

## WYZNACZANIE CIĘŻARU SŁUPÓW KRATOWYCH NA PODSTAWIE PARAMETRÓW KSZTAŁTU I OBCIĄŻENIA

LĘSZEK MARTINI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Praca obejmuje wyprowadzenie ogólnego wzoru na ciężar konstrukcji słupów w zależności od ich wysokości, momentu zginającego i siły poprzecznej. Wzór ten w odróżnieniu od podobnych znanych eksperymentalnych wzorów Ryle'a i Petersona, stosowanych powszechnie do wyznaczania ciężaru słupów wieżowych, uzyskano na drodze czysto teoretycznej przy zastosowaniu analizy wymiarowej. Jak wykazano, wzory P. J. Ryle'a, [9], i W. S. Petersona, [6], są szczególnymi przypadkami wyprowadzonego wzoru ogólnego. Dla słupów wieżowych (jedno-trzonowych) zaproponowano szczególną postać wzoru ogólnego, która daje wartości pośrednie między wynikami uzyskanymi ze wzorów Ryle'a i Petersona. W dalszej części pracy wyprowadzono wzór ogólny na ciężar słupów «mocnych» o kształcie zupełnie różnym od słupów wieżowych. Podano przykłady liczbowego wyznaczenia stałych występujących w wyprowadzonych wzorach, pożytecznych dla przeprowadzenia analizy ekonomicznej linii najwyższych napięć.

W celu wyboru ekonomicznego rozstawu słupów oraz najodpowiedniejszego naprężenia przewodów itp. konieczne jest posługiwanie się ogólnym wzorem na ciężar, a więc i koszt słupa, w zależności od kilku zasadniczych parametrów bez wykonywania każdorazowo szczegółowych obliczeń statycznych.

Znane i powszechnie używane dwa wzory eksperymentalne na ciężar słupów wieżowych, a mianowicie wzór P. J. Ryle'a, [9], oraz W. S. Petersona, [6], dają niekiedy dość różne wyniki. W artykule wyprowadzono wzór teoretyczny na ciężar słupów, przy czym okazało się, że wzory eksperymentalne Ryle'a i Petersona stanowią przypadki szczególne wyprowadzonego wzoru.

### 2. Czynniki, od których zależy ciężar słupa. Założenia upraszczające

Ciężar zależy od następujących czynników:

- 1) wysokości słupa;
- 2) wielkości i przebiegu momentu zginającego zmiennego wzdłuż wysokości słupa;
- 3) wielkości i przebiegu siły poprzecznej wzdłuż zmiennej wysokości słupa;
- 4) od siatki statycznej słupa, a w szczególności rozstawu krawężników (pasów), rodzaju zakratowania (kąt pochylenia ukośników, wielokrotność kraty itp.), smukłości prętów, układu przewodów (płaski, jodełkowy, dwutrójkątowy lub beczkowy), a tym samym od układu sił obciążających;

5) od własności geometrycznych przekroju poprzecznego prętów, określonych asortymentem profili (kątowniki równoramienne, rury, pręty okrągłe, pręty złożone itp.);

6) od rodzaju materiału, a w szczególności ciężaru właściwego i naprężenia dopuszczalnego;

7) od rodzaju połączeń (spawane, śrubowe lub nitowane).

W celu zmniejszenia liczby czynników wpływających na ciężar słupa ograniczymy się do jednego wybranego asortymentu profili, np. do najczęściej stosowanych kątowników równoramiennych o stosunku szerokości półki do grubości równym ok. 10 ze stali St 3S, dla której zarówno ciężar właściwy, jak i naprężenie dopuszczalne, [11], są znane i stałe. Następnie założymy, że połączenia będą spawane. Ponadto przyjmiemy, że słup zaprojektowano poprawnie, tj. że przyjęto właściwą siatkę statyczną, która przy określonym układzie przewodów, określonym rodzaju połączeń i określonym asortymencie użytej stali daje najmniejszy ciężar konstrukcji, tzw. optymalny ciężar słupa.

Obciążenie konstrukcji zależy w pewnym stopniu również od siatki statycznej i asortymentu profili ze względu na parcie wiatru na samą konstrukcję. W rozważaniach naszych założymy, że przy wyznaczaniu ciężaru optymalnego uzyskanego dla poprawnego rozwiązania (lub, gdy istnieje kilka poprawnych rozwiązań, dla jednego z nich) uwzględniono parcie wiatru na konstrukcję. Zagadnienie poszukiwania poprawnego rozwiązania konstrukcji pominiemy. W przypadkach szczególnych, w praktyce, rozwiązanie poprawne i odpowiadającą mu siatkę statyczną znajdujemy metodą prób, w których dominującą rolę odgrywa intuicja, rutyna i wyczucie techniczne projektanta-statyka.

Na podstawie wyżej przyjętych założeń zacieśniliśmy liczbę czynników decydujących o ciężarze konstrukcji jedynie do trzech pierwszych.

Dla słupów wolnostojących wykresy momentów zginających (bądź też sił poprzecznych) są do siebie podobne w odpowiednich typach słupów (np. przelotowych lub odporowych), wobec czego można nie mówić o przebiegach momentu i siły, lecz o wartościach w określonym miejscu, i czynniki wpływające na optymalny ciężar konstrukcji sformułować następująco:

1) wysokość słupa  $H$  (średnia wysokość zawieszenia przewodów mierzona od powierzchni terenu wyrażona w  $m$ );

2) moment zginający przy powierzchni terenu  $M$  (wyrażony w  $kGm$ );

3) siła poprzeczna przy powierzchni terenu  $Q$  (wyrażona w  $kG$ ).

Jako wybrane miejsce momentu i siły przyjęto punkt przecięcia się osi słupa z powierzchnią terenu, gdyż w punkcie tym przyjmują one wartości maksymalne.

### 3. Zależność ciężaru słupa wieżowego od jego wysokości

Traktując ciężar słupa jako funkcję trzech zmiennych ustalmy chwilowo dwie zmienne i zbadajmy wpływ wysokości słupa na ciężar.

Weźmy w tym celu pod uwagę dwa trzony słupów wieżowych, jeden o wysokości  $H_1$ , drugi zaś o wysokości  $H_2$  (rys. 1). Oznaczmy przez  $h_1$  i  $h_2$  odcięte punktów na osiach trzonów od powierzchni terenu, czyli

$$(1) \quad 0 \leq h_1 \leq H_1, \quad 0 \leq h_2 \leq H_2.$$

Wprowadźmy wspólną odciętą względną  $x$ , odniesioną do całkowitej wysokości każdego słupa

$$(2) \quad x = \frac{h_1}{H_1} = \frac{h_2}{H_2};$$

wówczas

$$(3) \quad 0 \leq x \leq 1$$

dla każdego słupa.

Zarówno moment zginający, jak i siłę poprzeczną (które są zmienne wraz z wysokością słupów) możemy wyrazić jako funkcję  $x$ . Oznaczmy siłę poprzeczną i moment zginający dla słupa pierwszego

$$(4) \quad Q_1 = f_1(x), \quad M_1 = \varphi_1(x)$$

oraz dla słupa drugiego

$$(5) \quad Q_2 = f_2(x), \quad M_2 = \varphi_2(x).$$

Założmy następnie, że dla obu par funkcji zachodzą następujące równości

$$(6) \quad f_1(x) = f_2(x) = f(x) = Q, \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x) = M,$$

czyli, że przebieg momentu zginającego i siły poprzecznej jest wzdłuż długości każdego trzonu identyczny. Ponieważ ponadto obydwie słupy są rozwiązane poprawnie (tj. ekonomicznie), musi więc w obu słupach występować ten sam rozstaw pasów, rodzaj zakratowania i kąt nachylenia ukośników oraz przekrój poprzeczny pasów i ukośników.

Weźmy pod uwagę przyrost współrzędnej względnej  $\Delta x$  dla obu trzonów i odpowiadające mu odcinki trzonów o długościach

$$(7) \quad \Delta h_1 = H_1 \Delta x, \quad \Delta h_2 = H_2 \Delta x$$

oraz o ciężarach  $\Delta G_1$  i  $\Delta G_2$ .

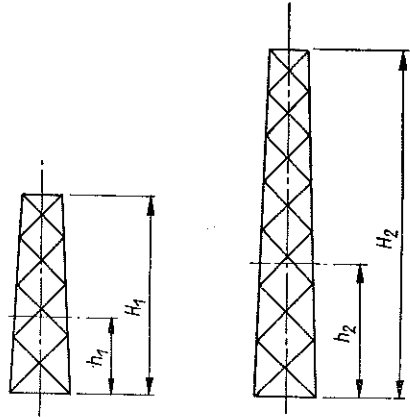
Wzdłuż odcinków  $\Delta h_1$  i  $\Delta h_2$ , jako dostatecznie krótkich, możemy  $Q$  (bądź  $M$ ) uważać za stałe i zgodnie z założeniami (6) za równe dla obu trzonów.

Wobec identyczności wielkości wyrażonych wzorami (4) ciężary  $\Delta G_1$  i  $\Delta G_2$  odcinków trzonów o długościach  $\Delta h_1$  i  $\Delta h_2$  pozostają do siebie w stosunku

$$(8) \quad \frac{\Delta G_1}{\Delta G_2} = \frac{H_1}{H_2}.$$

Ponieważ zaś stosunek ten jest stały dla każdego przyrostu  $\Delta x$ , zatem stosunek ciężarów trzonów wynosi

$$(9) \quad \frac{G_1}{G_2} = \frac{H_1}{H_2}.$$



Rys. 1

Ogólnie możemy więc stwierdzić, że ciężar  $G$  słupa wieżowego (jednotrzonowego) zależy liniowo od jego wysokości  $H$  (przy innych parametrach ustalonych), czyli

$$(10) \quad G = cH,$$

przy czym  $c$  oznacza współczynnik proporcjonalności.

#### 4. Wyprowadzenie zasadniczego wzoru na ciężar słupa rozwiązanego poprawnie

W celu wyprowadzenia wzoru na ciężar słupa posłużymy się metodą analizy wymiarowej, [1], [3], [4], [5], [7] i [8]. W metodzie tej operuje się wymiarami wielkości występujących w zagadnieniu i uzyskuje się nieraz zupełnie elementarnym rachunkiem nieoczekiwanie mocne wyniki.

Wypiszmy wymiary każdej z wielkości fizycznych branych pod uwagę używając oznaczeń wprowadzonych przez MAXWELLA: wymiar wysokości słupa  $[H] = [m]$ , wymiar momentu zginającego  $[M] = [kGm]$ , wymiar siły poprzecznej  $[Q] = [kG]$ .

Wielkości  $H$ ,  $M$  i  $Q$  są pewnymi wybranymi elementami przestrzeni wymiarowej  $II$ , spełniającymi następujące postulaty, [3] i [4]:

1) Określony jest iloczyn  $AB$  elementów  $A$  i  $B$ , który jest też elementem przestrzeni wymiarowej  $II$  i ma następujące własności:

$$AB = BA; \quad (AB)C = A(BC);$$

dla każdej pary elementów  $A$  i  $B$  istnieje w przestrzeni wymiarowej taki element  $X$ , że  $AX = B$ .

2) Określone jest potęgowanie  $A^a$  elementu  $A$  do wykładnika rzeczywistego  $a$ . Wynik potęgowania jest też elementem przestrzeni pomiarowej  $II$  i ma następujące własności:

$$\begin{aligned} A^{a+b} &= A^a A^b, & (AB)^a &= A^a B^a, \\ (A^a)^b &= A^{ab}, & A^1 &= A. \end{aligned}$$

3) Liczby dodatnie  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  są również elementami przestrzeni  $II$ .

Przestrzeń wymiarowa  $II$  jest izomorficzna z przestrzenią wektorów lub przestrzenią liniową. A więc każdej wielkości wymiarowej  $A$  można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie wektor  $\vec{A}$  w ten sposób, że iloczynowi  $AB$  wielkości wymiarowych odpowiada suma  $\vec{A} + \vec{B}$  wektorów, a potędze  $A^a$  odpowiada wektor  $a\vec{A}$ , [3].

Problem wyznaczenia wzoru na ilość zużytego materiału do budowy słupa sprowadza się do znalezienia wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji, [3],

$$(11) \quad G^* = \Phi(H, M, Q)$$

o trzech argumentach  $H$ ,  $M$  i  $Q$ .

Jedynie dwa argumenty spośród tych trzech są wymiarowo niezależne, gdyż macierz utworzona z wykładników przy wymiarach trzech wielkości  $H$ ,  $M$  i  $Q$  w układzie  $kG, m, s$  jest rzędu drugiego:

$$(12) \quad \begin{array}{l} \text{kG} \quad \text{m} \quad \text{s} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ H \dots \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ M \dots \\ Q \dots \end{array}$$

Za argumenty wymiarowo niezależne uważać będziemy  $M$  i  $Q$ . Przyjęcie takie jest szczególnie dogodnie w przypadku słupów wieżowych, dla których wykazaliśmy istnienie liniowej zależności między wysokością  $H$  a ilością stali  $G^*$  zużytej do budowy słupa. Argument  $H$  będzie wówczas wymiarowo zależny od argumentów  $M$  i  $Q$ , co można wyrazić wzorem

$$(13) \quad H = \pi M^{r_1} Q^{r_2},$$

w którym  $\pi$  jest wielkością bezwymiarową (liczbą),  $r_1$  i  $r_2$  są to liczby rzeczywiste.

Wyrażenie (13) po uwzględnieniu wymiarów  $H$ ,  $M$  i  $Q$  przyjmie postać

$$(14) \quad H = \pi \frac{M}{Q},$$

czyli

$$(15) \quad \pi = \frac{HQ}{M}.$$

Zgodnie z twierdzeniem E. Buckingham'a, [1], znanym w literaturze pod nazwą twierdzenia  $\pi$ , [2], wzór (11) przyjmie postać

$$(16) \quad G^* = \Phi(H; M, Q) = \varphi(\pi) M^\alpha Q^\beta,$$

przy czym  $\varphi(\pi)$  jest zwykłą funkcją liczbową argumentu bezwymiarowego  $\pi$  (liczbowego) i nie zależy od  $M$  i  $Q$ , a wykładniki  $\alpha$  i  $\beta$  (rzeczywiste) nie zależą ani od  $\pi$ , ani od  $M$  i  $Q$ .

Zajmijmy się obecnie lewą stroną wzoru (16). Wielkość  $G^*$  przedstawia ilość stali potrzebnej do budowy słupa. Ilość stali możemy jednak podać w różny sposób, np. podając jej ciężar lub jej objętość [podawania ilości stali w jednostkach masy nie należy brać pod uwagę, gdyż zachodziłaby konieczność wprowadzenia jednostek czasu, a tych prawa strona równania (16) nie zawiera]. W pierwszym przypadku wymiarem lewej strony będzie [kG], w drugim [m<sup>3</sup>].

Ażeby uwolnić się od wieloznaczności jednostek do wyznaczania ilości stali, pomnożmy obie strony równania (16) przez nową wielkość wymiarową, tj. ciężar właściwy stali  $\Gamma$  o wymiarze [kGm<sup>-3</sup>] w niewiadomym na razie stopniu  $\gamma$ . Otrzymamy

$$(17) \quad G = G^* \Gamma^\gamma = \varphi(\pi) M^\alpha Q^\beta \Gamma^\gamma.$$

Wykładnik  $\gamma$  jest tak dobrany, żeby wymiarem obu stron równania (17) był kG, czyli

$$(18) \quad [G] = [\text{kG}].$$

Jeżeli np.  $[G^*] = [\text{kG}]$ , to  $\gamma = 0$ ; gdy zaś  $[G^*] = [\text{m}^3]$ , to  $\gamma = 1$ . Przeciwnie, każdemu  $\gamma$  odpowie pewien wymiar  $[G^*]$ . Ogólnie biorąc  $\gamma$  może być dowolną

liczbą rzeczywistą, gdyż wymiar  $[G^*]$  jest nam obojętny, interesuje nas bowiem tylko równanie

$$(19) \quad G = \varphi(\pi) M^\alpha Q^\beta \Gamma^\gamma,$$

w którym

$$(20) \quad \begin{aligned} [G] &= [kG], & [M] &= [kGm], \\ [Q] &= [kG], & [\Gamma] &= [kGm^{-3}]. \end{aligned}$$

Funkcja liczbowa  $\varphi(\pi)$  w równaniu (19) daje się rozwinąć w szereg potęg ujemnych i dodatnich argumentu  $\pi$ :

$$(21) \quad \varphi(\pi) = \dots + \frac{a_{-2}}{\pi^2} + \frac{a_{-1}}{\pi} + a_0 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 + \dots,$$

przy czym  $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2$  są liczbami.

Założmy, co jest intuicyjnie zrozumiałe, że dla  $H = 0$  (a więc i  $\pi = 0$ ) mamy  $G = 0$  [czyli  $\varphi(0) = 0$ ]. Wtedy muszą być równe zero wszystkie współczynniki  $\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0$  przy niedodatnich potęgach zmiennej  $\pi$ . Ograniczmy się do pierwszego niezerowego wyrazu szeregu. Uwzględniając równanie (15) otrzymamy

$$(22) \quad \varphi(\pi) = a_1 \frac{HQ}{M},$$

co po wstawieniu do wzoru (19) daje zależność

$$(23) \quad G = a_1 HM^{a+1} Q^{\beta+1} \Gamma^\gamma.$$

Z warunku, że wymiary obu stron równania (23) muszą być równe, po uwzględnieniu (20) otrzymujemy układ dwóch równań o trzech niewiadomych  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ :

$$(24) \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha - 3\gamma = 0.$$

Z układu tego wyrazimy dwie pierwsze niewiadome  $\alpha$  i  $\beta$  przez trzecią  $\gamma$ ; otrzymamy

$$(25) \quad \alpha = 3\gamma, \quad \beta = 1 - 4\gamma.$$

Wstawiając znalezione wyrażenia do wzoru (23) mamy

$$(26) \quad G = a_1 HM^{3\gamma-1} Q^{2-4\gamma} \Gamma^\gamma.$$

Z prawej strony wzoru (26) są trzy wielkości zmienne  $H, M$  i  $Q$ , oraz trzy stałe  $a_1, \gamma$  i  $\Gamma$ . Wielkość  $\Gamma$  jest bowiem dla określonego materiału słupa stała i może być włączona do stałej  $a_1$  przez podstawienie

$$(27) \quad k = a_1 \Gamma^\gamma,$$

dzięki czemu wzór (26) przyjmuje znacznie prostszą postać

$$(28) \quad G = kHM^{3\gamma-1} Q^{2-4\gamma}.$$

Wzór ten w odróżnieniu od znanych wzorów Ryle'a i Petersona, [6] i [9], ma dwie stałe  $k$  i  $\gamma$ . Jak widać z toku wyprowadzenia, wzór ten można uważać jako przybliżony w odniesieniu do wszelkich słupów (nie tylko słupów wieżowych). Przybliżenie wynika stąd, że ograniczyliśmy się jedynie do pierwszego wyrazu rozwinięcia szeregu (21). Należy wspomnieć jednak, że w odniesieniu do słupów typu wieżowego wzór (28) jest wzorem ścisłym, gdyż (jak to udowodniliśmy w rozdziale poprzednim) ciężar słupa wieżowego zależy liniowo od jego wysokości, co pokrywa się z założeniem (22). Zarówno wzór Ryle'a jak i wzór Petersona są szczególnymi przypadkami wzoru (28). Podstawiając do wzoru (28)  $\gamma = 1/2$  otrzymujemy wzór Ryle'a, [9]:

$$(29) \quad G = kHM^{1/2}.$$

Podstawiając zaś  $\gamma = 1/3$  otrzymujemy wzór Petersona, [6]:

$$(30) \quad G = kHQ^{2/3}.$$

Wzory Ryle'a i Petersona otrzymane zostały na całkiem innej drodze i jako szczególne postacie wzoru (28) obejmują znacznie mniejszy od niego zakres zastosowań. Zaletą ich jest to, że mają one jedynie jedną stałą, którą wyznaczyć można rozporządzając określonym ciężarem tylko jednego słupa.

Wzór (28) w swej postaci ogólnej wymaga dla wyznaczenia stałych  $k$  i  $\gamma$  znajomości ciężaru dwóch różnych słupów o różnych parametrach kształtu i obciążenia ( $H$ ,  $M$  i  $Q$ ). Wprowadzając pewne dodatkowe uproszczenie polegające na przyjęciu, że zarówno moment zginający  $M$ , jak i siła poprzeczna  $Q$  w równym stopniu wpływają na ciężar słupa  $G$  [co możemy napisać przyrównując wykładniki przy  $M$  i  $Q$  we wzorze (28) do siebie], otrzymamy

$$(31) \quad 3\gamma - 1 = 2 - 4\gamma,$$

a stąd

$$(32) \quad \gamma = \frac{3}{7}.$$

Wzór (28) przyjmuje postać

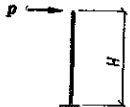
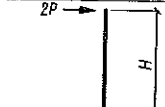
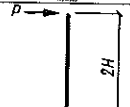
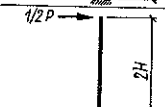
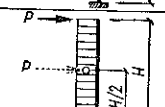

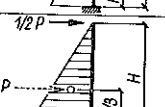

$$(33) \quad G = kH(MQ)^{2/7}.$$

Założenie (31) wydaje się o tyle uzasadnione, że w powszechnie spotykanych konstrukcjach słupów stosunek ciężaru pasów (krawężników) do ciężaru ukośników pozostaje w przybliżeniu jak 1 : 1. Z drugiej strony wiadome jest, że na ciężar pasów decydujący wpływ ma moment zginający  $M$ , na ciężar zaś ukośników — siła poprzeczna  $Q$ . Stąd można wyciągnąć poprzedni wniosek odnośnie równorzędnego traktowania obu parametrów obciążenia  $M$  i  $Q$  we wzorze ogólnym (28).

W celu porównania wyników otrzymywanych przy użyciu każdego z trzech wzorów (29), (30) i (33) weźmy pod uwagę słup o wysokości  $H$  obciążony u wierzchołka skupioną siłą poprzeczną  $P$ . Ciężar tego słupa uważajmy dla uproszczenia jako równy jedności.

Posługując się kolejno tymi wzorami można znaleźć ciężary słupów o innych parametrach kształtu i obciążenia. Schematy obciążeń tych słupów oraz wyniki obliczeń przedstawiono w tabelicy 1, z której widać, że wartości otrzymane na podstawie wzoru (33) mieszczą się zawsze między wartościami uzyskanymi na podstawie

Tablica 1

L. p.	Schemat obciążenia	Moment zginający u dołu słupa	Siła poprzeczna u dołu słupa	Ciężar słupa obliczony ze wzoru		
				Ryle's	Petersona	proponowanego
1		$PH$	$P$	1	1	1
2		$2PH$	$2P$	1,14	1,56	1,49
3		$2PH$	$P$	2,83	2	2,44
4		$PH$	$1/2 P$	2	1,26	1,64
5		$3/2 PH$	$2P$	1,23	1,56	1,37
6		$4/3 PH$	$2P$	1,16	1,56	1,32
7		$PH$	$2P$	1	1,59	1,22
8		$PH$	$5/2 P$	1	1,84	1,30

wzorów Ryle'a (29) i Petersona (30). Należy dodać, że wyniki otrzymane przy użyciu wzoru (33) są racjonalniejsze w odróżnieniu np. od wyników otrzymanych ze wzoru (30). Wzór (30) mimo różnych schematów obciążenia słupa dla nr 2, 5 i 6 (tabl. 1) daje identyczne wyniki na ciężar słupa.



5. Przykład liczbowego wyznaczenia stałych  $k$  i  $\gamma$  dla słupów przelotowych portalowych linii 400 kV z elementów iglicowych

W celu wyznaczenia stałych  $k$  i  $\gamma$  we wzorze (28) oprzemy się na danych konstrukcyjnych słupa przelotowego linii 400 kV Mikułowa – Częstochowa, zaprojektowanego dla prężej 450 m oraz na danych podobnego słupa dla prężej 350 m otrzymanego za pomocą obliczenia. Dane charakterystyczne tych słupów zebrano w tabl. 2.

Tablica 2. Dane charakterystyczne portalowych słupów przelotowych \*

Wielkość	Słup nr 1		Słup nr 2		Stosunek poz. 2/4	
	oznaczenie	wartość liczbowa	oznaczenie	wartość liczbowa	oznaczenie	wartość liczbowa
	1	2	3	4	5	6
Rozpiętość przęsła w m	$a_1$	450	$a_2$	350		
Wysokość słupa do poprzeczника w m	$H_1$	28,6	$H_2$	22,5	$h$	1,27
Parcie wiatru na prze- wody i izolatory w kG		4310		3390		
Parcie wiatru na konstrukcję w kG		1780		1400		
Siła poprzeczna u dołu słupa w kG	$Q_1$	6090	$Q_2$	4790	$q$	1,27
Moment od parcia wiatru na przewo- dy i izolatory w kGm		123000		76300		
Moment od parcia wiatru na kon- strukcję w kGm		25400		15750		
Wypadkowy mo- ment zginający w kGm	$M_1$	148400	$M_2$	92050	$m$	1,612
Ciężar słupa w kG	$G_1$	4340	$G_2$	2780	$g$	1,56

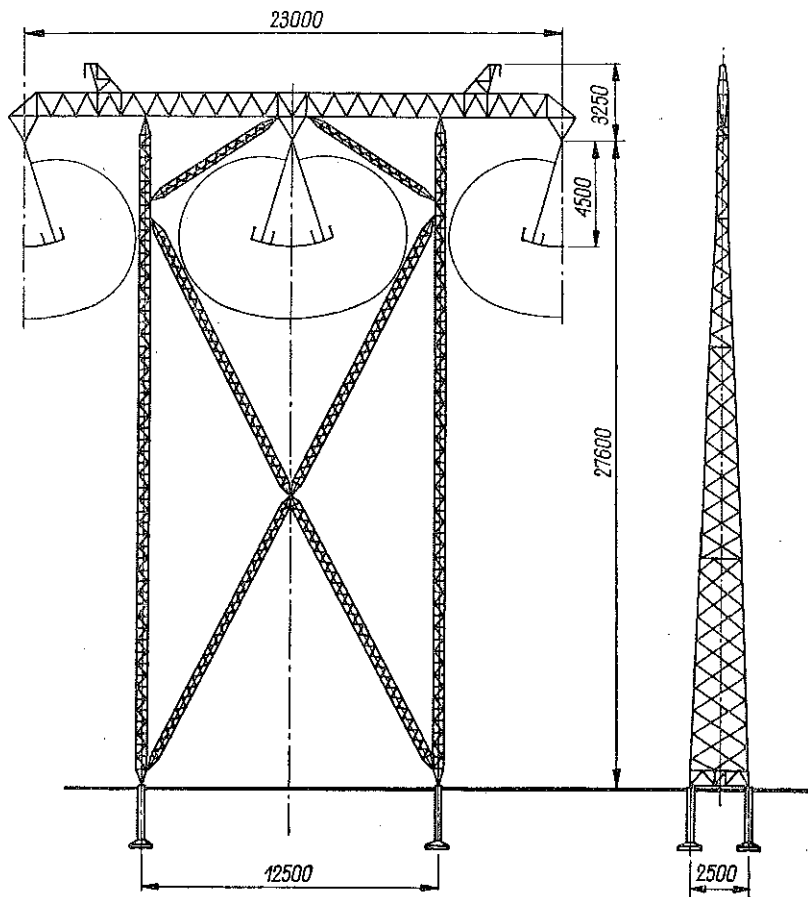
\* Słup nr 1 odpowiada słupowi FP użytemu na linii 400 kV Mikułowa-Częstochowa.

Siatkę statyczną pierwszego z tych słupów pokazano na rys. 2 oraz 3. Oznaczając we wzorze (28) parametry odnoszące się do słupa pierwszego wskaźnikiem 1, parametry zaś odnoszące się do słupa drugiego wskaźnikiem 2, otrzymamy

$$(34) \quad G_i = kH_i M_i^{3\gamma-1} Q_i^{2-4\gamma}, \quad i = 1, 2,$$

a stąd

$$(35) \quad \frac{G_1}{G_2} = \frac{H_1}{H_2} \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{3\gamma-1} \left( \frac{Q_1}{Q_2} \right)^{2-4\gamma}$$



Rys. 2

Wprowadzając dla uproszczenia oznaczenia na ilorazy odpowiednich wielkości  $h = H_1/H_2 = 1,27$ ,  $q = Q_1/Q_2 = 1,27$ ,  $m = M_1/M_2 = 1,612$ ,  $g = G_1/G_2 = 1,56$ , otrzymamy

$$(36) \quad m^{3\gamma} q^{-4\gamma} = \left( \frac{m^3}{q^4} \right)^\gamma = \frac{gm}{hq^2}$$

lub liczbowo

$$\left( \frac{1,612^3}{1,27^4} \right)^\gamma = \frac{1,56 \cdot 1,612}{1,27 \cdot 1,27^2}$$

czyli  $1,615^\gamma = 1,22$ , a stąd

$$(37) \quad \gamma = \frac{\log 1,22}{\log 1,615} \approx \frac{0,09}{2,08} \approx 0,433.$$

Jak widać,  $\gamma \approx 3/7 = 0,428$ , co wskazuje na słuszność założenia (32) również dla słupów o kształcie płaskiego portalu z przekątniami iglicowymi (rys. 2 i 3). Dlatego też w dalszym ciągu przyjmiemy założenie (32), tj. że  $\gamma = 3/7$  i posługiwać się będziemy wzorem (33). W celu obliczenia współczynnika  $k$  we wzorze (33) posłużymy się danymi dla słupa obliczonego dla przęsła  $a_1 = 450$  m (rys. 2). Otrzymamy

$$k = \frac{G_1}{H_1 (M_1 Q_1)^{2/7}} = \frac{4340}{28,6 (148400 \cdot 6090)^{2/7}} = 0,424.$$

Wzór (28) przyjmuje dla rozważanych słupów postać następującą:

$$(38) \quad G = 0,424 H (MQ)^{2/7}.$$

#### 6. Wyprowadzenie wzoru na ciężar słupów portalowych rozkracznych, zastosowanych w linii 400 kV jako słupy mocne. Przykład liczbowy

Słupy portalowe rozkraczne o pięciu nogach, o postaci spawanych kratowych prętów złożonych (iglicowych), obciążonych osiowo, odbiegają znacznie swym charakterem od słupów wieżowych (rys. 4 i 5). Zasadniczą cechą tych słupów użytych jako odporowe na pierwszej polskiej linii 400 kV jest to, że obciążeniem wymiarującym są dwie trzecie jednostronnego naciągu wszystkich przewodów, [10].

Moment zginający u dołu słupa

$$(39) \quad M = PH = QH,$$

przy czym  $P$  oznacza obciążenie słupa równe sile poprzecznej  $Q$ ,  $H$  wysokość punktu zaczepienia obciążenia ponad terenem. Związek (10) wyprowadzony dla słupów wieżowych w p. 3. można zastąpić przez związek (39). Wobec powyższego przy rozważaniach ogólnych dotyczących znalezienia wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji (11) o trzech argumentach  $H$ ,  $M$  i  $Q$ , za argumenty wymiarowo niezależne będziemy tym razem uważać  $Q$  i  $H$ . Argument  $M$  jako wymiarowo zależny od  $H$  i  $Q$  i dający się prosto wyrazić przez  $H$  i  $Q$  (39), może być w wyrażeniu (11) opuszczony.

Wzór (11) przyjmie postać

$$(40) \quad G^* = \Phi(H, Q).$$

Stosując twierdzenie E. Buckingham'a, [1], otrzymamy wzór

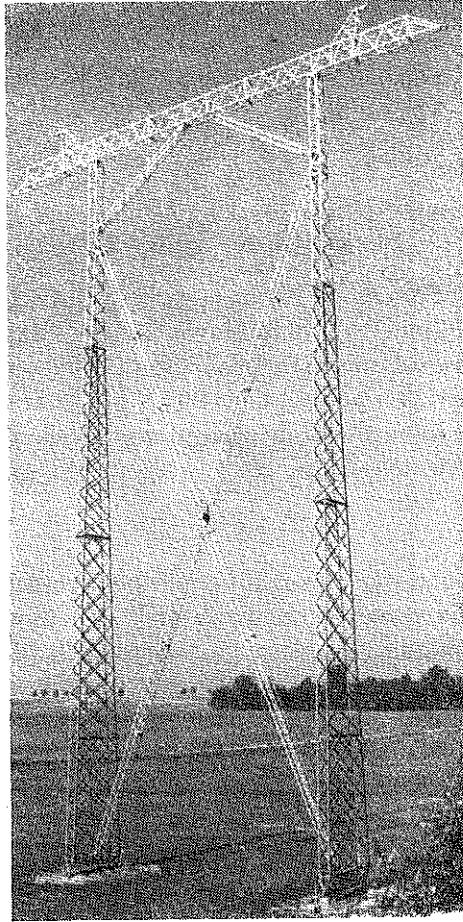
$$(41) \quad G^* = \pi_1 H^\delta Q^\beta,$$

w którym  $\pi_1$  jest wielkością bezwymiarową (liczbą), niezależną od argumentów  $H$  i  $Q$  oraz  $\delta$  i  $\beta$  są wykładnikami (rzeczywistymi), niezależnymi ani od  $\pi_1$  ani od  $H$  i  $Q$ . Stosując następnie w odniesieniu do wymiaru lewej strony wzoru (41) takie same rozumowania jak w p. 4, otrzymamy analogicznie do wzoru (19) wzór

$$(42) \quad G = \pi_1 H^\delta Q^\beta \Gamma^\gamma,$$

w którym  $\gamma$  jest pewnym wykładnikiem rzeczywistym. Wielkość wymiarowa  $\Gamma$  jest ciężarem właściwym konstrukcji. Wymiary poszczególnych wielkości wymiarowych wchodzących do wzoru (42) są następujące:

$$\begin{aligned} [G] &= [\text{kG}], & [H] &= [\text{m}], \\ [Q] &= [\text{kG}], & [\Gamma] &= [\text{kGm}^{-3}]. \end{aligned}$$



Rys. 3

Z warunku, że wymiary obu stron równania (42) muszą być sobie równe, otrzymujemy układ dwóch równań o trzech niewiadomych  $\delta$ ,  $\beta$  i  $\gamma$

$$(43) \quad \beta + \gamma = 1, \quad \delta - 3\gamma = 0.$$

Z układu tego wyrazimy dwie pierwsze niewiadome  $\delta$  i  $\beta$  przez pozostałą  $\gamma$ ; otrzymamy

$$(44) \quad \delta = 3\gamma, \quad \beta = 1 - \gamma.$$

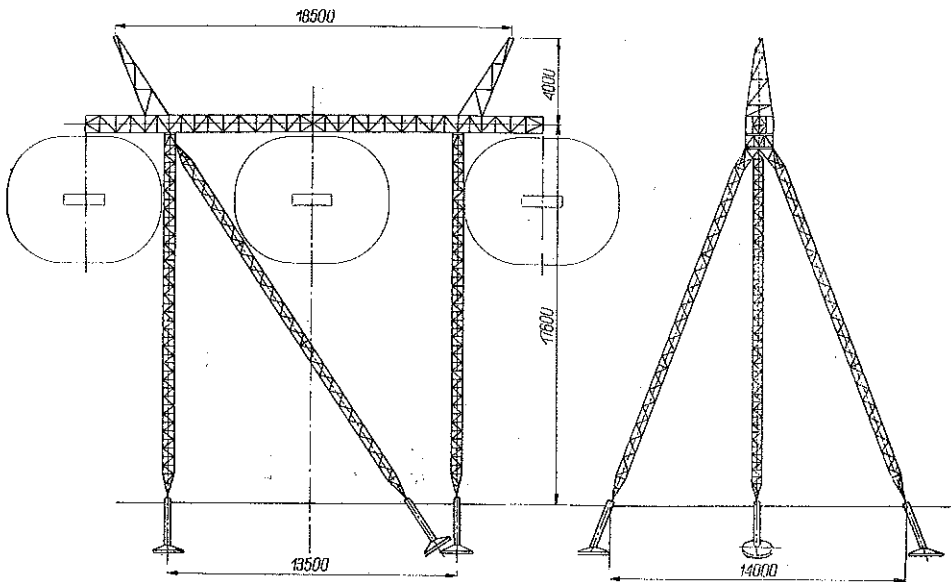
Wstawiając (44) do (42) mamy

$$(45) \quad G = \pi_1 H^{3\gamma} Q^{1-\gamma} \Gamma^\gamma.$$

Wielkość  $\Gamma$  jest dla określonego materiału słupa (stal) stała i może być włączona do stałej  $\pi_1$  przez podstawienie  $k = \pi_1 \Gamma^\gamma$ , dzięki czemu wzór (45) przyjmie prostą postać

$$(46) \quad G = k H^{3\gamma} Q^{1-\gamma}.$$

Stałe  $k$  i  $\gamma$  należy wyznaczyć na podstawie obciążeń i ciężarów dla dwóch konkretnie zaprojektowanych słupów.



Rys. 4

*Przykład liczbowy.* Wyznaczmy stałe  $k$  i  $\gamma$  dla przykładu opierając się na danych konstrukcyjnych portalowo-rozkracznych słupów odporowych linii 400 kV dla przęseł 450 m i 350 m, których poszczególne wielkości charakterystyczne są zebrane w tabl. 3. Siatkę statyczną słupa odpowiadającego rozpiętości przęsła 350 m pokazano na rys. 4 i 5.

Na podstawie wzoru (46) stosunek ciężarów słupów wynosi

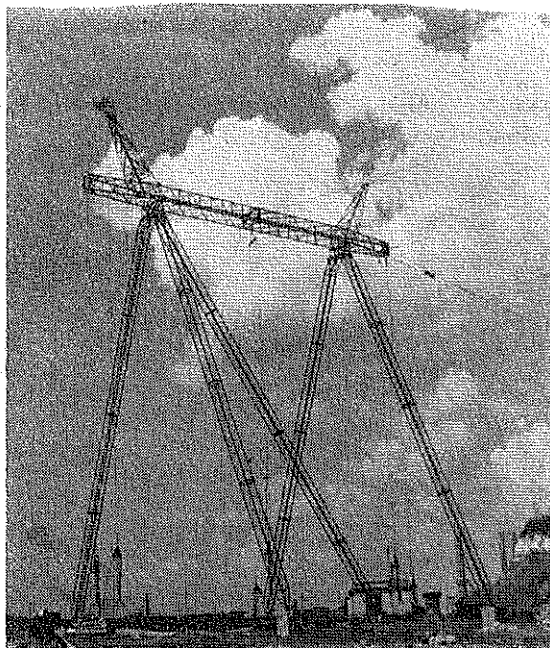
$$\frac{G_1}{G_2} = \left( \frac{H_1}{H_2} \right)^{3\gamma},$$

czyli  $1,31 = 1,285^{3\gamma}$ , a stąd

$$\gamma = 0,359, \quad 3\gamma = 1,077, \quad 1 - \gamma = 0,641.$$

Stałą  $k$  obliczymy posługując się parametrami słupa drugiego, (FON I) dla przęsła 350 m (rys. 4 i 5):

$$k = \frac{G_2}{H_2^{3\gamma} Q^{1-\gamma}} = \frac{5320}{17,6^{1,077} \cdot 23200^{0,641}} = 0,386$$



Rys. 5

Tablica 3. Dane charakterystyczne portalowych słupów odporowych \*

Wielkość	Słup nr 1		Słup nr 2		Stosunek poz. 2/4	
	oznaczenie	wartość liczbowa	oznaczenie	wartość liczbowa	oznaczenie	wartość liczbowa
	1	2	3	4	5	6
Rozpiętość przęsła w m	$a_1$	450	$a_2$	350		
Wysokość słupa do poprzecznika w m	$H_1$	22,6	$H_2$	17,6	$h$	1,285
2/3 jednostronnego naciągu przewo- dów w kG	$Q$	23200	$Q$	23200		1
Ciężar słupa w kG	$G_1$	7000	$G_2$	5320	$g$	1,31

\* Słup nr 2 odpowiada słupowi FON I użytemu na linii 400 kV Mikołowa-Częstochowa.

A zatem  $G = 0,386 \cdot H^{1,077} Q^{0,641}$ . Podstawmy  $Q = 23\ 200$  kG. Otrzymamy ostatecznie dla słupów portalowo-rozkracznych (z nogami w postaci spawanych kratowych prętów złożonych) o różnych wysokościach i ciężarach przy różnych rozpiętościach przeszły odporowych, lecz stałej sile poprzecznej wynoszącej 23 200 kG następujący wzór:

$$(47) \quad G = 243 H^{1,077}.$$

Otrzymane wzory (38) dla słupów przelotowych FP oraz (47) dla słupów odporowych FON I linii 400 kV pozwoliły na przeprowadzenie dokładnej analizy ekonomicznej tej linii.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] E. BUCKINGHAM, *On physically similar systems*, physical Reviews, 4, 4 (1914), 345.
- [2] Н. Г. Чеботарев, *Доказательство π теоремы*, Собрание сочинений, т. II, Москва-Ленинград 1951, 216.
- [3] S. DROBOT, *On the foundations of dimensional analysis*, Studia Mathematica, z. 14, 1953, 84—99.
- [4] S. DROBOT, *O analizie wymiarowej, Zastosowania Matematyki*, 4, I (1954), 233.
- [5] I. NEWTON, *Principia*, 1686, t. II, VII, *Propositio* 32, 33.
- [6] W. S. PETERSON, *A formula for estimating tower weights and its application to the economies of transmission line design*, CIGRÉ, 1950, ref. 218.
- [7] O. REYNOLDS, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous and of the law of resistances in parallel channels*, Philosophical Transactions of Royal Society, Seria A, z. 174, 1883, s. 935.
- [8] O. REYNOLDS, *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Philosophical Transactions of Royal Society, Seria A, z. 186, 1894, s. 123.
- [9] P. J. RYLE, *Steel tower economics*, J. IEE, 33, 93 (1946).
- [10] PN 58/E-05100. Elektroenergetyczne linie napowietrzne. Ogólne przepisy budowy, Wydawnictwa Normalizacyjne, Warszawa.
- [11] PN 60/B-05205. Elektroenergetyczne linie napowietrzne. Stalowe konstrukcje wsporcze. Obliczenia statyczne i projektowanie, Wydawnictwa Normalizacyjne, Warszawa.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСА РЕШЕТЧАТЫХ ОПОР, НА ОСНОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ ФОРМЫ И НАГРУЗКИ

Выводится общая формула для веса конструкции опор, в зависимости от их высоты, изгибающего момента и поперечной силы. Эта формула, в отличие от подобных известных экспериментальных формул Райля и Петерсона, всеобщее применение к определению веса решетчатых опор, получена чисто теоретическим путем применяя размерный анализ. Как показано, формулы Райля и Петерсона являются частными случаями выведенной общей формулы. Для решетчатых столбов (одноколонных) предлагается особую форму общей формулы, которая дает промежуточные значения, между результатами полученными по формулам Райля и Петерсона. В дальнейшей части работы, выводится общая формула для веса анкерных опор в форме совершенно разнящейся от одноколонных опор. Даются примеры численного определения постоянных, существующих в выведенных уравнениях, пригодных для экономического анализа линий высокого напряжения.

## S u m m a r y

DETERMINATION OF WEIGHT OF LATTICE TOWERS ON THE BASIS  
OF SHAPE PARAMETERS AND LOADING

The work is concerned with the derivation of a general formula for the weight of towers in function of their height, bending moment and transverse force. Conversely to the case of experimental formulae due to Ryle and Peterson generally applied to determine the weight of tower columns, this formula was derived theoretically by means of dimensional analysis. As has been shown, Ryle and Peterson formulae are particular cases of the derived general expressions. For single shaft tower, a particular form of the general formula has been proposed, which gives intermediate values between those following from Ryle and Peterson expressions. In further part of the work, the general formula defining the weight of anchor and dead end towers different from single shaft, was derived. Examples of numerical determination of constants occurring in proposed formulae are presented.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 maja 1962 r.*