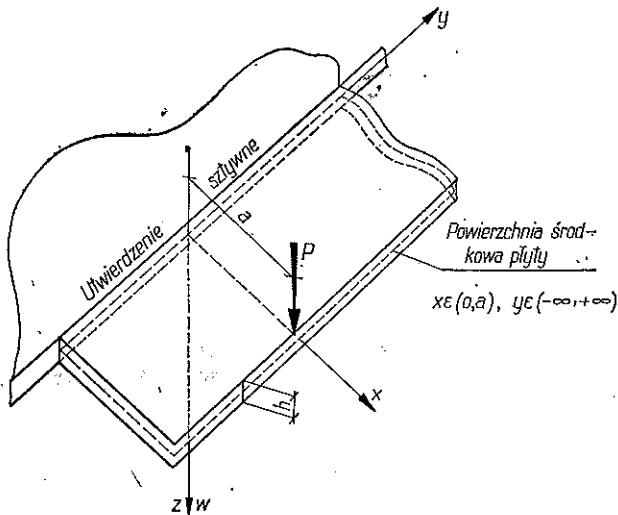


PLYTA WSPORNIKOWA NIESKOŃCZENIE DŁUGA OBCIĄŻONA SIŁĄ SKUPIONĄ

FELIKS DYMEK (KRAKÓW)

Zagadnieniem zginania izotropowej płyty wspornikowej nieskończenie długiej, obciążonej siłą skupioną na swobodnym końcu (rys. 1), o stałej grubości h zajmowali się dotychczas autorzy prac [1]-[4]. I tak np. autor pracy [2] poprzestaje na podaniu rozwiązania w postaci całki niewłaściwej w granicach $0, \infty$ dla współczynnika Poissona $\nu = 0$, autor zaś pracy [3] w postaci całki w granicach $-\infty, \infty$ dla $\nu = 0$.



Rys. 1

Autor pracy [1] podając rozwiązanie w postaci całki w granicach $0, \infty$ i przyjmując $\nu = 0$, dla otrzymania wielkości liczbowych interesujących go sił przekrojowych oblicza całki za pomocą wzoru Simpsona.

Podobnie przedstawione w formie tabelarycznej powierzchnie wpływowe sił przekrojowych E. Bittnera, [4], nie uwzględniają wpływu współczynnika Poissona (przyjęto $\nu = 0$) i otrzymano je na drodze całkowania numerycznego.

Całkowanie numeryczne jest bardzo pracowite (szczególnie w odniesieniu do całek niewłaściwych) i pozbawia jednocześnie rozwiązanie ogólności.

Celem pracy jest podanie rozwiązania w postaci najogólniejszej na podstawie technicznej teorii płyt cienkich oraz wykazanie wpływu współczynnika Poissona,

[5], na wielkość odkształceń w powierzchni środkowej płyty oraz na wielkość sił przekrojowych (m_{xx} , m_{yy} , m_{xy}).

W celu rozwiązania równania różniczkowego

$$(1) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 w(x, y) = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$(2) \quad \begin{aligned} w(0, y) &= 0, & y \in (-\infty, \infty), \\ \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} &= 0, & y \in (-\infty, \infty), \\ m_{xx}(a, y) &= 0, & y \in (-\infty, \infty), \\ \bar{q}_{xx}(a, y) &= p(y), & \text{gdzie } p(y) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ay \, da, \end{aligned}$$

przyjmujemy, że odkształcona powierzchnia środkowa płyty w da się przedstawić w postaci całki

$$(3) \quad w(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} (A \operatorname{ch} ax + Bax \operatorname{sh} ax + C \operatorname{sh} ax + Dax \operatorname{ch} ax) \cos ay \, da.$$

Z warunków brzegowych (2) otrzymujemy

$$(4) \quad \begin{aligned} A(a) &= 0, \\ B(a) &= \frac{P}{\pi K} \left[(1+\nu) \frac{\operatorname{sh} aa}{\Delta(a)} + (1-\nu) \frac{aa \operatorname{ch} aa}{\Delta(a)} \right], \\ C(a) = -D(a) &= \frac{P}{\pi K} \left[2 \frac{\operatorname{ch} aa}{\Delta(a)} + (1-\nu) \frac{aa \operatorname{sh} aa}{\Delta(a)} \right], \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$(5) \quad \Delta(a) = a \{ [4 - (1+\nu)^2] \operatorname{ch}^2 aa + (1-\nu)^2 a^2 a^2 + (1+\nu)^2 \},$$

a sztywność płytowa

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Wprowadzając nową zmienną całkowania za pomocą zależności $u = aa$ oraz oznaczając przez

$$\gamma = \frac{x}{a}, \quad \delta = \frac{y}{a}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad -\infty \leq \delta \leq \infty,$$

otrzymujemy

$$(6) \quad w(x, y) = \frac{P}{\pi K} \left\{ [(1 + \nu) ax + (1 - \nu) a^2] \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u^2 \Delta(u)} + \right. \\ \left. + (1 - \nu) ax \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} + 2a^2 \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u^3 \Delta(u)} - \right. \\ \left. - 2ax \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{u^2 \Delta(u)} - (1 - \nu) ax \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} \right\}.$$

Uwzględniając znane zależności między siłami przekrojowymi (m_{xx} , m_{yy} , m_{xy}) oraz odkształconą powierzchnią środkową płyty w , otrzymamy

$$(7) \quad m_{xx}(x, y) = -\frac{P}{\pi} \left\{ (1 - \nu^2) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} - \right. \\ - 2(1 - \nu) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} + (1 - \nu)^2 \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{u \text{ ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} - \\ - (1 - \nu)^2 \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{u \text{ sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} + 2(1 + \nu) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} - \\ \left. - 2(1 + \nu) \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} \right\},$$

$$(8) \quad m_{yy}(x, y) = \frac{P}{\pi} \left\{ (1 - \nu^2) \left(1 + \frac{x}{a} \right) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} + \right. \\ + (1 - \nu)^2 \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{u \text{ ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} - 2(1 - \nu) \left(\frac{x}{a} + \nu \right) \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} - \\ - (1 - \nu)^2 \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{u \text{ sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} - 2\nu(1 + \nu) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} + \\ \left. + 2(1 + \nu) \int_0^{\infty} \frac{\text{ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} \right\},$$

$$(9) \quad m_{xy}(x, y) = \frac{P}{\pi} (1 - \nu) \left\{ (1 + \nu) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta u \, du}{u \Delta(u)} + \right. \\ \left. + \left[(1 - \nu) - 2 \frac{x}{a} \right] \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta u \, du}{\Delta(u)} + (1 + \nu) \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} \gamma u \sin \delta u \, du}{\Delta(u)} + \right. \\ \left. + (1 - \nu) \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{ch} u \operatorname{ch} \gamma u \sin \delta u \, du}{\Delta(u)} - (1 - \nu) \frac{x}{a} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta u \, du}{\Delta(u)} \right\}.$$

We wzorach (6)-(9) przez $\Delta(u)$ oznaczono wyrażenie

$$(10) \quad \Delta(u) = [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{ch}^2 u + (1 - \nu)^2 u^2 + (1 + \nu)^2.$$

Ponieważ równanie algebraiczne przestępne zmiennej zespolonej

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

postaci

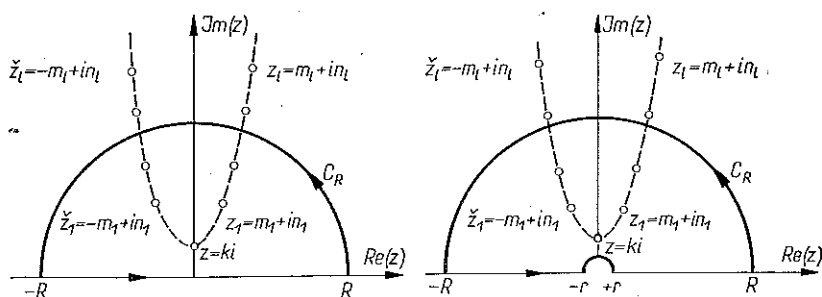
$$(11) \quad \Delta(z) = [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{ch}^2 z + (1 - \nu)^2 z^2 + (1 + \nu)^2 \equiv 0, \quad 0 \leq \nu \leq 0,5$$

posiada na górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej tylko jeden pierwiastek postaci $z = ki$ oraz nieskończenie wiele pierwiastków postaci

$$z_p = \pm m_p + i n_p, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

Tablica 1

ν	k	m_1	n_1	m_2	n_2	m_3	n_3	m_4	n_4	m_5	n_5	m_6	n_6
0,00	1,1896165	1,0772	2,6045	1,9517	5,9460	2,3794	9,1638	2,6733	12,3500	2,89852	15,5215		
0,15	1,39445	0,8455	2,5825	1,82745	5,95633	2,26548	9,17263	2,56277	12,35717	2,7897	15,52758		
0,25	1,68284	0,5401	2,5024	1,72976	5,9619	2,17893	9,1785	2,4798	12,36215	2,7084	15,5319		
0,35	3,07298	0,5847	1,8851	1,6123	5,9648	2,07965	9,1840	2,38608	12,36733	2,617175	15,5364	2,80350	18,697843
0,50	3,725015	0,8983	1,7241	1,3600	5,9538	1,88995	9,18954	2,2132	12,3745	2,45153	15,54335	2,64171	18,70423



Rys. 2

zatem obierając drogi całkowania jak na rys. 2, gdy $R \rightarrow \infty$, ($r \rightarrow 0$), całki wzorów (6)-(9) na podstawie twierdzenia o residuach (przy założeniu $0 \leq \nu \leq 1$, $\delta > 0$) wyrażą się następująco:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} &= -\pi \frac{e^{-\delta k} \sin k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} \text{sh } z_p \text{ sh } \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^\infty \frac{u \text{ ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} &= -\pi k \frac{e^{-\delta k} \cos k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} z_p \text{ ch } z_p \text{ sh } \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} &= \pi \frac{e^{-\delta k} \cos k \cos \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} \text{ch } z_p \text{ ch } \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 (12) \int_0^\infty \frac{u \text{ sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{\Delta(u)} &= -\pi k \frac{e^{-\delta k} \sin k \cos \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} z_p \text{ sh } z_p \text{ ch } \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ ch } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k} \frac{e^{-\delta k} \sin k \cos \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} \text{sh } z_p \text{ ch } \gamma z_p}{z_p \{ [4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p \}}, \\
 \int_0^\infty \frac{\text{ch } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k} \frac{e^{-\delta k} \cos k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} \text{ch } z_p \text{ sh } \gamma z_p}{z_p \{ [4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p \}}, \\
 \int_0^\infty \frac{\text{sh } u \text{ sh } \gamma u \cos \delta u \, du}{u^2 \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k^2} \frac{e^{-\delta k} \sin k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{i\delta z_p} \text{sh } z_p \text{ sh } \gamma z_p}{z_p^2 \{ [4 - (1 + \nu)^2] \text{sh } 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p \}}
 \end{aligned}$$

oraz, [8] str. 145—146,

$$\begin{aligned}
 pf \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} \gamma u \cos \delta u du}{u^3 \Delta(u)} &= -\frac{\pi}{8} \delta \gamma - \frac{\pi}{k^3} \frac{e^{-\delta k} \cos k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} \operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \gamma z_p}{z_p^3 \{ [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p \}}, \\
 pf \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} \gamma u \cos \delta u du}{u^2 \Delta(u)} &= -\frac{\pi}{8} \delta - \frac{\pi}{k^2} \frac{e^{-\delta k} \cos k \cos \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} \operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \gamma z_p}{z_p^2 \{ [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p \}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta u du}{u \Delta(u)} &= \frac{\pi}{k} \frac{e^{-\delta k} \sin k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} \operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \gamma z_p}{z_p \{ [4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p \}}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta u du}{\Delta(u)} &= \pi \frac{e^{-\delta k} \cos k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 (12) \quad &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} \operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} \gamma u \sin \delta u du}{\Delta(u)} &= \pi \frac{e^{-\delta k} \sin k \cos \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} \operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{ch} u \operatorname{ch} \gamma u \sin \delta u du}{\Delta(u)} &= \pi k \frac{e^{-\delta k} \cos k \cos \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} z_p \operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}, \\
 \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta u du}{\Delta(u)} &= -\pi k \frac{e^{-\delta k} \sin k \sin \gamma k}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} + \\
 &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\delta z_p} z_p \operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \gamma z_p}{[4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p}.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając (12) we wzorach (6)-(9) otrzymujemy po uporządkowaniu

$$\begin{aligned}
 (13) \quad w(x, y) = & \frac{P}{K} \frac{e^{-\frac{y}{a}k}}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} \left\{ [(1 + \nu)ax + \right. \\
 & + (1 - \nu)a^2] \frac{\sin k \sin \frac{kx}{a}}{k^2} - (1 - \nu)ax \frac{\sin \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)k \right]}{k} \\
 & \left. - 2a^2 \frac{\cos k \sin \frac{kx}{a}}{k^3} + 2ax \frac{\cos k \cos \frac{kx}{a}}{k^2} \right\} + \\
 & + \frac{P}{K} i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{y}{a}z_p}}{[4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p} \left\{ [(1 + \nu)xa + \right. \\
 & + (1 - \nu)a^2] \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a}}{z_p^2} - (1 - \nu)ax \frac{\operatorname{sh} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)z_p \right]}{z_p} + \\
 & \left. + 2a^2 \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a}}{z_p^3} - 2ax \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \frac{z_p x}{a}}{z_p^2} \right\} \quad \text{dla } y \in [0, \infty),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad m_{xx}(x, y) = & P \frac{e^{-\frac{y}{a}k}}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} \left\{ (1 - \nu^2) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \times \right. \\
 & \times \sin k \sin \frac{kx}{a} + 2(1 - \nu) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \cos k \cos \frac{kx}{a} - \\
 & \left. - \left[(1 - \nu)^2 \frac{x}{a} k + \frac{2(1 + \nu)}{k} \right] \sin \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)k \right] \right\} - \\
 & - Pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{y}{a}z_p}}{[4 - (1 + \nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1 - \nu)^2 z_p} \left\{ (1 - \nu^2) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a} - \right. \\
 & - 2(1 - \nu) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \frac{z_p x}{a} + \left[\frac{2(1 + \nu)}{z_p} - \right. \\
 & \left. - (1 - \nu)^2 \frac{z_p x}{a} \right] \operatorname{sh} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)z_p \right] \right\} \quad \text{dla } y \in [0, \infty),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (15) \quad m_{yy}(x, y) = & -P \frac{e^{-\frac{y}{a}k}}{[4 - (1 + \nu)^2] \sin 2k + 2(1 - \nu)^2 k} \times \\
 & \times \left\{ (1 - \nu^2) \left(1 + \frac{x}{a} \right) \sin k \sin \frac{kx}{a} + \left[(1 - \nu)^2 \frac{kx}{a} - \frac{2(1 + \nu)}{k} \right] \cos k \sin \frac{kx}{a} - \right.
 \end{aligned}$$

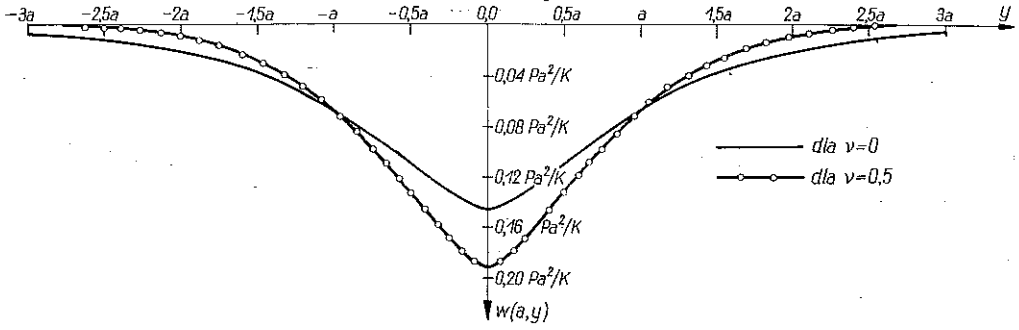
$$\begin{aligned}
& - \left[(1-\nu)^2 \frac{kx}{a} - \frac{2\nu(1+\nu)}{k} \right] \sin k \cos \frac{kx}{a} + 2(1-\nu) \left(\frac{x}{a} + \nu \right) \cos k \cos \frac{kx}{a} \Big\} + \\
& + Pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i \frac{y}{a} z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ (1-\nu^2) \left(1 + \frac{x}{a} \right) \operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a} - \right. \\
& \quad \left. - 2(1-\nu) \left(\frac{x}{a} + \nu \right) \operatorname{ch} z_p \operatorname{ch} \frac{z_p x}{a} - 2\nu(1+\nu) \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \frac{z_p x}{a}}{z_p} + \right. \\
& \quad \left. + 2(1+\nu) \frac{\operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a}}{z_p} - (1-\nu)^2 \frac{z_p x}{a} \operatorname{sh} \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \quad \text{dla } y \in [0, \infty),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(16) \quad m_{xy}(x, y) = & P(1-\nu) \frac{e^{-\frac{y}{a} k}}{[4 - (1+\nu)^2] \sin 2k + 2(1-\nu)^2 k} \times \\
& \times \left\{ \frac{(1+\nu)}{k} \sin k \sin \frac{kx}{a} + \left[(1-\nu) - 2 \frac{x}{a} \right] \cos k \sin \frac{kx}{a} + \right. \\
& \left. + (1+\nu) \frac{x}{a} \sin k \cos \frac{kx}{a} + (1-\nu) \frac{x}{a} k \cos \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) k \right] \right\} + \\
& + P(1-\nu) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{i \frac{y}{a} z_p}}{[4 - (1+\nu)^2] \operatorname{sh} 2z_p + 2(1-\nu)^2 z_p} \left\{ (1+\nu) \frac{\operatorname{sh} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a}}{z_p} + \right. \\
& \left. + \left[(1-\nu) - 2 \frac{x}{a} \right] \operatorname{ch} z_p \operatorname{sh} \frac{z_p x}{a} + (1+\nu) \frac{x}{a} \operatorname{sh} z_p \operatorname{ch} \frac{z_p x}{a} + \right. \\
& \left. + (1-\nu) \frac{z_p x}{a} \operatorname{ch} \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) z_p \right] \right\} \quad \text{dla } y \in [0, \infty).
\end{aligned}$$

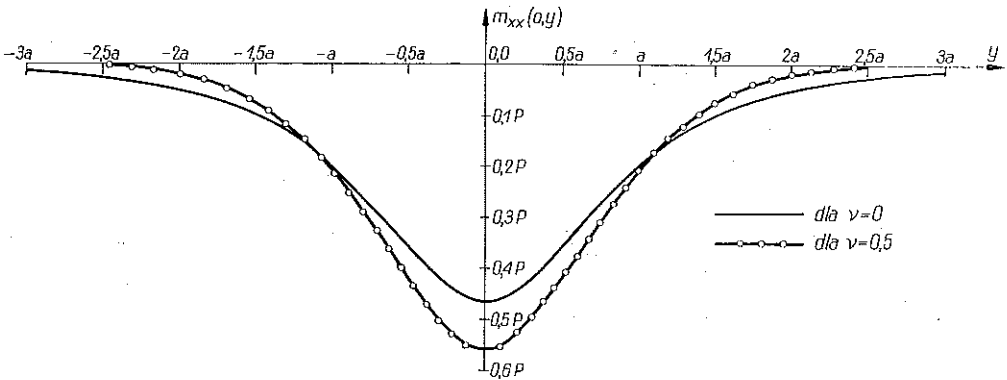
Odpowiednie wzory dla odkształconej powierzchni środkowej w oraz sił przekrojowych m_{xx} , m_{yy} w obszarze $y \in (-\infty, 0]$ otrzymamy podstawiając $-y$ na miejsce y , zaś dla m_{xy} również dokonując tego samego podstawienia oraz zmieniając znak po prawej stronie równości (16).

Podane rozwiązanie (13)-(16) spełnia równanie różniczkowe (1), czyni zadość warunkom brzegowym (2) oraz czyni zadość warunkom w nieskończoności; stąd na podstawie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań liniowej teorii sprężystości wnosimy, że jest ono jedynym rozwiązaniem postawionego zadania.

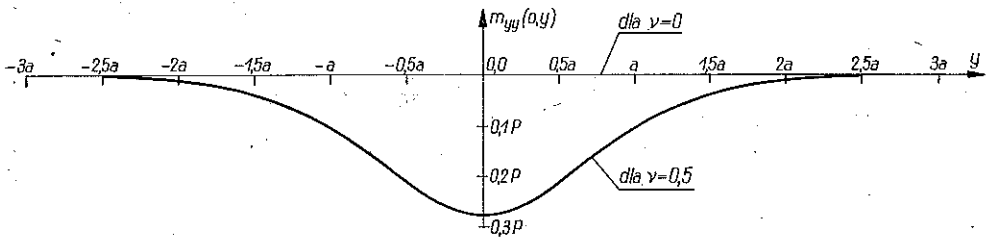
Dla zilustrowania postawionego zadania oraz uwidocznienia wpływu współczynnika Poissona ν skonstruowano wykresy odkształconej powierzchni środkowej $w(a, y)$ (rys. 3) oraz wykresy momentów zginających $m_{xx}(0, y)$ (rys. 4), $m_{yy}(0, y)$ (rys. 5), $m_{yy}(a, y)$ (rys. 7) oraz momentów skręcających $m_{xy}(a, y)$ (rys. 6). Nadmienić tu należy, że techniczna teoria płyt cienkich nie pozwala spełnić w sposób ścisły wszystkich trzech warunków brzegowych $m_{nn}(s)$, $m_{ns}(s)$ i $q_{nn}(s)$ występujących na każdym brzegu płyty, lecz tylko dwa spośród nich. Dlatego brzegowe siły $m_{ns}(s)$



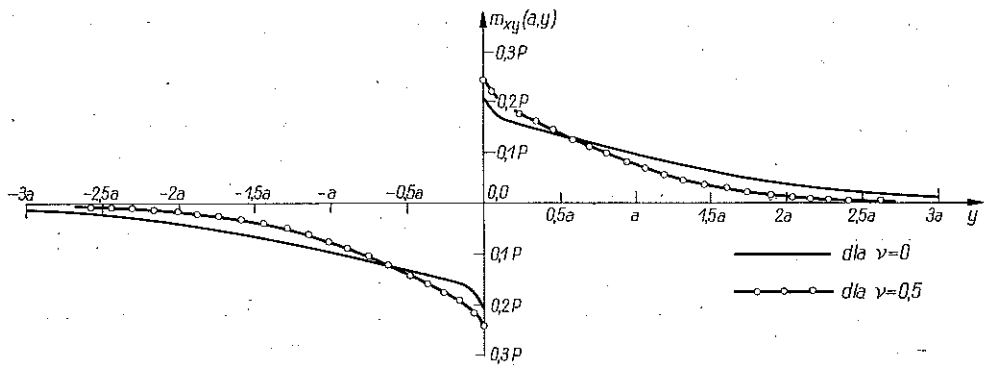
Rys. 3



Rys. 4



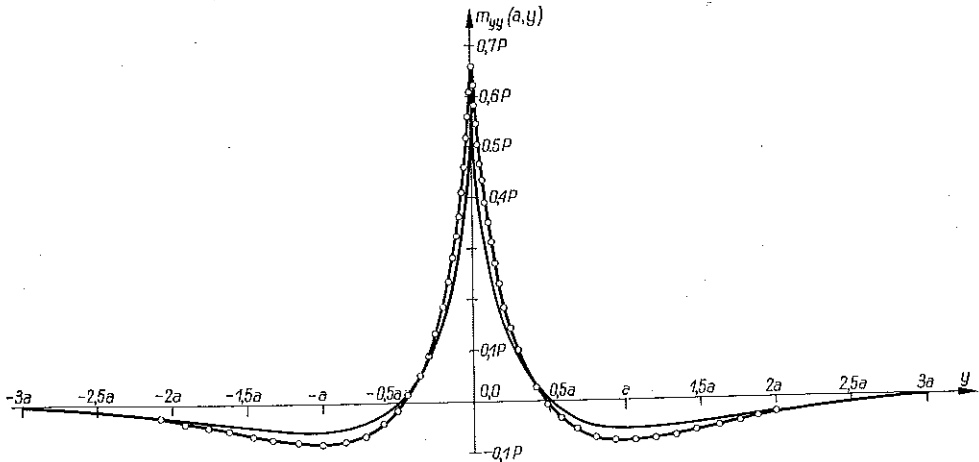
Rys. 5



Rys. 6

oraz $q_{nn}(s)$ zastąpiono brzegowymi siłami poprzecznymi $\bar{q}_{nn}(s)$, które są statycznie równoważne siłom $m_{ns}(s)$ i $q_{nn}(s)$.

Dla uwidocznienia wpływu współczynnika Poissona ν wykresy te skonstruowano dla dwu skrajnych wartości współczynnika $\nu = 0$ oraz $\nu = 0,5$.



Rys. 7

W obliczeniach liczbowych ograniczono się do pięciu pierwszych wyrazów szeregów $p = 1, 2, 3, 4, 5$.

Nadmienić należy, że K. GIRKMANN, [1], s. 220, na drodze całkowania numerycznego otrzymał dla $\nu = 0$ $m_{xx}(0, 0) = -0,465 P$, autor zaś niniejszej pracy przy uwzględnieniu pięciu pierwszych wyrazów szeregu na podstawie wzoru (14) otrzymuje dla $\nu = 0$ $m_{xx}(0, 0) = -0,46673143 P$. Ponieważ szereg (14) jest szeregiem przemiennym, otrzymujemy równocześnie bardzo łatwo ocenę błędu popełnionego przez zastąpienie sumy nieskończonej sumą skończoną n pierwszych wyrazów szeregu.

Jak wykazał przykład liczbowy, zbieżność szeregów jest najslabsza w punkcie $y = 0$, jednak do praktycznych celów wystarcza ograniczenie się do dwu pierwszych wyrazów szeregów. Jedynie zbieżność szeregu $m_{yy}(a, y)$ w punkcie $y = 0$ jest bardzo słaba. Na rysunku 7 pokazano sumę pierwszego wyrazu rozwiązania i pięciu pierwszych wyrazów szeregu, jednakże wobec słabej zbieżności szeregu dla $y = 0$ trudno odpowiedzieć na pytanie, jaka jest prawidłowa wartość $m_{yy}(a, 0)$.

Na zakończenie nadmienić należy, że warunek równowagi płyty jako całosci

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_{xx}(0, y) dy + Pa = 2 \int_0^{\infty} m_{xx}(0, y) dy + Pa \equiv 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}_{xx}(0, y) dy - P \equiv 0$$

jest spełniony.

Warunek momentów daje

Tablica 2

	$\nu = 0,00$	$\nu = 0,50$
$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(0)}(0, y) dy$	-0,870451 Pa	0,197687 Pa
$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(1)}(0, y) dy$	-0,147497 Pa	-1,193841 Pa
$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(2)}(0, y) dy$	0,0239553 Pa	-0,00267386 Pa
$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(3)}(0, y) dy$	-0,00856269 Pa	-0,00205810 Pa
$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(4)}(0, y) dy$	0,00413134 Pa	0,00151876 Pa
$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(5)}(0, y) dy$	-0,00234080 Pa	-0,00103950 Pa
Suma	-1,00076485 Pa	-1,00040670 Pa

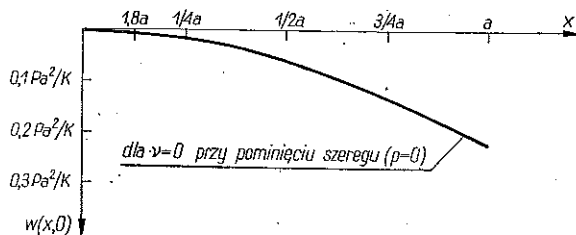
gdzie $m_{xx}^{(0)}$ oznacza pierwszy wyraz rozwiązania ($z = ki$), $m_{xx}^{(l)}$ l -ty wyraz szeregu, przy czym

$$2 \int_0^{\infty} m_{xx}^{(l)}(0, y) dy = 4P \left(\Theta_l \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{a} n_l} \sin \frac{y}{a} m_l dy + \xi_l \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{a} n_l} \cos \frac{y}{a} m_l dy \right) =$$

$$= 4Pa \left(\Theta_l \frac{m_l}{m_l^2 + n_l^2} + \xi_l \frac{n_l}{m_l^2 + n_l^2} \right).$$

Podobnie wykazać można, że drugi warunek równowagi płyty jako całosci jest spełniony.

Podane rozwiązanie określi dostatecznie dokładnie stan naprężenia i odkształcenia w płycie wspornikowej i skończonej długości wówczas, gdy długość płyty jest większa od poczwórnej szerokości, [1], (rys. 3-7).



Rys. 8

Literatura cytowana w tekście

- [1] K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe* (tłumacz. z niemieckiego) Arkady Warszawa, 1957.
- [2] W. NOWACKI, *Zginanie płyt ciągłych nieskończenie długich*, Arch. Mech. Stos., 2, 1 (1949), 173.
- [3] H. JUNG, *Über eine Anwendung der Fourier-transformation in der Plattenstatik*, Mathematische Nachrichten, 6, 6 (1952), 343.
- [4] E. BITTNER, *Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*, Springer-Verlag, Wien 1938.
- [5] Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг, *Пластинки. Дюкки. Балки—стенки*, Госстройиздат, УССР, Киев 1959, 355.
- [6] W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady Warszawa 1961.
- [7] W. MÜLLER, *Theorie der elastischen Verformung*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959.
- [8] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN Warszawa 1960.
- [9] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, T.I i II, PAU, Kraków 1948 i 1950.
- [10] M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, PWN Warszawa 1958.
- [11] M. T. HUBER, *Pisma*, T.II, PWN Warszawa 1956.
- [12] F. LEJA, *Teoria funkcji-analitycznych*, PWN-Warszawa 1957.
- [13] F. LÖSCH, *Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen*, Berlin 1954.

Резюме

**БЕСКОНЕЧНО ДЛИННАЯ ПЛАСТИНКА,
ЗАГРУЖЕННАЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ**

Основываясь на теории тонких изотропных пластинок, рассматривается напряженное и деформированное состояние бесконечно длинной консольной пластинки постоянной толщины, нагруженной на свободном конце сосредоточенной силой (рис. 1).

Предполагая, что деформированную, срединную поверхность пластинки $w(x, y)$ можно представить в виде интеграла (3), используется теорема Коши о вычетах, получая точное решение дифференциального уравнения (1) при краевых условиях (2) в виде формулы (13).

Приведенное решение поставленной задачи в виде формул (13)—(16), удовлетворяет всем требуемым краевым условиям (2), дифференциальному уравнению (1) и условиям в бесконечности.

Корни трансцендентного алгебраического уравнения (11) для пяти значений коэффициента Пуассона ν представлены в таблице (1).

Чтобы показать влияние коэффициента Пуассона ν на напряженное и деформированное состояния пластинки, составляются диаграммы (рис. 3-8), для двух крайних значений коэффициента, т. е. для $\nu = 0$ и $\nu = 0,5$.

В вычислениях автор ограничивается пятью первыми выражениями рядов.

Summary

AN INFINITELY LONG CANTILEVER PLATE LOADED BY ONE AXIAL FORCE

On the basis of the engineer's theory of thin isotropic plates the state of strain and stress of an infinitely long cantilever plate is considered. The plate, which is of constant thickness, is loaded by a concentrated force on the free end (Fig. 1).

Assuming that the deformed middle surface of the plate $w(x, y)$ can be represented in the form of the integral (3), the Cauchy residue theorem is made use of to obtain an accurate solution of the differential Eq. (1) with the boundary conditions (2) in the form of Eq. (13).

The solution of the problem in the form of Eq. (13)—(16) satisfies all the boundary conditions required (2), as well as the differential Eq. (1) and the conditions at infinity.

The roots of the transcendental algebraic Eq. (11) are collated in Tab. 1 for five values of the coefficient of Poisson ν .

To show the influence of the coefficient of Poisson ν on the state of stress and strain of the plate, the diagrams of Fig. 3-8 have been drawn for the two extreme values of the coefficient, that is for $\nu = 0$ and $\nu = 0.5$.

The first five terms of the series are used for numerical computation.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dn. 20 września 1961 r.
