\varphi_l + e_{20}f^2 + \\ &\quad + e_{11}f\varphi_l + e_{02}\varphi_l^2 + \dots, \\ \chi &= \chi_{00} + \chi_{10}f + \chi_{01}\varphi_l + \chi_{20}f^2 + \\ &\quad + \chi_{11}f\varphi_l + \chi_{02}\varphi_l^2 + \dots \end{aligned}$$

W przypadku $\varphi_l = f = 0$ (pręt przed wybozczeniem) mamy $e = \chi = 0$, zatem $e_{00} = \chi_{00} = 0$: ograniczając się do analizy ugięć nieskończenie małych pominiemy kwadraty i wyższe potęgi f i φ_l i zapiszemy związki (1.1) w postaci liniowej. Wprowadzimy bezwymiarowe parametry α, β, γ i δ takie, że zachodzą związki

$$(1.2) \quad \begin{aligned} e &= \alpha l \varphi_l + \beta f, \\ \chi &= \gamma \varphi_l + \frac{\delta}{l} f, \end{aligned}$$

gdzie l jest długością pręta.

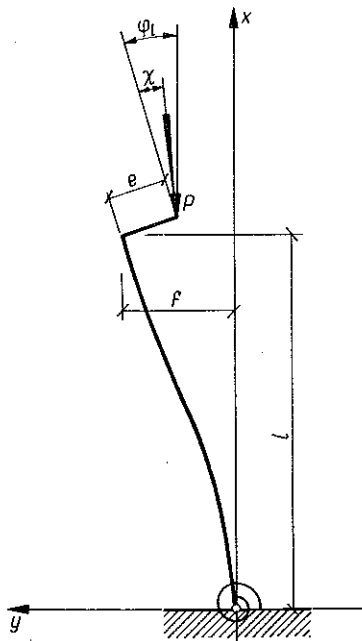
Warunkiem utwierdzenia sprężystego jest proporcjonalność momentu utwierdzenia M_u do kąta obrotu przekroju w miejscu utwierdzonym φ_u :

$$(1.3) \quad M_u = C_u \varphi_u,$$

gdzie C_u jest parametrem charakteryzującym sztywność utwierdzenia. Założenia (1.2) i (1.3) prowadzą do bardzo ogólnych warunków brzegowych, przy których będziemy dalej przeprowadzać analizę stateczności omawianego pręta. Jeżeli założymy, że ugięcia pręta w trakcie wybozczenia są małe, to warunki brzegowe wyrażają się wtedy następująco:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= \psi l y''(0), \\ y''(l) &= -k^2 [\alpha l y'(l) + \beta y(l)], \\ y'''(l) &= -k^2 \left[\gamma y'(l) + \frac{\delta}{l} y(l) \right], \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia: $\psi = EJ/C_u l$, $k^2 = P/EJ$, przy czym EJ jest sztywnością przekroju pręta. W przypadku $\delta = 0$ czwarty z warunków (1.4) ma postać $y'''(l) = -k^2 \gamma y'(l)$ przyjmowaną do rozważań w pracy [7], gdy $\gamma = 1 - \eta$; dla $\beta = \gamma$ otrzymujemy problem sformułowany przez A. R. RZANICYNA, [11].



Rys. 1

W obecnej pracy wyprowadzimy równanie określające siłę krytyczną w ogólnym przypadku pięcioparametrowym. Przy wykorzystaniu statycznego kryterium stateczności statycznej znajdziemy granice jego stosowności i zajmiemy się badaniem niektórych przypadków szczególnych. Następnie wyprowadzimy równanie, określające wartość obciążenia krytycznego przy zastosowaniu kinetycznego kryterium stateczności statycznej, uzyskanego na drodze analizy małych drgań pręta.

Musimy jednak zaznaczyć, że jakkolwiek ogólne warunki brzegowe (1.4) zinterpretowaliśmy jako odpowiadające np. działaniu na powierzchnię czołową pręta strumienia płynu, to jednak uzyskane tu rozwiązanie nie będzie w całości odpowiadać tej interpretacji, ponieważ nie uwzględnimy działania ciśnienia na poboczną prętą po wyboczeniu.

Większość prac dotyczących stateczności pręta w strumieniu płynu uwzględnia właśnie tylko to oddziaływanie «boczne», pomijając opór czołowy (A. A. MOWCZAN, [8], W. W. BOŁOTIN, [2]). Jednoczesne uwzględnienie obu tych oddziaływań wykroczyłoby poza ramy obecnej pracy.

W pracy tej nie będziemy również uwzględniać wpływu tłumienia, którym zajmują się między innymi H. ZIEGLER, [13] oraz L. M. ZORIJ i M. JA. LEONOW, [15].

2. Statyczne kryterium stateczności

Kryterium statyczne uzyskamy drogą analizy równania różniczkowego ugiętej osi pręta. Z uwagi na warunki (1.4) przyjmiemy je tu w postaci równania nie drugiego, lecz czwartego rzędu, mianowicie (A. R. RŻANICYN, [11]):

$$(2.1) \quad EJy^{IV} + Py'' = 0.$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać:

$$(2.2) \quad y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4,$$

przy czym do wyznaczenia stałych C_1 , C_2 , C_3 i C_4 posłużą warunki (1.4). Wykorzystując pierwsze dwa z warunków (1.4) możemy obliczyć stałe:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} C_3 &= -C_1 k - C_2 \psi k^2, \\ C_4 &= -C_2. \end{aligned}$$

Wykorzystując dwa ostatnie z warunków (1.4) i wzory (2.3), otrzymujemy układ dwóch równań jednorodnych ze względu na dwie pozostałe stałe C_1 i C_2 :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} C_1 [(\gamma - 1) kl \cos kl + \delta \sin kl - (\gamma + \delta) kl] + \\ + C_2 [(1 - \gamma) kl \sin kl + \delta \cos kl - (\gamma + \delta) \psi k^2 l^2 - \delta] = 0, \\ C_1 [a kl \cos kl + (\beta - 1) \sin kl - (\alpha + \beta) kl] + \\ + C_2 [-a kl \sin kl + (\beta - 1) \cos kl - (\alpha + \beta) \psi k^2 l^2 - \beta] = 0. \end{aligned}$$

Przyrównując do zera wyznacznik główny tego układu uzyskujemy równanie ze względu na kl :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, \psi; kl) = & (1 - \beta - \gamma + 2\beta\gamma - 2\alpha\delta) kl + \\ & + [(\alpha + \beta - \beta\gamma + \alpha\delta) \psi k^3 l^3 + (\beta + \gamma + \delta - 2\beta\gamma + 2\alpha\delta) kl] \cos kl + \\ & + \{ [(-\gamma - \delta - \alpha\delta + \beta\gamma) \psi + (\alpha + \beta + \alpha\delta - \beta\gamma)] k^2 l^2 - \delta \} \sin kl = 0. \end{aligned}$$

Jest to równanie przestępne, określające wartość siły krytycznej jako funkcję pięciu współczynników $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i ψ .

3. Zakres stosowalności kryterium statycznego

Równanie (2.5) określa wartość siły krytycznej jedynie w ograniczonych przedziałach wartości poszczególnych parametrów, charakteryzujących sposób zachowania się obciążenia po utracie stateczności pręta. Granice stosowalności tego równania (czyli granice stosowalności statycznego kryterium stateczności statycznej) uzyskamy przez uogólnienie warunku wykorzystywanego w pracy [7], gdzie poszukiwano granicznej wartości «współczynnika śledzenia», przy którym kryterium statyczne daje rozwiązanie. Warunek ten dla dowolnego z parametrów, który oznaczmy ogólnie przez ϑ_i ma tu postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial \vartheta_i}{\partial (kl)} = 0.$$

Pochodną tę można obliczyć jako pochodną funkcji uwikłanej

$$(3.2) \quad \frac{\partial \vartheta_i}{\partial (kl)} = - \frac{\partial F / \partial (kl)}{\partial F / \partial \vartheta_i},$$

co z uwagi na (3.1) prowadzi dla każdego ϑ_i do równania

$$(3.3) \quad \frac{\partial F}{\partial (kl)} = 0.$$

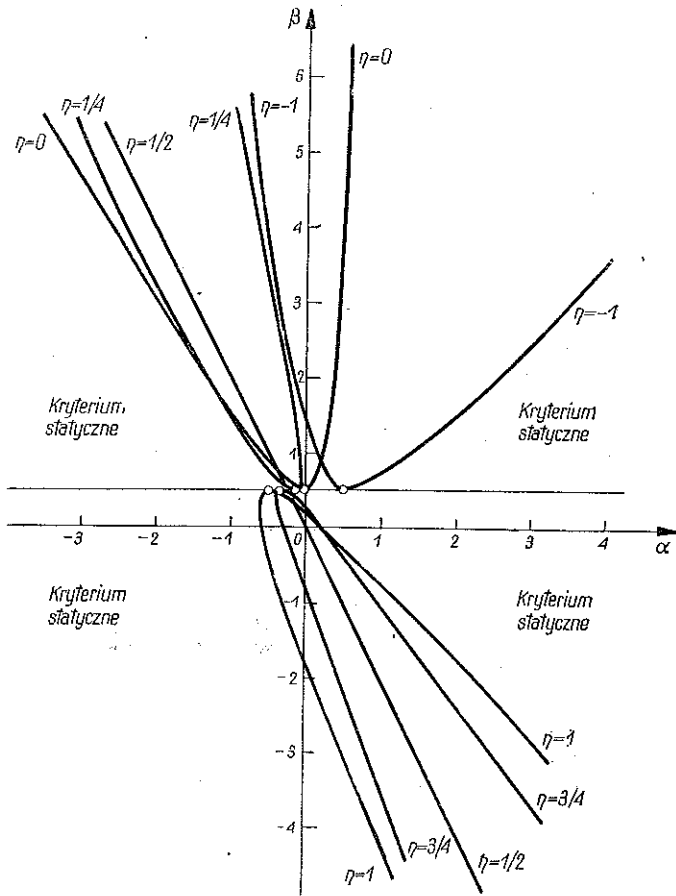
Po zróżniczkowaniu równania (2.5) względem kl uzyskuje się równanie w postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi; kl) = & (1 - \beta - \gamma + 2\beta\gamma - 2\alpha\delta) + \\ & + \{ [(3\alpha + 3\beta - \gamma - \delta - 2\beta\gamma + 2\alpha\delta) \psi + (\alpha + \beta - \beta\gamma + \alpha\delta)] k^2 l^2 + \\ & + (\beta + \gamma - 2\beta\gamma + 2\alpha\delta) \} \cos kl + \{ (-\alpha - \beta + \beta\gamma - \alpha\delta) \psi k^3 l^3 + \\ & + [(\gamma + \delta - \beta\gamma + \alpha\delta) 2\psi + (2\alpha + \beta - \gamma - \delta)] kl \} \sin kl = 0. \end{aligned}$$

Równania (2.5) są więc parametrycznymi równaniami (przy parametrze kl) hiperpowierzchni granicznej w pięciowymiarowej przestrzeni zmiennych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i ψ , ograniczającej stosowalność statycznego kryterium stateczności statycznej.

4. Przypadki szczególne

W dalszej części pracy zajmiemy się analizą przypadków szczególnych prostszych, dających się łatwiej przedstawić wykreślnie. Jako pierwszy rozważymy przypadek, w którym $\psi = \delta = 0$ oraz $\gamma = 1 - \eta$. Jest to przypadek pręta sztywno utwierdzonego, obciążonego siłą o zmiennym kierunku działania i punkcie przyłożenia w trakcie wyboczenia pręta. Założenie $\delta = 0$ oznacza przyjęcie warunku na siłę poprzeczną na swobodnym końcu pręta podobnie jak w pracy [7].



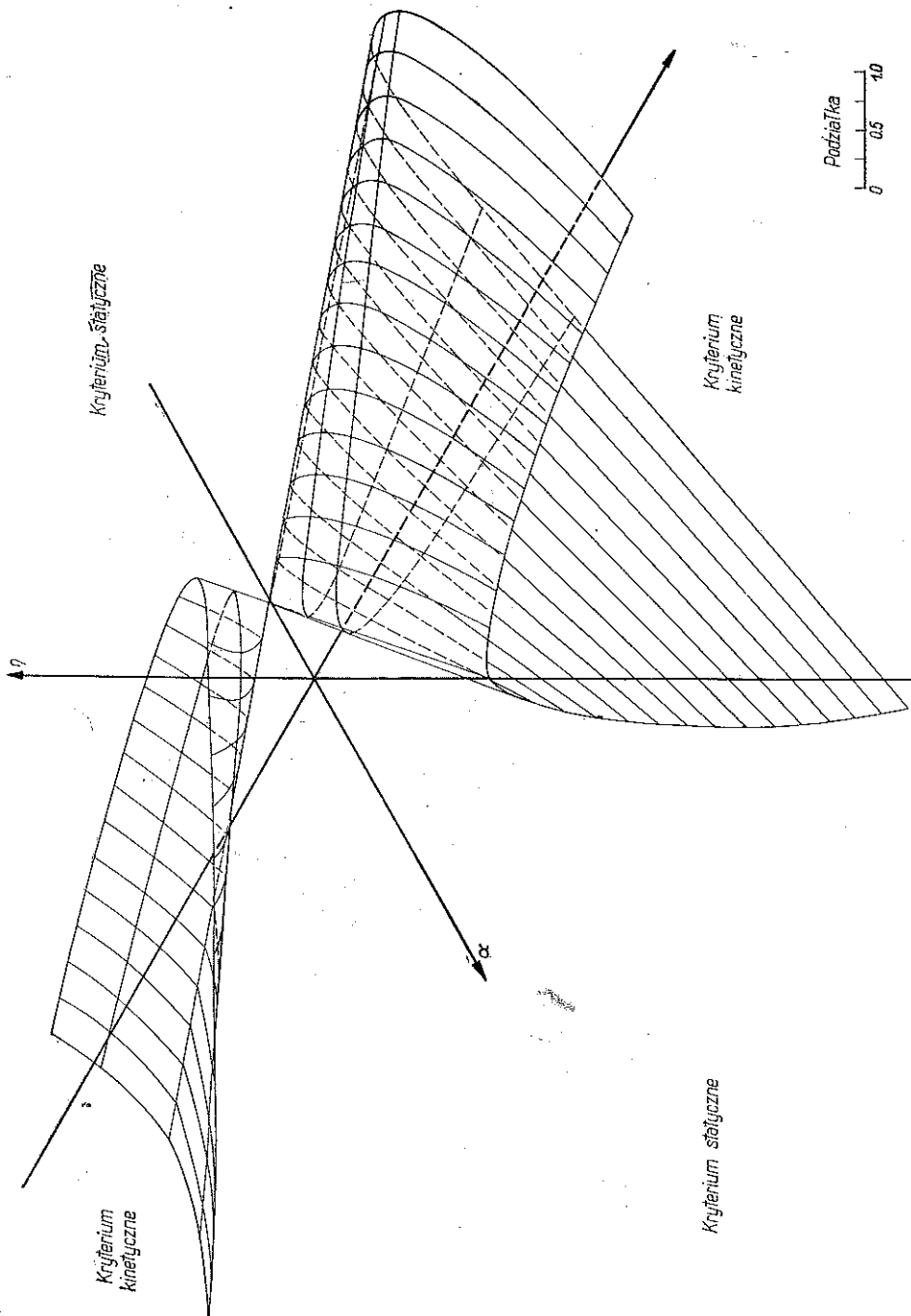
Rys. 2

Równanie (2.5) przyjmuje tu postać:

$$(4.1) \quad F(\alpha, \beta, \eta; kl) = (-\beta - \eta + 2\beta\eta) + (-1 + \beta + \eta - 2\beta\eta) \cos kl - \\ - (\alpha + \beta\eta) kl \sin kl = 0.$$

Równanie (3.4) natomiast zastąpimy tu równaniem prostszym, uzyskanym z równania (4.1) po zróżniczkowaniu go względem kl , mianowicie

$$(4.2) \quad F_1(\alpha, \beta, \eta; kl) = (\alpha + \beta\eta) kl \cos kl + (-1 + \alpha + \beta + \eta - \beta\eta) \sin kl = 0.$$



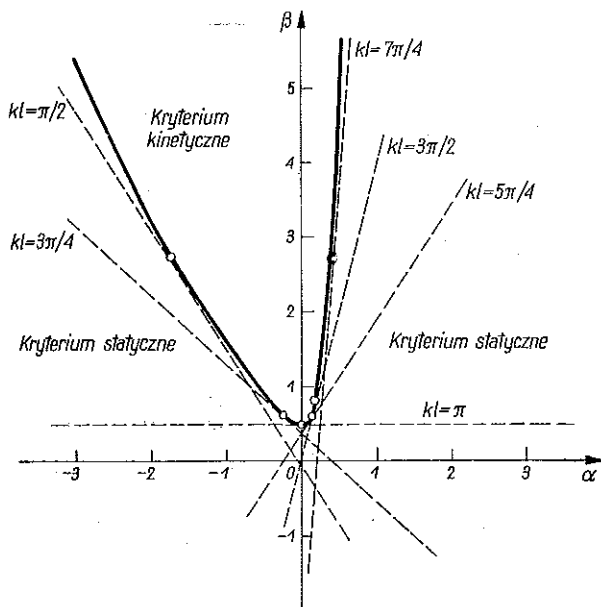
Rys. 3

Układ równań (4.1) i (4.2) przedstawia parametryczne równania powierzchni granicznej w trójwymiarowej przestrzeni zmiennych α, β i η charakteryzujących sposób zachowania się obciążenia. Rozwińmy ten układ równań ze względu na α i β ; uzyskamy wtedy parametryczne równania krzywych granicznych w płaszczyznach $\eta = \text{const}$ w następującej postaci:

$$(4.3) \quad \alpha = \frac{\eta(\eta - 1)kl - (\eta - 1)^2 \sin kl - \eta^2 kl \cos kl + \eta(\eta - 1) \sin kl \cos kl}{(1 - 2\eta)(1 - \cos kl)(kl - \sin kl)},$$

$$\beta = \frac{-(\eta - 1)kl + \eta \sin kl + \eta kl \cos kl - (\eta - 1) \sin kl \cos kl}{(1 - 2\eta)(1 - \cos kl)(kl - \sin kl)}.$$

Rysunek 2 podaje przebieg uzyskanych krzywych w płaszczyznach $\eta = -1, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$. Są to przekroje powierzchni granicznej wyznaczonej równaniami (4.1) i (4.2). Z rysunku widać, że zakres stosowania statycznego kryterium statecz-

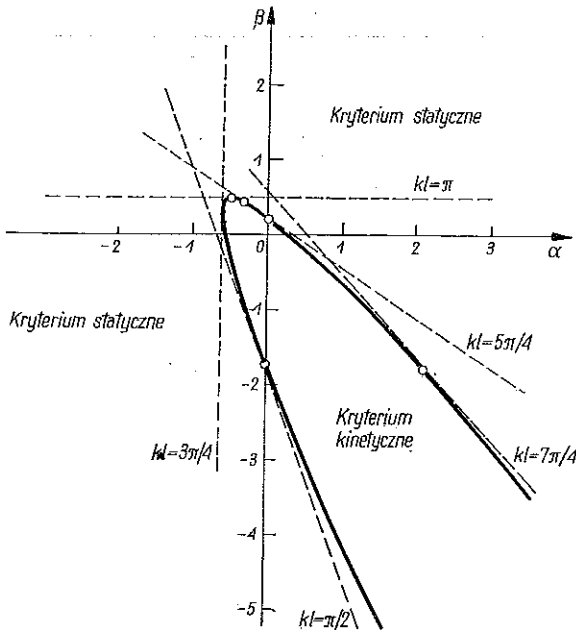


Rys. 4

ności zwiększa się wraz ze wzrostem η aż do wartości $\eta = 1/2$. Przy $\eta = 1/2$ kryterium statyczne daje rozwiązanie dla dowolnych wartości α i β (obszar stosowalności kryterium kinetycznego zanika). Przy $\eta > 1/2$ zaczyna się znowu pojawiać obszar (po drugiej stronie osi α), w którym kryterium statyczne nie ma zastosowania, a przy dalej rosnących wartościach η obszar ten ulega rozszerzeniu. Obraz uzyskanej powierzchni granicznej w izometrii podaje rys. 3. Przyjęto przy tym wartości parametru kl jedynie z przedziału $0 < kl < 2\pi$. Następnym przedziałem $2n\pi < kl < 2(n + 1)\pi, n = 1, 2, \dots$ odpowiadają następne gałęzie krzywych granicznych, powiększające zakres kryterium statycznego, jednak między tymi gałę-

ziami występuje z reguły krytyczna wartość obciążenia określona kryterium kinetycznym. Tak więc przytoczone tu gałęzie krzywych można uważać za rozgraniczające obszary stosowalności obu kryteriów.

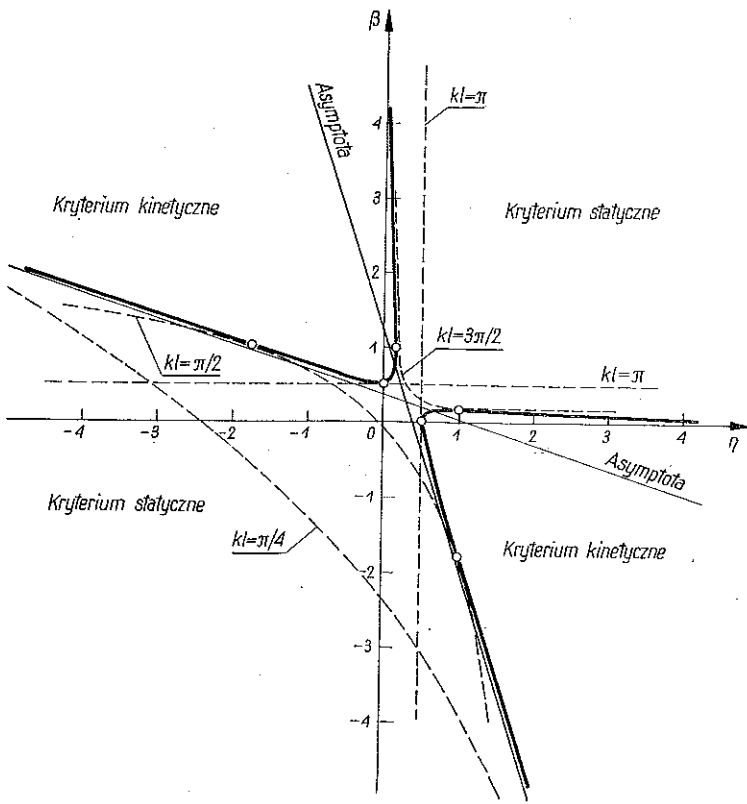
Równanie (4.1) jest równaniem przestępnym ze względu na kl , określającym wartość siły krytycznej jako funkcji trzech parametrów α , β i η . Dla $kl = \text{const}$ daje ono równanie rodziny powierzchni jednakowych sił w zakresie stosowania kryterium statycznego. Łatwiej będzie jednak znaleźć linie jednakowych sił dla



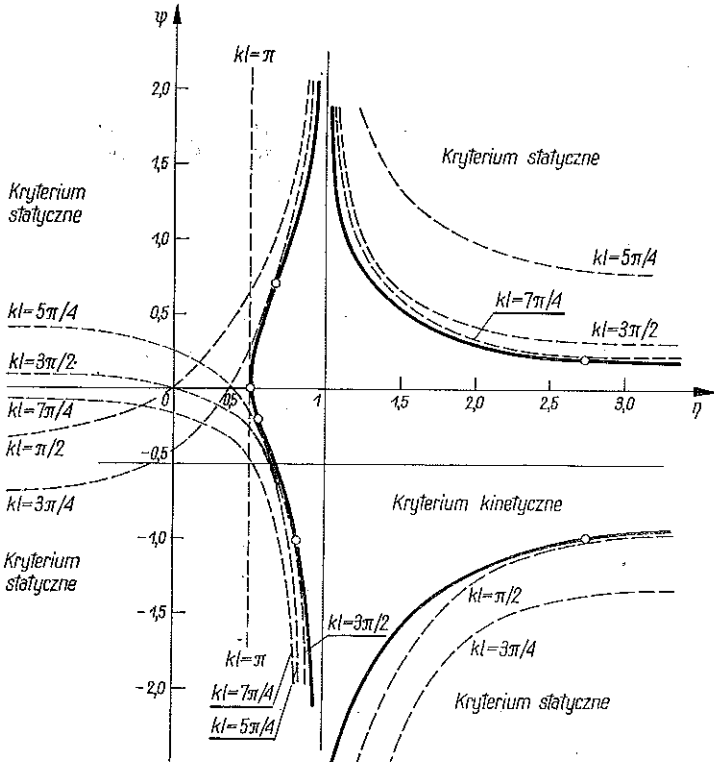
Rys. 5

ustalonych wartości η (czyli przekroje powierzchni jednakowych sił płaszczyznami $\eta = \text{const}$). Jak łatwo się przekonać, równanie (4.1) przedstawia dla $\eta = \text{const}$ równania linii prostych ze względu na α i β . Dla ustalonej wartości kl (czyli dla ustalonej wartości siły) będą to proste styczne do uzyskanych krzywych granicznych w punktach wyznaczonych przez tę wartość kl z równań (4.3). Rysunki 4 i 5 przedstawiają wykresy jednakowych sił dla $\eta = 0$ i $\eta = 1$ w zakresie stosowania kryterium statycznego. Rysunek 6 przedstawia przekrój omawianej powierzchni granicznej i powierzchni równych sił krytycznych (linie kreskowane) płaszczyzną $\alpha = 0$. Jak łatwo się przekonać z równania (4.1), linie $kl = \text{const}$ są hiperbolami w układzie η , β , stycznymi do uzyskanych krzywych granicznych.

Następny przypadek, którym będziemy się zajmować, będzie przypadkiem pręta utwierdzonego sprężysto i obciążonego siłą o zmiennym kierunku (scharakteryzowanym «współczynnikiem śledzenia» η), działającą w środku ciężkości końcowego przekroju. Będzie to przypadek gdy $\alpha = \beta = \delta = 0$, a $\gamma = 1 - \eta$.



Rys. 6



Rys. 7

Równanie określające siłę krytyczną ma tu następującą postać:

$$(4.4) \quad \eta + (1 - \eta) \cos kl - \psi (1 - \eta) kl \sin kl = 0.$$

Granice stosowności powyższego równania uzyskamy przez zróżniczkowanie go względem kl :

$$(4.5) \quad \psi (\sin kl + kl \cos kl) + \sin kl = 0.$$

Po rozwikłaniu układu równań (4.4) i (4.5) względem η i ψ otrzymujemy następujące równania parametryczne krzywej granicznej w rozpatrywanym układzie zmiennych:

$$(4.6) \quad \eta = \frac{kl + \sin kl \cos kl}{(1 - \cos kl)(kl - \sin kl)},$$

$$\psi = \frac{-\sin kl}{\sin kl + kl \cos kl}.$$

Krzywa ta przedstawiona jest na rys. 7. Jak widać z rys. 7, kryterium statyczne w tym przypadku daje rozwiązanie dla wszystkich wartości $\eta \leq 1/2$, a ze wzrostem ψ (parametru charakteryzującego sprężystość utwierdzenia) zakres obowiązywania kryterium statycznego ulega rozszerzeniu, znaczenie praktyczne posiada tu jedynie zakres $\psi \geq 0$. Pojawienie się drugiej gałęzi krzywej dla dużych wartości η ($\eta > 1$) oznacza, że kryterium statyczne może tu być stosowane, byleby ψ było dostatecznie duże (rys. 7). Rysunek 7 podaje także linie równych sił krytycznych, które są tu również hiperbolami [wynika to z równania (4.4)] stycznymi do uzyskanej krzywej granicznej.

5. Kinetyczne kryterium stateczności

Kinetyczne kryterium stateczności, które będzie kryterium ogólniejszym, uzyskamy (ze względu na założenie małych odkształceń) w drodze analizy klasycznego równania drgań poprzecznych belki w przypadku istnienia siły podłużnej

$$(5.1) \quad EJ y^{IV} + Py'' + m\ddot{y} = 0,$$

gdzie m jest masą jednostki długości belki. Jeżeli przyjmiemy rozwiązanie w postaci

$$(5.2) \quad y(x, t) = e^{i\omega t} f(x),$$

to uzyskamy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(5.3) \quad EJ f^{IV} + Pf'' - m\omega^2 f = 0$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= \psi f''(0), \\ f''(l) &= -\frac{P}{EJ} [\alpha f'(l) + \beta f(l)], \\ f'''(l) &= -\frac{P}{EJ} \left[\gamma f'(l) + \frac{\delta}{l} f(l) \right]. \end{aligned}$$

Całką ogólną równania (5.3) będzie następująca kombinacja funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych:

$$(5.5) \quad f(x) = C_1 \operatorname{sh} k_1 x + C_2 \operatorname{ch} k_1 x + C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x,$$

gdzie k_1 i k_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(5.6) \quad k^4 + \frac{P}{EJ} k^2 - \frac{m\omega^2}{EJ} = 0,$$

mianowicie:

$$(5.7) \quad k_{1,2}^2 = \mp \frac{P}{2EJ} + \left(\frac{P^2}{4E^2 J^2} + \frac{m\omega^2}{EJ} \right)^{1/2}.$$

Wykorzystując dwa pierwsze z warunków (5.4) możemy wyznaczyć stałe:

$$(5.8) \quad C_3 = \frac{1}{k_2} [\psi l C_2 (k_1^2 + k_2^2) - C_1 k_1], \quad C_4 = -C_2.$$

Dwa ostatnie z warunków (5.4) i (5.8) i podstawienie $P/EJ = k_2^2 - k_1^2$ prowadzą do układu dwóch równań jednorodnych ze względu na stałe C_1 i C_2 . Przyrównując wyznacznik główny tego układu do zera, otrzymujemy równanie przestępne na ciąg częstości ω jako funkcji siły P i współczynników $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi$ charakteryzujących sposób zachowania się obciążenia. Równanie to ma postać:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \Delta(a, \beta, \gamma, \delta, \psi; kl) = & \\ = & [(\beta + \gamma + 2\alpha\delta - 2\beta\gamma) k_1 k_2 l (k_2^2 - k_1^2)^2 - (k_1^4 + k_2^4) k_1 k_2 l] + \\ & + [(2\gamma - 1) k_1^2 k_2^2 - \beta (k_1^4 + k_2^4) - (\alpha\delta - \beta\gamma) (k_2^2 - k_1^2)^2 + \\ & + \delta\psi (k_2^2 + k_1^2)^2] (k_2^2 - k_1^2) l \operatorname{sh} k_1 l \sin k_2 l + \\ & + [-\psi k_1^2 k_2^2 l^2 - (\alpha - \gamma\psi) (k_2^2 - k_1^2) k_1^2 l^2 - (\beta\psi k_2^2 l^2 + \delta) (k_2^2 - k_1^2) - \\ & - \psi l^2 (\alpha\delta - \beta\gamma) (k_2^2 - k_1^2)^2] (k_1^2 + k_2^2) k_2 \operatorname{sh} k_1 l \cos k_2 l + \\ & + [\psi k_1^2 k_2^2 l^2 - (\alpha - \gamma\psi) (k_2^2 - k_1^2) k_2^2 l^2 - (\beta\psi k_1^2 l^2 - \delta) (k_2^2 - k_1^2) + \\ & + \psi l^2 (\alpha\delta - \beta\gamma) (k_2^2 - k_1^2)^2] (k_1^2 + k_2^2) k_1 \operatorname{ch} k_1 l \sin k_2 l - \\ & - [2k_1^2 k_2^2 + (\beta + \gamma + 2\alpha\delta - 2\beta\gamma) (k_2^2 - k_1^2)^2 + \\ & + \alpha\psi l^2 (k_2^2 - k_1^2) (k_2^2 + k_1^2)^2] k_1 k_2 l \operatorname{ch} k_1 l \cos k_2 l = 0. \end{aligned}$$

Warunek, by pierwiastek równania (5.9), określający częstość drgań pręta, był pierwiastkiem podwójnym, rozgranicza obszar drgań ustalonych pręta od obszaru drgań nieustalonych. Podobnie jak w pracy [7], warunek ten zapiszemy w postaci

$$(5.10) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} = \frac{\partial \Delta}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial \omega} + \frac{\partial \Delta}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial \omega} = 0.$$

Po podstawieniu obliczonych ze wzorów (5.7) pochodnych $\partial k_1 / \partial \omega$ i $\partial k_2 / \partial \omega$ otrzymujemy

$$(5.11) \quad k_2 \frac{\partial \Delta}{\partial k_1} + k_1 \frac{\partial \Delta}{\partial k_2} = 0.$$

Dla ustalonych wartości współczynników α , β , γ , δ i ψ równania (5.9) i (5.11) stanowią układ dwóch równań przestępnych o dwóch niewiadomych k_1 i k_2 (czyli określają siłę krytyczną i odpowiednią podwójną częstość).

Dość skomplikowana postać równania (5.9) jest postacią bardzo ogólną, wynikłą z przyjęcia bardzo ogólnych warunków brzegowych. Równanie to ulega znacznemu uproszczeniu w przypadkach szczególnych. Mianowicie przyjęcie $k_1 = 0$ (założenie, że częstość drgań zmierza do zera) prowadzi do uzyskanego wcześniej równania (2.5) przy zastosowaniu kryterium statycznego. Założenie $\alpha = \beta = \delta = \psi = 0$, $\gamma = 1 - \eta$, daje równanie uzyskane w cytowanej już pracy [7], a założenie $\alpha = \beta = \gamma = \psi = 0$, $\gamma = 1$, $\beta = 1$, równanie podane przez W. W. BOLOTINA w książce [2].

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. BECK, *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, Z. Angew. Math. Physik, 3, 3 (1952), s. 225.
- [2] В. В. БОЛОТИН, *К вопросу об устойчивости пластинки в потоке сжимаемого газа*, Вопросы прочности материалов и конструкций, Изд. АН СССР, Москва 1959, 194-204.
- [3] К. С. Дейнеко, М. Я. Леонов, *Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня*, Прикл. Мат. Мех., 6, 19 (1955), 738-744.
- [4] В. В. ГОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругости устойчивости*, Физматгиз, Москва 1961.
- [5] Г. Ю. ДЖАПЕЛИДЗЕ, *Об устойчивости стержня при действии следящей силы*, Труды Ленингр. Института нр. 192 (1958), 21-27.
- [6] Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czasop. Techn., 9, 65 (1960), 1-8.
- [7] Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *W sprawie utraty stateczności pręta przy obciążeniu nadśledzającym*, Arch. Mech. Stos., 6, 14 (1962).
- [8] А. А. МОВЧАН, *О колебаниях пластинки, движущаяся в газе*, Прикл. Мат. Мех., 2, 20 (1956), 211-222.
- [9] A. PFLÜGER, *Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes*, Z. Angew. Math. Mech., 5, 35 (1955), 191.
- [10] R. ROSMAN, *Iznalezenje stabilitetnog kriterija elastično upete konzole promienljivog momenta inercije pod uticajem sile promjenljivog smjera*, Tehnika, 4, 16 (1961), Nase Gradev., 4, 15, 73-76.
- [11] А. Р. РЖАНИПЫН, *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1955.
- [12] H. ZIEGLER, *Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem*, Z. Angew. Math. Mech., 8/9, 31 (1951), 265.
- [13] Г. ЦИГЛЕР, *Об устойчивости упругих систем*, Пробл. Мех., т. 2, Изд. Иностран. Лим., Москва 1959, 116-160.
- [14] Л. М. ЗОРЬИЙ, М. Я. ЛЕОНОВ, *Обзор развития теории устойчивости равновесия упругих стержней*, Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении, т. 7, Изд. АН УССР, Киев 1961, 119-126.
- [15] Л. М. ЗОРЬИЙ, М. Я. ЛЕОНОВ, *Влияние трения на устойчивость неконсервативных систем*, Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении, т. 7, Изд. АН УССР, Киев 1961, 127-135.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО-ЗАЩЕМЛЕННОГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ
В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПОВЕДЕНИЯ НАГРУЗКИ

В работе исследуется устойчивость упруго защемленного стержня, нагруженного на свободном конце силой, которая в момент продольного изгиба изменяет свое направление и точку приложения (дает добавочный момент). Такая нагрузка лобовой поверхности стержня может, между прочим, иметь место при обтекании этого стержня потоком жидкости.

Направление силы, действующей на стержень после потери устойчивости, определяется с помощью угла χ (т. е. угла между направлением действующей силы и направлением касательной к оси стержня в его концевом сечении и эксцентриситетом e , т. е. расстоянием между точкой приложения силы и центра тяжести свободного сечения стержня). Предполагается, что сечение стержня имеет, по меньшей мере, одну ось симметрии ограничиваясь исследованием продольного изгиба в плоскости симметрии.

Функции e и χ рассматриваются как аналитические функции стрелки прогиба $f = y(l)$ и $\varphi_l = y'(l)$. Ограничиваясь анализом бесконечно малых прогибов и вводя безразмерные параметры α , β , γ и δ , составляется выражение для e и χ в форме (1. 2).

Предположение (1.2) и условие упругого защемления привели к весьма общим краевым условиям (1.4), при которых проводится анализ устойчивости, рассматриваемого стержня.

Работа имеет целью выведение уравнения, определяющего критическую силу в функции пяти параметров α , β , γ , δ и ψ , характеризующих упругость защемления и направление вектора нагрузки после потери стержнем устойчивости, основываясь на статическом (п. 2) и кинетическом (п. 5) критерии статической устойчивости.

В пункте 3 определяются пределы применимости статического критерия, а в пункте 4 подробно исследуется некоторые частные случаи.

Summary

THE STABILITY OF AN ELASTICALLY CLAMPED COMPRESSED BAR
IN THE GENERAL CASE OF BEHAVIOUR OF LOAD

This is a study of the stability of a bar elastically clamped and loaded on the free end with a force which changes during buckling its direction and its attachment point (produces an additional moment). Such a load acting on the end surface of a bar may be produced, for instance by a fluid flowing past the bar.

The position of the force after the stability loss has been determined by means of the angle χ (that is the angle between the direction of the force with the direction of the tangent to the axis of the bar at the end) and the eccentricity e (that is the distance of the point of attachment of the force from the centre of gravity of the cross-section of the bar). It is assumed that the cross-section of the bar has at least one symmetry axis. The considerations are confined to the buckling in this symmetry plane.

The functions e and χ are assumed to be analytic functions of the end deflection $f = y(l)$ and deflection angle $\varphi_l = y'(l)$. Confining ourselves to an analysis of infinitely small deflections and introducing dimensionless parameters α , β , γ , δ the expressions for e and χ are written in the form (1.2). The assumption (1.2) and the condition of elastic clamping lead to very general boundary conditions (1.4) for which the stability of the bar is discussed.

The aim of this paper is to derive an equation determining the critical force in function of the five parameters α , β , γ , δ , ψ characterising the elastic properties of the clamping and the position of the load vector after stability loss, on the basis of the static and kinetic criterion of elastic stability (p.2) and (p.5) respectively.

In Section 3 the limits of applicability of the static criterion are determined. The Section 4 is devoted to a detailed investigation of some particular cases.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27. IV. 62.
