

STATYKA ROZGAŁĘZIONYCH PRZESTRZENNYCH
RUROCIĄGÓW SAMOKOMPENSACYJNYCH

CZESŁAW WOŹNIAK (GLIWICE)

Wstęp

Rurociągi samokompensacyjne są urządzeniami złożonymi z prętów prostych i zakrzywionych, zwykle o skomplikowanej konfiguracji przestrzennej i niewielkiej liczbie punktów podparcia. Zagadnienie obliczania momentów, sił i przemieszczeń w takich urządzeniach było tematem wielu prac; wykaz literatury przedmiotu podano np. w monografiach [1] lub [2]. W tej pracy przedstawiono nową metodę wyznaczania sił kompensacyjnych i przemieszczeń w rozgałęzionych rurociągach przestrzennych. Nawiązuje ona częściowo do tzw. sposobu Crossa-Cocchi stosowanego do obliczeń ram płaskich, [3]. Z uwagi na wykorzystanie zapisu macierzowego metodę można nazwać «macierzowo-iteracyjną»; ujęcie zagadnienia jest jednakże zupełnie inne od podanego w [4] dla rurociągów płaskich.

Przyjęto liniową sprężystość układu oraz pominięto wpływ sił osiowych i tnących na stan odkształcenia. Uwzględniono wpływ działania na rurociąg dowolnie rozłożonego obciążenia ciągłego. Zastosowano wskaźnikowy zapis sumacyjny (sumowanie podług wskaźnika powtarzającego się), przy czym wskaźniki oznaczone literami alfabetu greckiego $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ lub $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ przebiegają liczby 1, 2, 3 lub $1', 2', 3'$.

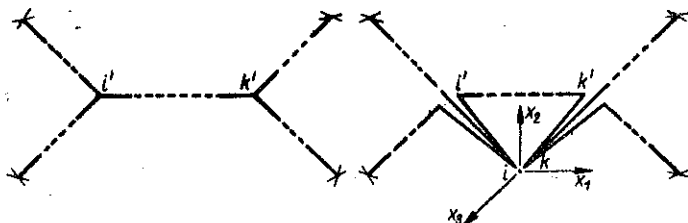
Oznaczenia

- u wektor przesunięcia punktu leżącego na osi rurociągu,
- ω wektor małego obrotu przekroju prostopadłego do osi rurociągu,
- u, ω wektory przesunięcia i małego obrotu węzła i ,
- M wektor momentu działającego na przekrój rurociągu,
- P wektor siły działającej na przekrój rurociągu,
- M, P wektory momentu i siły działające na gałąź $i-k$ w węźle i ,
- M, P wektory momentu i siły zaczepione w węźle i .

1. Stan napięcia i przemieszczenia gałęzi rurociągu

Za schemat statyczny rurociągu przyjmijmy ustrój, w którym usunięto wszystkie punkty rozgałęzień i połączono przekroje przy rozgałęzieniach sztywnymi ramionami schodzącymi się w wybranym punkcie. W punkcie tym przyjmujemy początek

kartezjańskiego ortogonalnego układu współrzędnych x_1, x_2, x_3 (rys. 1). Rozpatrywany będzie w tym rozdziale dowolny element schematu statycznego, złożony z odcinka sprężystego $i' - k'$ [o równaniu parametrycznym $x_\alpha = x_\alpha(\sigma_i)$] oraz



Rys. 1

ramion sztywnych $i - i'$ i $k - k'$. Element ten nazwiemy *gałęzią* rurociągu. Jeżeli w punkcie i schodzą się co najmniej trzy sztywne ramiona, to punkt ten nazwiemy *węzłem* rurociągu. Przyjmiemy ponadto, że odkształceniu układu nie mogą towarzyszyć obroty przekrojów podporowych.

Niech γ oznacza wektor jednostkowego obrotu oraz p wektor jednostkowego obciążenia rozpatrywanej gałęzi:

$$(1.1) \quad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{d\sigma_i} = \partial_\alpha \omega \frac{dx_\alpha}{d\sigma_i},$$

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dP}{d\sigma_i} = \partial_\alpha P \frac{dx_\alpha}{d\sigma_i}.$$

Wprowadzając dwuwektor

$$(1.2) \quad T_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} x_\mu$$

($\varepsilon_{\alpha\beta\mu}$ jest symbolem Ricciego), możemy napisać następujące związki (por. [5]):

$$(1.3) \quad \omega_\alpha = \overset{i}{\omega}_\alpha + \int_0^{\sigma_i} \gamma_\alpha(\tau) d\tau, \quad P_\alpha = \overset{ik}{P}_\alpha + \int_0^{\sigma_i} p_\alpha(\tau) d\tau,$$

$$(1.4) \quad u_\alpha = \overset{i}{u}_\alpha + T_{\alpha\beta} \overset{i}{u}_\beta + T_{\alpha\beta} \int_0^{\sigma_i} \gamma_\beta(\tau) d\tau - \int_0^{\sigma_i} T_{\alpha\beta}(\tau) \gamma_\beta(\tau) d\tau,$$

$$M_\alpha = \overset{ik}{M}_\alpha + T_{\alpha\beta} \overset{ik}{M}_\beta + T_{\alpha\beta} \int_0^{\sigma_i} p_\beta(\tau) d\tau - \int_0^{\sigma_i} T_{\alpha\beta}(\tau) p_\beta(\tau) d\tau.$$

Przyjmijmy w każdym punkcie krzywych $i' - k'$ początek lokalnego układu współrzędnych α' w ten sposób, by wektor jednostkowy e_1 , był styczny do krzywej $x_\alpha = x_\alpha(\sigma_i)$, wektor e_2 , leżał na normalnej głównej, wektor e_3 , na binormalnej (dla odcinka prostego gałęzi położenie wektorów e_2 , i e_3 , jest dowolne). Jeżeli

$$(1.5) \quad k_{\alpha'\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(e_{\alpha'}, e_\beta),$$

to zachodzi

$$(1.6) \quad M_{\alpha'} = k_{\alpha'\beta} M_{\beta}.$$

Składowa $M_{1'}$ jest momentem skręcającym, składowe $M_{2'}$ i $M_{3'}$ są momentami zginającymi. Zgodnie z twierdzeniem Castigliano otrzymamy

$$(1.7) \quad \omega_{\alpha}^i - \omega_{\alpha}^k = \int_{(i'k')} \left(S_{1'1'} M_{1'} \frac{\partial M_{1'}}{\partial M_{\alpha}} + S_{2'2'} M_{2'} \frac{\partial M_{2'}}{\partial M_{\alpha}} + S_{3'3'} M_{3'} \frac{\partial M_{3'}}{\partial M_{\alpha}} \right) d\sigma,$$

$$\dot{u}_{\alpha}^i - u_{\alpha}^k = \int_{(i'k')} \left(S_{1'1'} M_{1'} \frac{\partial M_{1'}}{\partial P_{\alpha}} + S_{2'2'} M_{2'} \frac{\partial M_{2'}}{\partial P_{\alpha}} + S_{3'3'} M_{3'} \frac{\partial M_{3'}}{\partial P_{\alpha}} \right) d\sigma,$$

przy czym dla przekroju pierścieniowego (cienkościennego) mamy

$$(1.8) \quad S_{1'1'} = \frac{1}{GI_0} = \frac{1,3}{EI}, \quad S_{2'2'} = \frac{1}{EI}, \quad S_{3'3'} = \frac{1}{\nu EI},$$

gdzie E jest modułem Younga, ν współczynnikiem owalizacji przekroju (jest to tzw. liczba Kármána; dla pręta prostego $\nu = 1$), I momentem bezwładności przekroju względem osi przechodzącej przez jego środek.

Przyjmijmy (1.8) za wartości własne tensora S o składowych

$$(1.9) \quad S_{\alpha\beta} = k_{\alpha 1'} k_{\beta 1'} S_{1'1'} + k_{\alpha 2'} k_{\beta 2'} S_{2'2'} + k_{\alpha 3'} k_{\beta 3'} S_{3'3'}.$$

Podstawiając prawą stronę wyrażenia (1.6) do związku (1.7) i korzystając z tensora S otrzymamy

$$(1.10) \quad \omega_{\alpha}^i - \omega_{\alpha}^k = \int_{(i'k')} S_{\mu\nu} M_{\mu} \frac{\partial M_{\nu}}{\partial M_{\alpha}} d\sigma,$$

$$\dot{u}_{\alpha}^i - u_{\alpha}^k = \int_{(i'k')} S_{\mu\nu} M_{\mu} \frac{\partial M_{\nu}}{\partial P_{\alpha}} d\sigma.$$

Wyrażając w (1.10) składowe wektora M zgodnie z drugą relacją (1.4), po wprowadzeniu następujących «afinorów wpływu» (składowymi tych afinorów są liczby wpływowe)

$$(1.11) \quad \begin{aligned} A_{\alpha\beta}^i &= \int_{(i'k')} S_{\alpha\beta} d\sigma, & A_{\alpha\beta}^k &= A_{\beta\alpha}^i, \\ B_{\alpha\beta}^i &= \int_{(i'k')} S_{\mu\alpha} T_{\mu\beta} d\sigma, \\ C_{\sigma\beta}^i &= \int_{(i'k')} S_{\mu\nu} T_{\mu\beta} F_{\nu\alpha} d\sigma, & C_{\alpha\beta}^k &= C_{\beta\alpha}^i \end{aligned}$$

oraz wektorów ujmujących działanie obciążeń ciągłych

$$(1.12) \quad \begin{aligned} D_\alpha &= \int_{(i'k')}^{ik} S_{\mu\alpha} \left[T_{\mu\nu} \int_0^\sigma p_\nu(\tau) d\tau - \int_0^\sigma T_{\mu\nu}(\tau) p_\nu(\tau) d\tau \right] d\sigma, \\ E_\alpha &= \int_{(i'k')}^{ik} S_{\mu\nu} T_{\nu\alpha} \left[T_{\mu\varrho} \int_0^\sigma p_\varrho(\tau) d\tau - \int_0^\sigma T_{\mu\varrho}(\tau) p_\varrho(\tau) d\tau \right] d\sigma, \end{aligned}$$

dochodzimy do równań

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \omega_\alpha - \omega_\alpha &= A_{\alpha\beta} M_\beta + B_{\alpha\beta} P_\beta + D_\alpha, \\ u_\alpha - u_\alpha &= B_{\beta\alpha} M_\beta + C_{\alpha\beta} P_\beta + E_\alpha. \end{aligned}$$

W zapisie macierzowo-wskaźnikowym równania powyższe przyjmują postać

$$(1.14) \quad \begin{bmatrix} i & k \\ \omega_\alpha - \omega_\alpha \\ i & k \\ u_\alpha - u_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik & ik \\ A_{\alpha\beta} & B_{\alpha\beta} \\ ik & ik \\ B_{\beta\alpha} & C_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ M_\beta \\ ik \\ P_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ik \\ D_\alpha \\ ik \\ E_\alpha \end{bmatrix}.$$

Macierz liczb wpływowych w (1.14) jest zawsze nieosobliwa; odwracając ją i dzieląc na cztery bloki 3×3 ,

$$(1.15) \quad \begin{bmatrix} ik & ik \\ A_{\alpha\beta} & B_{\alpha\beta} \\ ik & ik \\ B_{\beta\alpha} & C_{\alpha\beta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ik & ik \\ U_{\alpha\beta} & V_{\alpha\beta} \\ ik & ik \\ V_{\beta\alpha} & W_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

otrzymujemy związki

$$(1.16) \quad \begin{bmatrix} ik \\ M_\alpha \\ ik \\ P_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik & ik \\ U_{\alpha\beta} & V_{\alpha\beta} \\ ik & ik \\ V_{\beta\alpha} & W_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & k & ik \\ \omega_\beta - \omega_\beta - D_\beta \\ i & k & ik \\ u_\beta - u_\beta - E_\beta \end{bmatrix},$$

które nazwiemy *wzorami przejścia*. Stanowią one będą punkt wyjścia do dalszych rozważań.

2. Zrównoważenie sił i momentów działających na węzły

Z warunków równowagi węzła i

$$(2.1) \quad \sum_k^{ik} M_\alpha = 0, \quad \sum_k^{ik} P_\alpha = 0$$

oraz ze wzorów przejścia otrzymamy

$$(2.2) \quad \sum_k \begin{bmatrix} ik & ik \\ U_{\alpha\beta} & V_{\alpha\beta} \\ ik & ik \\ V_{\beta\alpha} & W_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & k & ik \\ \omega_\beta - \omega_\beta - D_\beta \\ i & k & ik \\ u_\beta - u_\beta - E_\beta \end{bmatrix} = 0.$$

Sumowanie podług wskaźnika k w (2.1) i dalszych relacjach obejmuje wszystkie gałęzie schodzące się w węźle i . Macierz

$$(2.3) \quad \begin{bmatrix} \left[\sum_k^{ik} U_{\alpha\beta} \right] & \left[\sum_k^{ik} V_{\alpha\beta} \right] \\ \left[\sum_k^{ik} V_{\beta\alpha} \right] & \left[\sum_k^{ik} W_{\alpha\beta} \right] \end{bmatrix}$$

nazwiemy macierzą *główną* węzła i .

Nazwijmy *pierwszym przybliżeniem* taki stan rurociągu, w którym wszystkie węzły są nieobracalne, a doznają tylko znanych przesunięć¹. Momenty i siły, które powstaną wtedy w węźle i , wynoszą

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} {}^i M_\alpha \\ {}^i P_\alpha \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} {}^{ik} U_{\alpha\beta} & {}^{ik} V_{\alpha\beta} \\ {}^{ik} V_{\beta\alpha} & {}^{ik} W_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_\beta \\ {}^i u_\beta - u_\beta - E_\beta \end{bmatrix}$$

Suma powyższa jest z reguły różna od zera, tj. nie są spełnione warunki równowagi węzła (2.1).

Założmy, że węzeł i dozna obrotu ${}^i \omega_\beta$ i przesunięcia ${}^i u_\gamma$ przy wykluczeniu pozostałych obrotów i przesunięć układu. Siły P_α i momenty M_α , które powstaną wtedy w węźle, wyniosą (we wzorach (2.5)-(2.11) nie sumować podług β i γ)

$$(2.5) \quad \begin{bmatrix} {}^i M_\alpha \\ {}^i P_\alpha \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} {}^{ik} U_{\alpha\beta} & {}^{ik} V_{\alpha\gamma} \\ {}^{ik} V_{\beta\alpha} & {}^{ik} W_{\alpha\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i \omega_\beta \\ {}^i u_\gamma \end{bmatrix},$$

a w węźle k będą natomiast działały wielkości

$$(2.6) \quad \begin{bmatrix} {}^k M_\alpha \\ {}^k P_\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} {}^{ik} U_{\alpha\beta} & {}^{ik} V_{\alpha\gamma} \\ {}^{ik} V_{\beta\alpha} & {}^{ik} W_{\alpha\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i \omega_\beta \\ {}^i u_\gamma \end{bmatrix}.$$

Jeżeli na węzeł i działa tylko moment M_β (tylko siła P_γ), to odpowiadający mu kąt obrotu ${}^i \omega_\beta$ (przesunięcie ${}^i u_\gamma$) zgodnie z (2.5) wyniesie

$$(2.7) \quad {}^i \omega_\beta = \frac{{}^i M_\beta}{\sum_k {}^{ik} U_{\beta\beta}}, \quad {}^i u_\gamma = \frac{{}^i P_\gamma}{\sum_k {}^{ik} W_{\gamma\gamma}}.$$

¹ Są to przesunięcia wywołane swobodnym rozszerzeniem układu (tj. po usunięciu punktów stałych) wskutek działania temperatury, wzięte ze znakiem przeciwnym.

Związki (2.5) i (2.7) prowadzą do

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} {}^i M_\alpha \\ {}^i P_\alpha \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} \frac{{}^{ik} U_{\alpha\beta}}{{}^{ik}} & \frac{{}^{ik} V_{\alpha\gamma}}{{}^{ik}} \\ \frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{{}^{ik}} & \frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{{}^{ik}} \\ \frac{{}^{ik} V_{\beta\alpha}}{{}^{ik}} & \frac{{}^{ik} W_{\alpha\gamma}}{{}^{ik}} \\ \frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{{}^{ik}} & \frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{{}^{ik}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i M_\beta \\ {}^i P_\gamma \end{bmatrix},$$

natomiast związki (2.6) i (2.7) dają

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} {}^k M_\alpha \\ {}^k P_\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{{}^{ik} U_{\alpha\beta}}{\sum_k \frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{k}} & \frac{{}^{ik} V_{\alpha\gamma}}{\sum_k \frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{k}} \\ \frac{{}^{ik} V_{\beta\alpha}}{\sum_k \frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{k}} & \frac{{}^{ik} W_{\alpha\gamma}}{\sum_k \frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i M_\beta \\ {}^i P_\gamma \end{bmatrix},$$

przy czym wzory (2.8) i (2.9) są prawdziwe, gdy do węzła i zaczepiamy tylko jeden z momentów M_β lub tylko jedną z sił P_γ . Macierze 6×6 , których wyrazy występują w równaniach (2.8) i (2.9)

$$(2.10) \quad \begin{bmatrix} \left[\frac{\sum_k \frac{{}^{ik} U_{\alpha\beta}}{k}}{\frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{k}} \right], & \left[\frac{\sum_k \frac{{}^{ik} V_{\alpha\gamma}}{k}}{\frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{k}} \right] \\ \left[\frac{\sum_k \frac{{}^{ik} V_{\beta\alpha}}{k}}{\frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{k}} \right], & \left[\frac{\sum_k \frac{{}^{ik} W_{\alpha\gamma}}{k}}{\frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{k}} \right] \end{bmatrix},$$

$$(2.11) \quad \begin{bmatrix} \left[\frac{{}^{ik} U_{\alpha\beta}}{\sum_k \frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{k}} \right], & \left[\frac{{}^{ik} V_{\alpha\gamma}}{\sum_k \frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{k}} \right] \\ \left[\frac{{}^{ik} V_{\beta\alpha}}{\sum_k \frac{{}^{ik} U_{\beta\beta}}{k}} \right], & \left[\frac{{}^{ik} W_{\alpha\gamma}}{\sum_k \frac{{}^{ik} W_{\gamma\gamma}}{k}} \right] \end{bmatrix},$$

nazwiemy kolejno: macierzą *rozdziału* (sił i momentów w węźle i na kierunki x_1, x_2, x_3) oraz macierzą *przeniesienia* (sił i momentów z węzła i na węzeł k)².

² Są to w pewnej mierze odpowiedniki tzw. rozdzielników i przekładników w metodzie Crossa, por. [6].

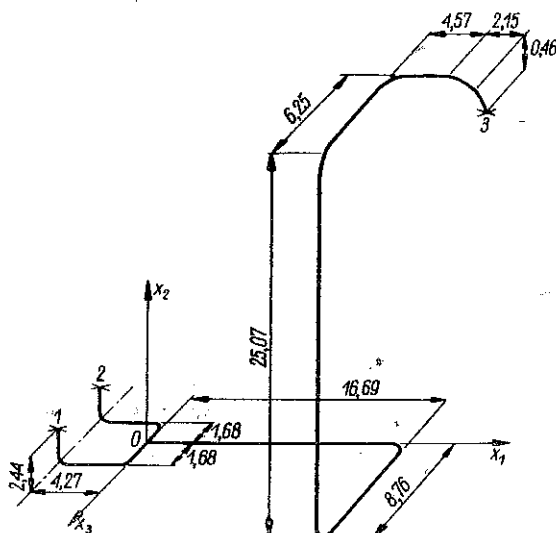
Korzystając z tych macierzy zgodnie z (2.8) i (2.9) działamy na węzły wielkościami równoważącymi momenty i siły otrzymane ze wzoru (2.4). Operację tę przeprowadzamy aż do zrównoważenia wszystkich węzłów rurociągu z żadaną dokładnością. Dzielimy następnie sumę potrzebnych do zrównoważenia węzła i momentów

$\sum_k M_{\alpha}^i$ przez $\sum_k U_{\alpha\alpha}^i$ i sumę sił $\sum_k P_{\alpha}^i$ przez $\sum_k W_{\alpha\alpha}^i$, otrzymamy kąty obrotu i przesunięcia

tego węzła. Ze wzorów przejścia (1.16) obliczamy momenty i siły działające na gałęzi rurociągu, schodzące się w węzle i , a ze wzorów (1.3) i (1.4) siły, momenty, przesunięcia i obroty³ dla dowolnego przekroju rurociągu.

3. Przykład zastosowania

Przy ustaleniu danych wyjściowych do obliczeń przyjmujemy układ współrzędnych o początku w dowolnym punkcie. Dla rurociągu⁴ na rys. 2 początek układu



Rys. 2

znajduje się w węźle. W przyjętym układzie odniesienia obliczamy dla każdej gałęzi osobno wyrazy macierzy $[A_{\alpha\beta}]$, $[B_{\alpha\beta}]$ i $[C_{\alpha\beta}]$ oraz składowe wektorów $[D_{\alpha}]$ i $[E_{\alpha}]$ ⁵. W rozpatrywanym przykładzie, pomijając wpływ sił masowych, przyjęto $D = E = 0$. Macierze liczb wpływowych 6×6 (pomnożone przez sztywność porównawczą) wpisujemy do lewych górnych rogów tablic 1 i 2; na prawo wpisana jest macierz

³ Przy obliczeniu przesunięć i obrotów należy zauważyć, że $\gamma_{\alpha} = -S_{\alpha\beta} M_{\beta}$, co wynika z $\gamma_{\alpha'} = -S_{\alpha'\alpha'} M_{\alpha'}$ (nie sumować podług α').

⁴ Schemat statyczny i dane wyjściowe do przykładu zaczerpnięto z monografii [1] (s. 212 i dalsze tłum. rosyjskiego).

⁵ Zgodnie ze wzorami (1.11) i (1.12). Obliczenia te można także przeprowadzić w oparciu o tablice zawarte w [1] (s. 415-423 tłumaczenia rosyjskiego).

Tablica 1. Wyznaczanie wzorów przejścia dla

	25,93	0	0	0	±39,51	-8,18
	0	25,95	0	∓38,06	0	-60,70
	0	0	24,43	8,15	54,90	0
	0	∓38,06	8,15	74,41	34,73	±101,68
	±39,51	0	54,90	34,73	261,77	∓13,70
	-8,18	60,70	0	±101,68	∓13,70	236,71
	25,93 1	0	0	0	±1,52368	-0,31533
	0	25,05 1	0	∓1,51936	0	2,42327
	0	0	24,43 1	0,33747	2,24678	0
	0	∓38,06	8,15	13,91 1	1,18164	±0,68359
	±39,51	0	54,90	16,44	58,91 1	∓0,21193
	-8,18	-60,70	0	±9,51	∓12,48	76,99 1
P_3						1
P_2					1	
P_1				1		
M_3			1			
M_2		1				
M_1	1					

Tablica 2. Wyznaczenie wzorów

	70,12	0	0,28	7,05	310,53	-714,45
	0	70,70	0	-374,36	0	1079,14
	0,28	0	67,83	722,09	-1033,97	-7,05
	7,05	-374,36	722,09	18372,14	-13083,10	-6565,45
	310,53	0	-1033,97	-13083,10	19768,27	-4198,00
	-714,45	1079,14	-7,05	-6565,45	-4198,00	33328,16
	70,12 1	0	0,00404	0,10059	4,42888	-10,18987
	0	70,70 1	0	-5,29532	0	15,26453
	0,28	0	67,83 1	10,64598	-15,26320	-0,06143
	7,05	-374,36	722,06	8707,46 1	-0,24112	-0,08477
	310,53	0	-1035,22	-2099,53	2105,55 1	-0,60943
	-714,45	1079,14	-4,16	-738,09	-1277,09	8747,63 1
P_3						1
P_2					1	
P_1				1		
M_3			1			
M_2		1				
M_1	1					

gałęzi 0-1 (górne znaki) oraz 0-2 (dolne znaki)

7605,90	0	0	0	0	0	7584,14	
0	7605,90	0	0	0	0	7608,31	
0	0	7605,90	0	0	0	7693,38	
0	0	0	7605,90	0	0	7659,57	
0	0	0	0	7606,90	0	7931,49	
0	0	0	0	0	7605,90	7685,75	
294,47949	0	0	0	0	0	293,64	
0	304,83537	0	0	0	0	304,93	
0	0	312,47811	0	0	0	316,06	
0	±823,89429	-183,02116	584,51222	0	0	-456,91	
∓197,47142	∓232,67964	-240,11955	-153,32915	129,75962	0	167,67	
-0,75157	99,57767	∓16,33237	∓92,73463	±21,04169	99,28603	287,14	
-0,75	99,58	∓16,33	∓92,73	±21,04	99,29	287,14	ω_1
∓197,63	∓211,58	-243,58	-172,98	134,22	±21,04	106,83	ω_2
±234,04	±1015,83	115,93	817,31	-172,98	∓92,73	-395,88	ω_3
±365,84	±136,56	820,87	115,97	-243,58	∓16,33	208,19	u_1
353,63	2088,81	±136,56	∓1015,83	∓211,58	99,58	1602,21	u_2
592,24	353,63	±365,84	∓234,04	∓197,63	-0,75	543,87	u

przejścia dla gałęzi 0-3

7605,90	0	0	0	0	0	7279,43	
0	7605,90	0	0	0	0	8381,38	
0	0	7605,90	0	0	0	7355,08	
0	0	0	7605,90	0	0	6684,27	
0	0	0	0	7605,90	0	9369,63	
0	0	0	0	0	7605,90	30528,25	
108,90006	0	0	0	0	0	104,24	
0	106,01332	0	0	0	0	116,98	
0,45481	0	112,57525	0	0	0	108,44	
-0,05049	4,64268	-9,33388	0,87782	0	0	-3,19	
-16,41004	4,65153	46,25362	0,87949	3,64753	0	39,41	
6,49274	-12,25091	6,01871	0,20248	0,53251	0,87378	2,87	
6,49	-12,25	6,02	0,21	0,54	0,88	2,89	ω_1
-12,45	-2,81	49,92	1,00	3,97	0,54	41,17	ω_2
-2,50	2,92	3,21	1,14	1,00	0,21	6,98	ω_3
-163,42	-74,82	840,40	3,21	49,92	6,02	662,31	u_1
-112,31	310,41	-74,82	2,92	-2,81	-12,25	112,14	u_2
231,07	-112,31	-163,42	-2,50	-12,45	6,49	-52,12	u_3

6×6 , która na głównej przekątnej ma wyrazy równe sztywności porównawczej rurociągu (tj. sztywności przyjętej za jedność przy obliczaniu $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ i $C_{\alpha\beta}$), a pozostałe jej wyrazy są równe zeru. W tablicach tych przeprowadzamy operację (1.15) zgodnie ze schematem zwartym odwracania macierzy ([7], s. 67-70). Prawa kolumna tablicy jest kolumną kontrolną. Należy zauważyć, że kolumna momentów i sił oraz otrzymana macierz 6×6 (złożona z bloków $[U_{\alpha\beta}]$, $[V_{\alpha\beta}]$, $[V_{\beta\alpha}]$ i $[W_{\alpha\beta}]$) są napisane w odwrotnej kolejności wierszy niż we wzorach przejścia (1.16). Występujące po obu stronach tablic 1 i 2 kolumny ułatwiają właściwe odczytanie wzorów przejścia.

W tablicę 3 wpisano macierz główną, obliczoną zgodnie z (2.3). W macierzy tej podkreślono wyrazy leżące na głównej przekątnej (tj. wyrazy $\sum_{k=1}^3 U_{\alpha\alpha}$ i $\sum_{k=1}^3 W_{\alpha\alpha}$).

Tablica 3. Macierz główna układu równań

	Węzeł 0					
	ω_1	ω_2	ω_3	u_1	u_2	u_3
M_1	<u>1421,56</u>	594,94	-163,42	-2,50	-12,45	4,98
M_2	594,94	<u>4488,04</u>	-74,82	2,92	-2,81	186,90
M_3	-163,42	-74,82	<u>2482,13</u>	235,15	-437,23	6,02
P_1	-2,50	2,92	235,15	<u>1635,76</u>	-347,29	0,21
P_2	-12,45	-2,81	-437,23	-347,29	<u>272,41</u>	0,54
P_3	4,98	186,90	6,02	0,21	0,54	<u>199,46</u>

Tablica 4 jest tablicą iteracyjną (przykład zawiera dwie różne wersje tej tablicy: 4.1 i 4.2). Nagłówek tablicy stanowi macierz rozdziału (2.10); otrzymujemy ją dzieląc wyrazy każdej z kolumn macierzy głównej przez wyraz podkreślony, znajdujący się w tej samej kolumnie. Ponieważ w przykładzie obliczany jest rurociąg jednowęzłowy, nie zachodzi potrzeba wprowadzania macierzy przeniesienia (2.11).

Podstawiając do wzorów przejścia poszczególnych gałęzi składowe przesunięć punktów stałych u_1, u_2, u_3 ($i = 1, 2, 3$, pozostałe wyrazy kolumny po prawej stronie wzorów przejścia są równe zeru), otrzymamy momenty i siły przywęzłowe pierwszego przybliżenia. Wpisujemy je do pierwszego wiersza tablicy 5. Następnie sumujemy dla każdego węzła momenty i siły działające wzdłuż kierunków x_1, x_2 i x_3 . Sumy te wpisujemy w pierwszym wierszu tablicy iteracyjnej (pod nagłówkiem).

W jednoetapowym sposobie iteracji (tablica 4.1; podany sposób można uznać za pewną odmianę metody relaksacyjnej) iterujemy wszystkie momenty i siły. Wybierając największą z wielkości w pierwszym wierszu (tj. siłę - 7484) równoważymy ją wielkością przeciwną (tj. +7484). Wielkości równoważące zawsze podkreślamy, a następnie mnożymy przez liczby odpowiedniej kolumny nagłówka (w przykładzie jest to kolumna P_1) wpisując wyniki do drugiego wiersza tablicy 4.1. Największą z występujących teraz wielkości jest $M_3 = -591 + 1069 = 478$. Wpisujemy do

Tablica 4.1. Iteracja momentów i sił działających na węzeł 0 (sposób jednoetapowy)

Węzeł 0						
	M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	P_3
M_1	1,0	0,13280	-0,0656	-0,00152	-0,0455	0,0248
M_2	0,41850	1,0	-0,0301	0,00178	-0,0103	0,930
M_3	-0,11495	-0,01670	1,0	0,1428	-1,605	0,030
P_1	-0,00176	0,00065	0,0945	1,0	-1,273	0,00105
P_2	-0,00375	-0,000627	-0,1760	-0,2109	1,0	0,00269
P_3	0,00350	0,04180	0,00242	0,000128	0,00198	1,0
	-244	-42	-591	-7484	1905	17
	-11	13	1069	7484	-1578	1
	31	14	-478	-45	84	-1
	19	4	660	524	-411	-1
	43	-20	-660	-62	116	-2
	1	-1	-59	417	88	0
	9	2	327	260	-204	0
	18	8	-268	-25	47	-1
	0	0	-33	-235	49	0
	134	58	-15	0	-1	0
	4	1	153	121	-95	0
	0	0	-17	-121	26	0
	6	3	-88	-8	15	0
	2	0	61	52	-41	0
	4	2	-61	-6	11	0
	-10	-80	-1	0	0	-3
	0	0	-5	-38	8	0
	1	0	30	24	-19	0
	2	1	-26	-2	5	0
	0	0	-3	-22	5	0
	0	-9	0	0	0	10
	-11	-5	1	0	0	0
	1	13	0	0	0	0
	0	0	16	13	-10	0
	0	0	-2	-13	3	0
	1	0	-12	-1	2	0
	0	0	8	6	-5	0
	0	0	-8	-1	1	0
	0	0	0	-4	1	0
	-2	-1	0	0	0	0
	0	0	3	2	-2	0
	0	0	-3	0	0	0
	0	0	0	-2	0	0
	0	1	0	0	0	0
	121	-66	-1604	6632	-787	-10
	ω_1	ω_2	ω_3	u_1	u_2	u_3
	0,0851	-0,0147	-0,645	4,06	-2,895	-0,050

Tablica 4.2. Iteracja momentów i sił działających na węzeł 0 (sposób dwuetapowy)

Węzeł 0						
	M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	P_3
M_1	1,0	0,1328	-0,0656	-0,00152	-0,0455	0,0248
M_2	0,4185	1,0	-0,0301	0,00178	-0,0103	0,930
M_3	-0,11495	-0,0167	1,0	0,1428	-1,605	0,030
P_1	-0,00176	0,00065	0,0945	1,0	-1,273	0,00105
P_2	-0,00875	-0,00063	-0,1760	-0,2109	-1,0	0,00269
P_3	0,00350	0,00024	0,00242	0,00013	0,00198	1,0
					$u_2 = 0$	
	-244	-42	-591	-7484	1906	16
	-11	13	1069	7484		1
	31	14	-478	-45		-1
	224	94	-26	0		1
	-11	-79	2	0		-2
	0	0	6	45		0
	-1	0	19	2		0
	0	-14	0	0	-2	-15
	12	5	-2	0	0	0
	1	9	0	0	80	0
	0	0	0	-2	-1588	0
	0	0	2	0	396	0
	-1	0	0	0		0
	235	-70	-457	7527		-15
					$u_2 = 10$	
	-125	-28	-4372	-3473	2724	5
	-287	-132	4372	413		10
	-4	5	437	3060	-4	1
	29	13	-437	-41	0	-1
	387	162	-45	-1	-699	2
	-3	-1	45	4	-654	0
	0	0	5	38	1367	0
	-3	-19	0	0		-1
	0	-15	0	0		-16
	2	15	0	0		0
	0	0	-5	0		0
	4	2	0	0		0
	0	-2	0	0		0
	391	-6	3975	3098		-16
	-113	2	-1153	-899		5
	122	-68	-1610	-6628		-10
	ω_1	ω_2	ω_3	u_1	u_2	u_3
	0,0857	-0,0152	-0,648	4,06	-2,896	-0,050

1367 u_2 + 396 = 0, $u_2 = -0,2896$

trzeciego wiersza kolumny M_3 wielkość równoważącą — 478, podkreślamy ją i mnożymy przez kolejne liczby nagłówka tablicy znajdującej się w kolumnie M_3 . Czynności te powtarzamy aż do otrzymania wielkości zerowych, po czym dodajemy w poszczególnych kolumnach wyrazy podkreślone. Dzieliąc te sumy przez podkreślone wyrazy macierzy głównej danego węzła otrzymujemy składowe obrotu ω_α i przesunięcia u_α tego węzła zgodnie z (2.7) (ostatni wiersz tablicy 4.1).

Tablica 5. Wyznaczenie momentów i sił przywęzłowych

Przekrój 0-1					
M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	P_3
—12462	—46755	—7828	—37619	9069	4284
13320	46418	6739	37510	—9476	—4329
858	—337	—1089	—109	—407	—45
Przekrój 0-2					
M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	P_3
12462	46755	—7828	—37619	9069	—4284
—12408	—46552	6143	37334	—9183	4200
54	203	—1685	—285	—114	—84
Przekrój 0-3					
M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	P_3
—2444	—423	9747	399	916	166
1530	548	—6914	—7	—406	—39
—914	125	2833	392	510	127

Momenty wyrażono w kGm, siły w kG

Dla rurociągu o kilku węzłach wielkości równoważące przenosimy ponadto na sąsiednie węzły. Korzystamy wtedy z macierzy przeniesienia w ten sam sposób jak z nagłówka tablicy iteracyjnej, tj. wielkość równoważącą mnożymy kolejno przez wyrazy odpowiedniej kolumny macierzy przeniesienia, wpisując wyniki w tym samym wierszu tablicy węzła sąsiedniego. Dla ustroju o n węzłach (bez punktów wielokrotnych) należy ułożyć $2n - 2$ macierze przeniesienia.

Jeżeli w niektórych kolumnach macierzy rozdziału występują wyrazy o module większym od jedności, iteracja może stać się wolniej zbieżna. W takich przypadkach wygodnie stosować sposób wieloetapowy wyłączając te kolumny z iteracji (jest to pewne uogólnienie tzw. dwuetapowego postępowania w metodzie Crossa). Przy wyłączeniu m kolumn przeprowadzamy $m+1$ iteracji oraz rozwiązujemy dodatkowo układ m równań o m niewiadomych. Są nimi obroty i przesunięcia odpowiadające wyłączonym kolumnom. W tablicy 4.2 wyłączono z iteracji kolumnę P_2 . Pierwszą iterację przeprowadzono przy $u_2 = 0$, drugą dla $u_2 = 10$. Siły P_2 obliczono po ukończeniu każdej z iteracji otrzymując wielkości +396 oraz +1367. Nie znany przesuw u_2 otrzymano z warunku równowagi rzutów sił na kierunek x_2 : $1376 u_2 + 396 = 0$.

Po określeniu kątów obrotu i przesunięć węzłów (zapisanych u dołu tablic iteracyjnych) podstawiamy ich wartości do wzorów przejścia dla poszczególnych gałęzi (we wzorach tych pomijamy teraz przesunięcia punktów stałych i wyrazy D_α i E_α), wpisując otrzymane wartości do drugiego wiersza tablicy 5. Sumując oba wiersze tej tablicy otrzymamy wielkości momentów i sił przywęzłowych. Kontrolę obliczeń mogą stanowić warunki równowagi węzła (istniejące odchyłki wynikają z zaokrąglenia w trakcie obliczeń). Ze wzorów (1.3) i (1.4) otrzymujemy siły i momenty a następnie przesunięcia i obroty dla dowolnego przekroju rurociągu.

W monografii [1] przeprowadzono obliczenia statyczne powyższego przykładu. Pierwsza wersja obliczeń prowadzi do układu dwunastu równań kanonicznych metody sił; każde równanie zawiera dwanaście niewiadomych. Druga wersja obliczeń (metoda mieszana) wymaga rozwiązywania czterech układów; w każdym układzie występuje sześć równań. Porównanie zarówno jednej jak i drugiej wersji obliczeń ze sposobem macierzowo-iteracyjnym wykazuje większą operatywność tego ostatniego. Należy dodać, że korzyści ze stosowania ujęcia iteracyjnego mogą stać się jeszcze bardziej widoczne w układach wielowęzłowych. I tak np. dla rurociągu trójwęzłowego i ośmiogałęziowego sposób macierzowo-iteracyjny wymaga odwrócenia 8 macierzy 6×6 i przeprowadzenia iteracji. Dla tego samego rurociągu np. metoda sił prowadzi do układu złożonego z trzydziestu równań (każde równanie zawiera z reguły wszystkie niewiadome).

Dodatkowe uwzględnienie w sposobie macierzowo-iteracyjnym podparć pośrednich, przegubów, nierównomiernego wpływu temperatury itp. nie przedstawia większych trudności.

Literatura cytowana w tekście

- [1] The M. W. Kellogg Company, *Design of Piping Systems*, New York-London 1957, tłumaczenie rosyjskie.
- [2] H. JÜRGENSON, *Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau*, Berlin 1953.
- [3] P. CHARRON, *La méthode de Cross*, Paris 1955.
- [4] C. WOŹNIAK, *Metoda macierzowo-iteracyjna obliczania sił kompensacyjnych w rurociągach płaskich*, Sprawozd. z zebrań Oddz. Gliwickiego PTMTS, 7 (1961).
- [5] C. WOŹNIAK, *Integral treatment of bar structures*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961).
- [6] S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN Warszawa 1959.
- [7] W. N. FADDIEJEW, *Metody numeryczne algebry liniowej* (tłumaczenie z rosyjskiego), Warszawa 1955.

Резюме

ИЗ ТЕОРИИ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ САМОКОМПЕНСИРУЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДОВ

В работе анализируется напряженное состояние и перемещения пространственного разветвленного трубопровода. Затем, дается метод определения сил и моментов, вызванных влиянием температуры и непрерывной нагрузкой. Этот метод вводит в статические расчеты итерационные способы уравновешения сил и моментов. Метод иллюстрируется числовым примером.

S u m m a r y

THE STATE OF STRESS AND DISPLACEMENT IN SPATIAL BRANCHED
SELF-COMPENSATING PIPE LINES

The state of stress and displacement in a spatial branched pipe line is analysed. Next, a method is proposed for determining the forces and moments due to the influence of temperature and continuous load. This method introduces in the computation procedure of the pipe line iteration methods for equilibrating forces and moments. The method is illustrated by a numerical example.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1962 r.
