

ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI LAPLACE'A I FUNKCJI SCHODKOWYCH
W TEORII BELEK O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

TADEUSZ IWIŃSKI (WARSZAWA)

Wstęp

Przed dziesięciu laty autor niniejszej pracy opublikował artykuł [1] poświęcony zagadnieniu belek o stałej sztywności; metodę wykładu oparł na transformacji Laplace'a oraz na teorii tzw. funkcji schodkowych¹. Autor powraca obecnie do metod rozwijanych w latach 1953–1955 w pracach [1–4] i przedstawia w artykule niniejszym teorię belek o zmiennym przekroju. Również i w tej pracy rzecz będzie dotyczyła metody, a nie samych zagadnień technicznych, które są od dawna rozwiązane.

Przyjmować będziemy, że czytelnik zna pracę [1] oraz że w razie potrzeby może zajrzeć do innych artykułów cytowanych powyżej. To nas uwalnia od konieczności podawania wielu definicji i terminów, oznaczeń i wzorów dotyczących transformacji Laplace'a i funkcji schodkowych. Teoria tych funkcji jest szczególnie dogodna i dla samej transformacji Laplace'a i dla statyki budowli, gdzie z reguły występują funkcje nieciągłe.

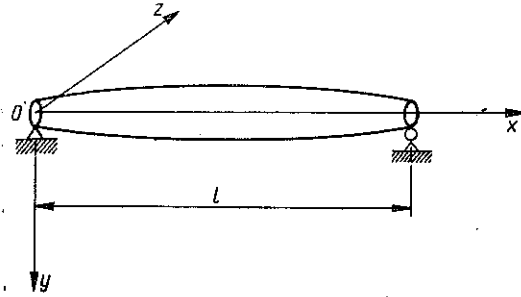
Przy tej okazji pragnęlibyśmy zwrócić uwagę na rozpowszechnienie się we współczesnym piśmiennictwie naukowym z dziedziny teorii sprężystości i plastyczności metod transformacji całkowych, a w szczególności na szerokie stosowanie transformacji Laplace'a. Przodują w tym autorzy polscy, o czym łatwo się przekonać przeglądając prace W. NOWACKIEGO, W. DERSKIEGO, R. HETNARSKIEGO, J. IGNACZAKA, S. KALISKIEGO, Z. MOSSAKOWSKIEJ, W. OLSZAKA Z. PAŃKOWSKIEGO, W. PIECHOCKIEGO, P. PERZYNY, M. SOKOŁOWSKIEGO, M. ŻÓRAWSKIEGO i innych.

1. Równanie linii ugięcia

Niech będzie dana belka o zmiennym przekroju. Zwiążemy z nią układ prostokątnych osi współrzędnych x , y , z (rys. 1). Początek układu znajduje się w środku ciężkości przekroju początkowego (lewego), oś x jest skierowaną wzdłuż osi belki; kierunek osi y i z pokrywa się z kierunkiem głównych środkowych osi bezwładności przekrojów poprzecznych.

¹ Artykuł ten stał się podstawą do wydanej w Anglii w r. 1958 niewielkich rozmiarów książki [5]. Książka ta spotkała się z życzliwym przyjęciem (w przygotowaniu jest drugie, powiększone wydanie oraz wydanie w języku japońskim).

Odsyłając czytelnika do pracy [4], w której podana jest metoda rozwiązywania zagadnienia wyznaczenia linii ugięcia w przypadku, kiedy funkcje opisujące tę linię i jej pierwsza pochodna są nieciągłe, zakładając tutaj będziemy ciągłość obu tych funkcji.



Rys. 1

Na belkę działają obciążenia pionowe złożone z sił skupionych P , momentów skupionych M , obciążenia rozłożonego $q(x)$, dającego się określić za pomocą funkcji schodkowych i momentu rozłożonego $m(x)$ (o takich samych własnościach). Zmienny moment bezwładności oznaczamy symbolem $I(x)$, a sztywność belki na zginanie przez $B(x)$.

Przy tych założeniach zagadnienie na gruncie elementarnej teorii zginania belek sprowadza się, jak wiadomo, do rozwiązania znanego równania różniczkowego linii ugięcia postaci

$$(1.1) \quad y'' = -\frac{M(x)}{B(x)}$$

Bezpośrednio z definicji momentu zginającego otrzymamy:

$$(1.2) \quad M(x) = M_0 - R_0 x - \frac{1}{2!} \sum_i^{n_1} q_i \langle (x - a_i)^2 \rangle_{a_i}^\infty + \frac{1}{2!} \sum_i^{n_1} q_i \langle (x - b_i)^2 \rangle_{b_i}^\infty + \\ + \sum_i^{n_2} m_i \langle x - \alpha_i \rangle_{\alpha_i}^\infty - \sum_i^{n_2} m_i \langle x - \beta_i \rangle_{\beta_i}^\infty - \sum_i^{n_3} P_i \langle x - c_i \rangle_{c_i}^\infty + \sum_i^{n_4} \langle M_i \rangle_{a_i}^\infty - \\ - \int_0^x (x-t) q(t) dt + \int_0^x m(t) dt,$$

gdzie M_0 i R_0 oznaczają odpowiednio moment reakcji i reakcję na lewej podporze.

Po dokonaniu transformacji obu stron równania (1.1) znajdziemy równanie

$$(1.3) \quad s^2 Y(s) - sy_0 - y_0' = -\mathcal{L} \left\{ \frac{M(x)}{B(x)} \right\}.$$

Na podstawie znanych wzorów z zakresu transformacji Laplace'a znajdziemy

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{M(x)}{B(x)} \right\} = M_0 \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \right\} - R_0 \mathcal{L} \left\{ \frac{x}{B(x)} \right\} - \frac{1}{2!} \sum_i^{n_1} q_i \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{(x - a_i)^2}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} + \\ + \frac{1}{2!} \sum_i^{n_1} q_i \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{(x - b_i)^2}{B(x)} \right\rangle_{b_i}^\infty \right\} + \sum_i^{n_2} m_i \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x - \alpha_i}{B(x)} \right\rangle_{\alpha_i}^\infty \right\} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_i^{n_2} m_i \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x - \beta_i}{B(x)} \right\rangle_{\beta_i}^\infty \right\} - \sum_i^{n_3} P_i \left\langle \frac{x - c_i}{B(x)} \right\rangle_{c_i}^\infty + \sum_i^{n_4} M_i \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{1}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} - \\
 & - \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{q(x)\} \right\} \right\} + \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} \{m(x)\} \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Określając transformaty prawej strony równania (1.2), zastąpiliśmy dwie ostatnie całki występujące we wzorze (1.2), na podstawie twierdzenia Borela o splocie² (3.15), przez odpowiednie iloczyny transformat; tak np.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{q(x)\} \right\} = \int_0^x (x - t) q(t) dt.$$

Dzieląc obie strony równania (1.3) przez s^2 oraz stosując do obu stron w ten sposób otrzymanego równania operację \mathcal{L}^{-1} znajdziemy równanie linii ugięcia

$$(1.4) \quad y = y_0 + y'_0 x + M_0 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_2(x) + S(x).$$

Wprowadziliśmy tu następujące oznaczenia:

$$(1.5) \quad \Phi_1(x) = - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \right\} \right\}, \quad \Phi_2(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{x}{B(x)} \right\} \right\},$$

a symbol $S(x)$ oznacza jak w pracy [1] funkcję obciążenia, przy czym w tym przypadku

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad S(x) = & \frac{1}{2!} \sum_i^{n_1} q_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{(x - a_i)^2}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2!} \sum_i^{n_1} q_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{(x - b_i)^2}{B(x)} \right\rangle_{b_i}^\infty \right\} \right\} - \sum_i^{n_2} m_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x - a_i}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} \right\} + \\
 & + \sum_i^{n_2} m_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x - \beta_i}{B(x)} \right\rangle_{\beta_i}^\infty \right\} \right\} + \sum_i^{n_3} P_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x - c_i}{B(x)} \right\rangle_{c_i}^\infty \right\} \right\} - \\
 & - \sum_i^{n_4} M_i \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{1}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{q(x)\} \right\} \right\} \right\} - \\
 & - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} \{m(x)\} \right\} \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Dla rozwiązania zagadnień brzegowych wygodnie jest związać reakcje M_0 i R_0 z wartością pochodnych $y(x)$ w punkcie $x = 0$.

Jak wiadomo definicja siły poprzecznej $Q(x)$ jest następująca:

$$(1.7) \quad Q(x) = R_0 + \sum_i^{n_1} q_i \langle x - a_i \rangle_{a_i}^\infty - \sum_i^{n_1} q_i \langle x - b_i \rangle_{b_i}^\infty + \sum_i^{n_2} \langle P_i \rangle_{c_i}^\infty + \int_0^x q(t) dt,$$

gdzie $q(x)$ może być funkcją schodkową.

² Por. Dodatek w [3].

Z porównania wzorów (1.2) oraz (1.7) znajdziemy następujące zależności:
1) jeśli w obciążeniu nie ma momentu rozłożonego, to

$$(1.8) \quad M'(x) = -Q(x);$$

2) jeśli działa na belkę moment rozłożony $m(x)$, to

$$(1.9) \quad M'(x) = -Q(x) + m(x),$$

przy czym w tym wzorze $m(x)$ oznacza funkcję schodkową określającą cały moment rozłożony (a więc zarówno stały m_i jak i zmienny $m(x)$).

Ze wzorów (1.1), (1.8) i (1.9) wynika, że

$$(1.10) \quad M_0 = -B_0 y_0'',$$

oraz

$$(1.11) \quad R_0 = B_0' y_0'' + B_0 y_0''''.$$

Przy wyprowadzeniu wzorów (1.10) i (1.11) założyliśmy, że $M_0 = M(0)$ oraz $R_0 = Q(0)$, a więc, że przekrój $x = 0$ jest nieobciążony, co odpowiada założeniu $S''(0) = S'''(0) = 0$.

Funkcja obciążenia (1.6) jest uogólnieniem funkcji (2.1.19) podanej w pracy [1] i przechodzi w nią, gdy przyjąć $B(x) = \text{const}$ oraz dopisać wyrazy z dodatkowymi obciążeniami. Podobnie równanie (1.4) jest uogólnieniem równania (2.1.20), przy czym dla $B = B(x)$ funkcja

$$(1.12) \quad W(x) = y_0 + y_0' x + M_0 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_0(x)$$

w ogólnym przypadku już nie jest wielomianem, jak łatwo sprawdzić.

Jak wynika ze wzorów (1.5) funkcje $\Phi_i(x)$ ($i = 1, 2$) nie zależą od obciążenia belki; zależą natomiast od sztywności $B(x) = EI(x)$, a więc (jeśli $E = \text{const}$) od kształtu przekroju belki. Z tego względu funkcje $\Phi_i(x)$ ($i = 1, 2$) nazywać będziemy *funkcjami kształtu*.

Funkcje Φ_i (oraz inne występujące w równaniu (1.6)) w konkretnych przykładach obliczyć możemy posługując się tablicami transformat, co w pewnych przypadkach i przy pewnej wprawie jest czynnością niemal mechaniczną, nie trudniejszą od korzystania z liczbowych tablic matematycznych. W dalszym ciągu podamy przykłady takich obliczeń.

Postać wyrazów występujących w funkcji (1.6) (mimo, że jest dość skomplikowana) formuluje jasny program obliczeń.

Przykład. Obliczmy dla przykładu funkcję obciążenia $S(x)$ dla obciążenia rozłożonego

$$q(x) = \frac{q_0}{l^2} (l-x)^2$$

oraz przy sztywności malejącej parabolicznie

$$B(x) = \frac{B_0}{6l^2} (6l^2 - 4lx + x^2).$$

Program obliczeń w tym przypadku jest następujący:

$$S(x) = \frac{6q_0}{B_0} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{6l^2 - 4lx + x^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{l^2 - 2lx + x^2\} \right\} \right\} \right\}.$$

Mamy tutaj cztery etapy polegające na odczytaniu tablic transformacji Laplace'a, oraz na elementarnych rachunkach:

$$1) \mathcal{L} \{l^2 - 2lx + x^2\} = \frac{l^2}{s} - \frac{2l}{s^2} + \frac{2}{s^3} \quad (3.4),$$

$$2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \left(\frac{l^2}{s} - \frac{2l}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{l^2}{s^3} - \frac{2l}{s^4} + \frac{2}{s^5} \right\} = \\ = \frac{l^2 x^2}{2!} - \frac{2lx^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} = \frac{x^2}{12} (6l^2 - 4lx + x^2) \quad (3.3).$$

$$3) \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} \right\} = \frac{2!}{12s^3} \quad (3.4),$$

$$4) S(x) = \frac{6q_0}{B_0} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{6s^5} \right\} = \frac{6q_0}{B_0} \cdot \frac{x^4}{6 \cdot 4!} = \frac{q_0 x^4}{4! B_0} \quad (3.3).$$

Liczby w nawiasach napisane obok wzorów oznaczają formuły transformacji Laplace'a, na których oparte są poszczególne przekształcenia. Odpowiednie wzory z zakresu transformacji Laplace'a, na których opiera się przeprowadzony rachunek (i przekształcenia w dalszym ciągu pracy), zestawiliśmy w dodatku, punkt 3.

Nie zawsze, oczywiście, obliczenia przebiegają tak łatwo. Trudności powstają w przypadku, gdy tablice transformacji Laplace'a nie zawierają funkcji pojawiających się w obliczeniach. Trudności te można nieraz pokonać opierając się na głębszej znajomości teorii transformacji Laplace'a. Można również dokonać obliczeń przybliżonych zastępując niewygodne funkcje (z punktu widzenia transformacji) innymi funkcjami stanowiącymi przybliżenie pierwszych (jak również innymi sposobami).

Jeśli transformacja zawiedzie, można zadanie wyznaczenia poszukiwanych funkcji przenieść na grunt analizy matematycznej, przepisując wzory z symbolami \mathcal{L} i \mathcal{L}^{-1} w zwykłej postaci analitycznej bez tych symboli. Można tego dokonać dzięki istnieniu wzoru Borela, określającego iloczyn transformat dwóch funkcji. Odpowiednie wzory oznaczyliśmy w tablicach numerami (3.i), $i = 14, 15, \dots, 18$.

Podajemy poniżej zestawienie przekształconych funkcji pozostawiając czytelnikowi wyprowadzenie ich jako łatwe ćwiczenie z teorii transformacji Laplace'a:

$$(1.13) \quad \Phi_1(x) = - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \right\} \right\} = \int_0^x \frac{(x-t) dt}{B(t)},$$

$$(1.14) \quad \Phi_2(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{x}{B(x)} \right\} \right\} = \int_0^x \frac{(x-t) t dt}{B(t)},$$

$$(1.15) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{(x-a_i)^2}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} \right\} = \int_{a_i}^x \frac{(x-t)(t-a_i)^2 dt}{B(t)},$$

$$(1.16) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x-c_i}{B(x)} \right\rangle_{c_i}^\infty \right\} \right\} = \int_{c_i}^x \frac{(x-t)(t-c_i) dt}{B(t)},$$

$$(1.17) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{1}{B(x)} \right\rangle_{a_i}^\infty \right\} \right\} = \int_{a_i}^x \frac{(x-t) dt}{B(t)},$$

$$(1.18) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{q(x)\} \right\} \right\} \right\} = \int_0^x \frac{(x-t)}{B(t)} dt \int_0^t (t-\tau) q(\tau) d\tau,$$

$$(1.19) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{B(x)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} \{m(x)\} \right\} \right\} \right\} = \int_0^x \frac{(x-t)}{B(t)} dt \int_0^t m(\tau) d\tau.$$

Przedstawienie równania linii ugięcia w postaci (1.4) prowadzi do daleko idącego uogólnienia teorii belek o zmiennej sztywności. Istotnie, zwróćmy uwagę, że możemy postępując drogą wskazaną w pracy [1] podać rozwiązania dla poszczególnych przypadków zamocowania belek jedno- i wieloprzęsłowych oraz podać rozwiązania innych zagadnień teorii belek, stosując nieskomplikowane metody matematyczne. Podanie ogólnego rozwiązania dla ustalonego zamocowania belki (ale bez precyzowania obciążenia) daje dużą oszczędność pracy użytej na obliczenia.

Dalszą oszczędność pracy uzyskać można tworząc tablice funkcji kształtu Φ_i ($i = 1, 2$). Ponieważ, jak już powiedzieliśmy, funkcje te nie zależą od funkcji obciążenia $S(x)$ ani od zamocowania belki (tj. nie zależą od y_0, y'_0, M_0 i R_0 i ewentualnie innych reakcji, które wystąpią w przypadku belek wieloprzęsłowych), to istnieje możliwość określenia z góry funkcji Φ_i dla typowych, często występujących w praktyce inżynierskiej kształtów belek i zestawienia katalogu tych funkcji.

Ustalenie postaci funkcji obciążenia $S(x)$ wymaga jednoczesnego uwzględnienia i sztywności $B(x)$ i obciążenia działającego na belkę. Mimo to okazuje się wygodne zestawienie tablic $S(x)$ dla typowych obciążeń i typowych kształtów belek.

Wzory (1.13)–(1.19) wyprowadził Sz. E. MIKELADZE, [6], metodami analizy matematycznej.

2. Linia ugięcia belek jednoprzęsłowych

Dla ilustracji podanej teorii przytoczymy kilka przykładów. Będzie najprościej i dla czytelnika najkorzystniej, jeśli przytoczymy przykłady z pracy [1]. Dzięki temu również stają się zbyteczne szczegółowe wyjaśnienia postępowania, które prowadzi do odpowiednich wzorów.

Przypadek 1. Belka obustronnie doskonale utwierdzona. Warunki brzegowe dla tego typu podparcia mają postać: (1) $y_0 = 0$, (2) $y'_0 = 0$, (3) $y(l) = 0$ i (4) $y'(l) = 0$. Stąd równanie linii ugięcia (1.4) przyjmuje w tym przypadku postać

$$(2.1) \quad y = M_0 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_2(x) + S(x).$$

Warunki (3) i (4) prowadzą do układu równań liniowych na M_0 i R_0 :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} M_0 \Phi_1(l) + R_0 \Phi_2(l) &= -S(l), \\ M_0 \Phi_1'(l) + R_0 \Phi_2'(l) &= -S'(l), \end{aligned}$$

które pozwalają określić reakcje lewostronnego zamocowania:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} M_0 &= -\frac{S(l)\Phi_2'(l) - S'(l)\Phi_2(l)}{\Phi_1(l)\Phi_2'(l) - \Phi_1'(l)\Phi_2(l)}, \\ R_0 &= \frac{S(l)\Phi_1'(l) - S'(l)\Phi_1(l)}{\Phi_1(l)\Phi_2'(l) - \Phi_1'(l)\Phi_2(l)}. \end{aligned}$$

Podając ogólne wzory (2.1)–(2.3) dla belki na obu końcach sztywno zamocowanej sprowadziliśmy zadanie dla sprecyzowanego obciążenia, kształtu i wymiarów do określenia:

- 1) funkcji $S(x)$ na podstawie wzorów (1.6),
- 2) funkcji kształtu $\Phi_i(x)$ ($i = 1, 2$) na podstawie wzorów (1.5) lub (1.13) i (1.14),
- 3) reakcji M_0 i R_0 na podstawie wzorów (2.3).

Czytelnik łatwo sprawdzi, że wzory (2.1)–(2.3) przechodzą we wzory (2.2.2)–(2.2.4) z pracy [1], gdy przyjąć, że $B(x) = \text{const}$.

Przypadek 2. Belka w obu końcach przegubowo podparta. Warunki brzegowe są następujące:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 1) y_0 &= 0, & 3) y(l) &= 0, \\ 2) M_0 &= 0, & 4) M(l) &= 0. \end{aligned}$$

Na podstawie (1.1) warunki powyższe są równoważne warunkom: (1) $y_0 = 0$, (2) $y''_0 = 0$, (3) $y(l) = 0$ i (4) $y''(l) = 0$. Stąd mamy następującą linię ugięcia

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y &= y'_0 x + R_0 \Phi_2(x) + S(x), \\ R_0 &= -\frac{S''(l)}{\Phi_2''(l)}, \\ y'_0 &= -\frac{1}{l} [S(l) + R_0 \Phi_2(l)]. \end{aligned}$$

W tym przypadku mamy do wyznaczenia tylko dwie funkcje: funkcję $S(x)$ i $\Phi_2(x)$; następnie obliczamy stałe R_0 oraz y'_0 .

Dla ilustracji podamy przykład³ (rys. 2). Funkcja $B(x)$ jest funkcją schodkową odcinkami stałą postaci

$$B(x) = \langle B_1 \rangle_0^a + \langle B_2 \rangle_a^c + \langle B_2 \rangle_c^l,$$

³ Przykład został zaczerpnięty z [7], s. 14.

a obciążenie stanowi siła skupiona działająca w punkcie $x = c$ przy czym $a < c$. Na podstawie (1.6)

$$(2.6) \quad S(x) = \frac{P}{B_2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ \langle x - c \rangle \} \right\}.$$

Przedłużając myślowo naszą belkę do ∞ (tj. zastępując we wzorze (2.6) l przez ∞) na podstawie wzoru (3.6) (korzystamy z tego wzoru dwukrotnie), znajdziemy

$$S^*(x) \frac{P}{B_2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-cs}}{s^4} \right\} = \frac{P}{6B_2} \langle (x - c)^3 \rangle_e^\infty.$$

Nas interesuje funkcja $S(x)$ w węższym przedziale, więc

$$(2.7) \quad S(x) = \frac{P}{6B_2} \langle (x - c)^3 \rangle_e'.$$

Powyżej i w dalszych rozważaniach wypadnie niejednokrotnie przedłużać funkcje z przedziału $(0, l)$ na przedział $(0, \infty)$. Jest to postępowanie charakterystyczne dla transformacji Laplace'a w związku z definicją transformaty $F(s)$ jako całki oznaczonej w przedziale nieskończonym. Rygorystyczna ścisłość nakazuje funkcje określone w przedziałach $(0, l)$ i $(0, \infty)$ oznaczać różnymi symbolami. Sygnalizując to dla uniknięcia niejasności będziemy jednak używać jednego symbolu dla funkcji w obu tych przedziałach, co jest wygodne i co przy pewnej wprawie nie prowadzi do nieporozumień.

Jak wynika ze wzorów (2.5) w rozpatrywanym przypadku wystarczy wyznaczyć tylko jedną funkcję kształtu. Na podstawie (1.5)₂ mamy

$$\Phi_2(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x}{B_1} \right\rangle_0^a + \left\langle \frac{x}{B_2} \right\rangle_a' \right\} \right\}.$$

Ze wzoru (3.10) i (3.9) mamy

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \left[\frac{1}{B_1} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{B_2} \left(\frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-ls}}{s^2} - \frac{le^{-ls}}{s} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ograniczając Φ_2 do przedziału $(0, l)$ opuszczamy wszystkie wyrazy, w których występują potęgi e^{-ls} , co po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.8) \quad \beta = \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2}, \quad \alpha = \frac{1}{B_1}$$

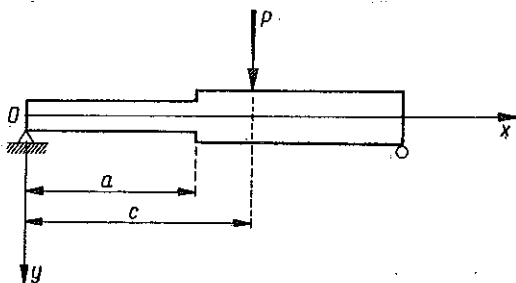
daje

$$\Phi_2(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^4} - \beta \left(\frac{e^{-as}}{s^4} + \frac{a\beta e^{-as}}{s^3} \right) \right\}$$

i w konsekwencji na mocy wzorów (3.3) i (3.6)

$$(2.9) \quad \Phi_2(x) = \frac{\alpha x^3}{6} - \frac{\beta}{6} \langle (x-a)^3 + 3a(x-a)^2 \rangle_a^l.$$

Czytelnik, który podjął pewien trud, aby prześledzić rozumowanie, które doprowadziło do wzoru (2.9), może mieć pewną satysfakcję: funkcja (2.9) przyda mu się do wielu innych zadań, jeśli tylko pojawi się w nich belka kształtu przedstawionego na rys. 2.



Rys. 2

Nasze zadanie zostało rozwiązane. Istotnie, linię ugięcia określa wzór (2.5)₁, a występujące w tym wzorze funkcje $S(x)$ i $\Phi_2(x)$ określają wzory (2.7) i (2.9). Mając te dwie ostatnie funkcje ze wzorów (2.5) znajdziemy

$$(2.10) \quad R_0 = -\frac{P(l-c)}{l},$$

$$y'_0 = \frac{P(l-c)}{6I^2} [aI^3 - \beta(l-a)^3 - 3a\beta(l-a)^2 - l(a-\beta)(l-c)^2].$$

Użycie wzoru (2.5)₂ do obliczenia reakcji R_0 , oczywiście, nie było konieczne. Zagadnienie sformułowane w przypadku 2 jest statycznie wyznaczalne i R_0 można określić wprost z definicji tej wielkości na gruncie statyki.

Jeśli $c < a$, to jest jeśli siła skupiona P działa w punkcie położonym na pierwszej części belki o sztywności B_1 , to dla tego przypadku mamy już zadanie częściowo rozwiązane, mianowicie mamy obliczoną funkcję kształtu $\Phi_2(x)$ według wzoru (2.9).

Obliczamy więc tylko funkcję obciążenia $S(x)$. Na podstawie (1.6)

$$S(x) = P \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x-c}{B(x)} \right\rangle_e^l \right\} \right\} = \frac{P}{B_1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ \langle x-c \rangle_c^a \} \right\} +$$

$$+ \frac{P}{B_2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ \langle x-c \rangle_a^l \} \right\} = \frac{P}{B_1} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} (\mathcal{L} \{ \langle x \rangle_c^a \} - c \mathcal{L} \{ \langle 1 \rangle_c^a \}) \right\} \right] +$$

$$+ \frac{P}{B_2} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} (\mathcal{L} \{ \langle x \rangle_a^l \} - c \mathcal{L} \{ \langle 1 \rangle_a^l \}) \right\} \right].$$

Stosując wzory (3.9) i (3.8) dla obliczenia czterech transformacji oraz wykonując mnożenia przez $1/s^2$ znajdziemy

$$S(x) = \frac{P}{B_1} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-cs}}{s^4} + \frac{ce^{-cs}}{s^3} - \frac{e^{-as}}{s^4} - \frac{ae^{-as}}{s^3} - \frac{ce^{-cs}}{s^3} + \frac{ce^{-as}}{s^3} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{P}{B_2} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{s^4} + \frac{ae^{-as}}{s^3} - \frac{e^{-ls}}{s^4} - \frac{le^{-ls}}{s^3} - \frac{ce^{-as}}{s^3} + \frac{ce^{-ls}}{s^3} \right\} \right].$$

Po dokonaniu widocznych redukcji oraz opuszczeniu wyrazów z potęgami e^{-ls} (jako określającymi funkcję $S(x)$ w nie interesującym nas przedziale (l, ∞)) znajdziemy

$$S(x) = \frac{P}{B_1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-cs}}{s^4} - \frac{e^{-as}}{s^4} - \frac{ae^{-as}}{s^3} + \frac{ce^{-as}}{s^3} \right\} + \\ + \frac{P}{B_2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{s^4} + \frac{ae^{-as}}{s^3} - \frac{ce^{-as}}{s^3} \right\}.$$

Na mocy wzoru (3.6) po prostych przekształceniach i wykorzystaniu oznaczeń (2.8), otrzymamy na funkcję obciążeń następujące wyrażenie:

$$(2.11) \quad S(x) = \frac{P}{6} \{ \alpha \langle (x-c)^3 \rangle_c^l - \beta \langle (x-a)^3 + 3(a-c)(x-a)^2 \rangle_a^l \}.$$

Zadanie nasze w przypadku $c < a$ zostało rozwiązane. Istotnie, mamy określone równanie linii ugięcia (2.5)₁, funkcję kształtu (2.9) oraz funkcję obciążenia (2.11). Na podstawie tych wzorów znajdziemy

$$(2.12) \quad S(l) = \frac{P}{6} [\alpha (l-c)^3 - \beta (l-a)^3 - 3\beta (a-c)(l-a)^2], \\ S''(l) = P(a-\beta)(l-c), \\ \Phi_2(l) = \frac{1}{6} \{ \alpha l^3 - \beta [(l-a)^3 + 3a(l-a)^2] \}, \\ \Phi_2''(l) = (a-\beta)l,$$

a następnie

$$R_0 = -\frac{P(l-c)}{l}, \quad y_0' = -\frac{1}{l} [S(l) + R_0 \Phi_2(l)].$$

Zastosujmy te wzory do przykładu liczbowego⁴ dla następujących danych:

$$c = l/3, \quad a = l/2, \quad B_1 = B, \quad B_2 = 3B.$$

Znajdziemy kolejno następujące wielkości i funkcje:

$$(2.13) \quad R_0 = -\frac{2P}{3}, \quad \alpha = \frac{1}{B}, \quad \beta = \frac{2}{3B}, \\ \Phi_2(l) = \frac{l^3}{9B}, \quad y_0' = \frac{17}{324} \frac{Pl^2}{B}, \\ S(x) = \frac{P}{6B} \left[\left\langle x - \frac{l}{3} \right\rangle_{l/3}^l - \frac{2}{3} \left\langle x - \frac{l}{2} \right\rangle + \frac{l}{2} \left\langle x - \frac{l}{2} \right\rangle_{l/2}^l \right],$$

⁴Przykład zaczerpnięty z pracy [6], s. 43-44.

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \text{[c. d.]} \quad \Phi_2(x) &= \frac{x^3}{6B} - \frac{1}{9B} \left\langle \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + \frac{3l}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \right\rangle_{l/2}^l, \\ y(x) &= \frac{P}{B} \left\{ \frac{17l^2}{324} x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{6} \left\langle \left(x - \frac{l}{3}\right)^3 \right\rangle_{l/3}^l + \left\langle -\frac{1}{27} \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{l}{18} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \right\rangle_{l/2}^l \right\}. \end{aligned}$$

Przypadek 3. Belka jednym końcem swobodnie podparta, a w drugim doskonale utwierdzona.

Alternatywa (a). W tym przypadku mamy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} (1) \quad y_0 &= 0, & (3) \quad y(l) &= 0, \\ (2) \quad M_0 &= 0 \quad \text{lub} \quad y_0'' = 0, & (4) \quad y'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki te prowadzą do następującego układu równań liniowych:

$$\begin{aligned} y_0' l + R_0 \Phi_2(l) &= -S(l), \\ y_0' + R_0 \Phi_2'(l) &= -S'(l). \end{aligned}$$

Stąd równanie linii ugięcia jest następujące:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} y &= y_0' x + R_0 \Phi_2(x) + S(x), \\ y_0' &= \frac{S'(l) \Phi_2(l) - S(l) \Phi_2'(l)}{l \Phi_2'(l) - \Phi_2(l)}, \\ R_0 &= \frac{S(l) - l S'(l)}{l \Phi_2'(l) - \Phi_2(l)}. \end{aligned}$$

Alternatywa (b). Mamy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} (1) \quad y_0 &= 0, & (3) \quad y(l) &= 0, \\ (2) \quad y_0' &= 0, & (4) \quad M(l) &= 0 \quad \text{lub} \quad y''(l) = 0. \end{aligned}$$

Stąd dwie stałe wyznaczymy z układu równań

$$\begin{aligned} M_0 \Phi_1(l) + R_0 \Phi_2(l) &= -S(l), \\ M_0 \Phi_1''(l) + R_0 \Phi_2''(l) &= -S''(l). \end{aligned}$$

Równanie linii ugięcia ma postać

$$(2.15) \quad y = M_0 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_2(x) + S(x),$$

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{S''(l) \Phi_2(l) - S(l) \Phi_2''(l)}{\Phi_1(l) \Phi_2''(l) - \Phi_1''(l) \Phi_2(l)}, \\ R_0 &= \frac{S \Phi_2''(l) - (l) S''(l) \Phi_1(l)}{\Phi_1(l) \Phi_2''(l) - \Phi_1''(l) \Phi_2(l)}. \end{aligned}$$

Przypadek 4. Belka wspornikowa jednym końcem utwierdzona.

Alternatywa (a). W tym przypadku mamy następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} (1) \quad M_0 &= 0, & (3) \quad y(l) &= 0, \\ (2) \quad R_0 &= 0, & (4) \quad y'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Proponujemy czytelnikowi, aby sprawdził, że w tym przypadku otrzymujemy jako rozwiązanie dokładnie wzory (2.2.18) i (2.2.19) z pracy [1], tj. takie jak dla belki o stałej sztywności. Jest to więc szczególnie prosty przypadek, gdyż nie trzeba wyznaczać ani jednej funkcji kształtu $\Phi_i(x)$. Należy jednak pamiętać, że funkcja $S(x)$ w tym przypadku jest inna niż podana w [1], gdyż zależy od sztywności $B(x)$.

Alternatywa (b). Warunki brzegowe przyjmują postać

$$\begin{aligned} (1) \quad y_0 &= 0, & (3) \quad M(l) &= 0, \\ (2) \quad y'_0 &= 0, & (4) \quad R(l) &= 0. \end{aligned}$$

W przypadku belek o zmiennej sztywności warunku (4) nie można zastąpić warunkiem $y'''(l) = 0$. Łatwo jednak wykazać (pozostawiamy to czytelnikowi), że układ dwu warunków (3) i (4) jest równoważny układowi

$$(3') \quad y''(l) = 0, \quad (4') \quad y'''(l) = 0.$$

Te ostatnie warunki w naszej metodzie dadzą się bezpośrednio wykorzystać.

Po tej uwadze łatwo stwierdzimy, że mamy dla rozpatrywanego przypadku układ równań

$$\begin{aligned} M_0 \Phi_1''(l) + R_0 \Phi_2''(l) &= -S''(l), \\ M_0 \Phi_1'''(l) + R_0 \Phi_2'''(l) &= -S'''(l) \end{aligned}$$

oraz równanie linii ugięcia

$$(2.16) \quad y = M_0 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_2(x) + S(x),$$

gdzie

$$M_0 = \frac{S'''(l) \Phi_2''(l) - S''(l) \Phi_2'''(l)}{\Phi_1''(l) \Phi_2'''(l) - \Phi_1'''(l) \Phi_2''(l)}, \quad R_0 = \frac{S''(l) \Phi_1'''(l) - S'''(l) \Phi_1''(l)}{\Phi_1''(l) \Phi_2'''(l) - \Phi_1'''(l) \Phi_2''(l)}.$$

Wzory dla alternatywy (b) warto było wyprowadzić, ale tylko w tym celu, aby w praktyce obliczeniowej nigdy ich nie używać. Są one bowiem (w porównaniu ze wzorami alternatywy (a)) bardziej skomplikowane i obliczenie na nich oparte będzie wymagało znacznie więcej czasu. Należy raczej alternatywę (b) sprowadzić do alternatywy (a) przez umieszczenie początku układu na drugim końcu belki

oraz przez zmianę zwrotu osi Ox . Jest to dobry przykład, jak trafny wybór układu współrzędnych upraszcza obliczenia.

Przypadek 5. Belka wspornikowa. Odsyłając czytelnika do objaśnień podanych w [1] dla analogicznego przypadku, tutaj podajemy jedynie gotowe wzory.

Warunki brzegowe

$$\begin{aligned} (1) \quad y(c) &= 0, & (4) \quad M(l) &= 0, \\ (2) \quad y(d) &= 0, & (5) \quad R_0 &= 0, \\ (3) \quad M_0 &= 0, & (6) \quad R(l) &= 0. \end{aligned}$$

Warunek (4) może być zastąpiony warunkiem (4') $y''(l) = 0$, a warunek (6) (po wykorzystaniu warunku (4')) warunkiem (6') $y'''(l) = 0$.

Z powodu istnienia podpór wewnątrz przedziału $(0, l)$ pojawią się reakcje R_c i R_d , a odpowiednikami ich w równaniu linii ugięcia będą wyrazy

$$R_c \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x-c}{B(x)} \right\rangle_c^\infty \right\} \right\}, \quad R_d \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x-d}{B(x)} \right\rangle_d^\infty \right\} \right\}.$$

Przyjmijmy dwa nowe oznaczenia:

$$\begin{aligned} (2.17) \quad \Phi_{2c}(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x-c}{B(x)} \right\rangle_c^\infty \right\} \right\}, \\ \Phi_{2d}(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{x-d}{B(x)} \right\rangle_d^\infty \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Przy tych oznaczeniach równanie linii ugięcia jest następujące:

$$(2.18) \quad y = y_0 + y'_0 x + R_c \Phi_{2c}(x) + R_d \Phi_{2d}(x) + S(x).$$

Dla wyznaczenia czterech niewiadomych stałych mamy dwa układy równań, z których każdy zawiera tylko dwie niewiadome. Po dokonaniu odpowiednich różniczkowań i wykorzystaniu warunków (4') i (6') znajdziemy

$$\begin{aligned} R_c \Phi_{2c}''(l) + R_d \Phi_{2d}''(l) &= -S''(l), \\ R_c \Phi_{2c}'''(l) + R_d \Phi_{2d}'''(l) &= -S'''(l). \end{aligned}$$

Stąd mamy następujące reakcje:

$$\begin{aligned} (2.19) \quad R_c &= \frac{S'''(l) \Phi_{2d}''(l) - S''(l) \Phi_{2d}'''(l)}{\Phi_{2c}''(l) \Phi_{2d}'''(l) - \Phi_{2c}'''(l) \Phi_{2d}''(l)}, \\ R_d &= \frac{S''(l) \Phi_{2c}'''(l) - S'''(l) \Phi_{2c}''(l)}{\Phi_{2c}''(l) \Phi_{2d}'''(l) - \Phi_{2d}''(l) \Phi_{2c}'''(l)}. \end{aligned}$$

Uwzględnienie warunków (1) i (2) daje układ równań

$$\begin{aligned}y_0 + y'_0 c &= -S_R(c), \\ y_0 &= y'_0 d = -S_R(d),\end{aligned}$$

gdzie symbolem $S_R(x)$ oznaczyliśmy funkcję

$$S_R(x) = R_c \Phi_{2c}(x) + R_d \Phi_{2d}(x) + S(x).$$

Stąd

$$(2.20) \quad y_0 = \frac{dS_R(c) - cS_R(d)}{c - d}, \quad y'_0 = \frac{S_R(d) - S_R(c)}{c - d}.$$

Przypadek 6. Belka w jednym końcu utwierdzona oraz podparta w pewnym punkcie $x = c$.

Warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}(1) \quad y_0 &= 0, & (4) \quad R(l) &= 0, \\ (2) \quad y'_0 &= 0, & (5) \quad y(c) &= 0. \\ (3) \quad M(l) &= 0,\end{aligned}$$

Układ warunków (3) i (4) jest równoważny układowi (3') $y''(l) = 0$, (4') $y'''(l) = 0$.

Przy podobnych oznaczeniach jak w przypadku poprzednim znajdziemy na linię ugięcia równanie

$$(2.21) \quad y = M_0 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_2(x) + R \Phi_{2c}(x) + S(x).$$

Trzy niewiadome M_0 , R_0 i R wyznaczymy z układu równań

$$(2.22) \quad \begin{aligned}M_0 \Phi_1'''(l) + R_0 \Phi_2'''(l) + R \Phi_{2c}'''(l) &= -S'''(l), \\ M_0 \Phi_1(c) + R_0 \Phi_2(c) + R \Phi_{2c}(c) &= -S(c), \\ M_0 \Phi_1''(l) + R_0 \Phi_2''(l) + R \Phi_{2c}''(l) &= -S''(l).\end{aligned}$$

Przypadek 7. Belka w obu końcach przegubowo podparta i obciążona dodatkowo momentami: odpowiednio momentem M_1 i M_2 na lewym i prawym końcu.

Zadanie to rozwiążemy tą samą metodą, jaką zastosowaliśmy w przypadku analogicznym w [1]. A więc przyjmiemy, że w przeszle działa na belkę obciążenie, któremu odpowiada funkcja $S(x)$, oraz dodatkowo dwa momenty M_1 i M_2 odpowiednio w punktach $x = d_1$ i $x = d_2$, przy czym $d_1 \neq 0$ oraz $d_2 \neq l$. Takiemu obciążeniu odpowiada zgodnie ze wzorami (2.5) i (1.6) następujące równanie linii ugięcia:

$$(2.23) \quad y = y'_0 x + R_0 \Phi_2(x) + \bar{S}(x),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= S(x) + M_1 \Phi_{1d_1}(x) + M_2 \Phi_{1d_2}(x), \\ (2.24) \quad R_0 &= -\frac{\bar{S}''(l)}{\Phi_2''(l)}, \\ y'_0 &= -\frac{1}{l} [\bar{S}(l) + R_0 \Phi_2(l)]. \end{aligned}$$

We wzorach tych przyjęliśmy oznaczenia:

$$(2.25) \quad \Phi_{1d_i}(x) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ \left\langle \frac{1}{B(x)} \right\rangle_{d_i}^{\infty} \right\} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Zastąpimy we wzorach powyższych funkcję $\bar{S}(x)$ przez jej trzy składniki na podstawie (2.24)₁. Ze wzoru (3.2) i (1.5)₂ mamy

$$\begin{aligned} \Phi_{1d_i}(x) &= -\left\langle \frac{1}{B(x)} \right\rangle_{d_i}^{\infty}, \quad i = 1, 2; \\ \bar{S}''(l) &= S''(l) - \frac{M_1}{B(l)} - \frac{M_2}{B(l)}, \\ \Phi_2''(l) &= \frac{l}{B(l)}. \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy powyższe wzory oraz dokonamy przejścia granicznego $d_1 \rightarrow 0$, $d_2 \rightarrow l$, to wzory (2.23) i (2.24) przyjmą postać następującą:

$$\begin{aligned} y &= y'_0 x + M_1 \Phi_1(x) + R_0 \Phi_2(x) + S(x), \\ R_0 &= -\frac{1}{l} [B(l) S''(l) - M_1 + M_2], \\ y'_0 &= -\frac{1}{l} [S(l) + M_1 \Phi_1(l) + R_0 \Phi_2(l)]. \end{aligned}$$

Zadanie nasze zostało rozwiązane.

Opierając się na wyprowadzonych wzorach dla przypadków 1-7 oraz stosując do ich wyprowadzenia metody podane w [1] można rozwiązać również inne zagadnienia z teorii belek o zmiennym przekroju, a w szczególności odpowiednie zagadnienie omówione w [1].

Można więc w szczególności wyprowadzić równania linii ugięcia dla belek wieloprzęsłowych i uzyskać rozwiązania dla różnych zagadnień brzegowych, można napisać równania trzech momentów, w których wystąpią wprowadzone przez nas funkcje $S(x)$ i $\Phi(x)$ itd. Pewną zaletą tak zbudowanej teorii jest dość duża jej ogólność oraz jednolitość metody czysto analitycznej. Temat ten jednak wykracza poza ramy tego opracowania.

3. Dodatek

Poniżej zestawiamy tablice transformat Laplace'a, które zostały wykorzystane w pracy.

$$\text{Tablica transformat } \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s)$$

Nr	$F(s)$	$f(x)$
(3.1)	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f(x)\}$
(3.2)	$\frac{1}{s^{n-k}} F(s)$	$\frac{d^k}{dx^k} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^n} F(s) \right\} \right]$
(3.3)	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
(3.4)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	x^n
(3.5)	$e^{-as} F(s)$	$\langle f(x-a) \rangle_a^{\infty}$
(3.6)	$\frac{e^{-as}}{s^n}$	$\left\langle \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right\rangle_a^{\infty}$
(3.7)	$F_1(s) e^{-as} - F_2(s) e^{-bs}$	$\langle f(x) \rangle_a^b, \quad f_1(x) \equiv f(x+a), \quad f_2(x) \equiv f(x+b)$
(3.8)	$\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}$	$\langle 1 \rangle_a^b$
(3.9)	$\frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s^2} - \frac{be^{-bs}}{s}$	$\langle x \rangle_a^b$
(3.10)	$\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s}$	$\langle x \rangle_0^a$
(3.11)	$F(s) [G_1(s) e^{-as} - G_2(s) e^{-bs}]$	$\int_0^x f(x-t) \langle g(t) \rangle_a^b dt; \quad g_1(x) \equiv g(x+a), \quad g_2(x) \equiv g(x+b)$
(3.12)	$\frac{1}{s^n} [G_1(s) e^{-as} - G_2(s) e^{-bs}]$	$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \langle g(t) \rangle_a^b dt$
(3.13)	$F(s) G(s) e^{-as}$	$\int_a^x f(x-t) \langle g(t-a) \rangle_a^{\infty} dt$
(3.14)	$\frac{1}{s^n} G(s) e^{-as}$	$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \langle g(t-a) \rangle_a^{\infty} dt$
(3.15)	$F(s) G(s)$	$\int_0^x f(t) g(x-t) dt \quad \text{lub} \quad \int_0^x f(x-t) g(t) dt$
(3.16)	$\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{g(x)\}$	$\int_0^x (x-t) g(t) dt$
(3.17)	$\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{\langle g(x) \rangle_a^{\infty}\}$	$\int_a^x (x-t) \langle g(t) \rangle_a^{\infty} dt$
(3.18)	$\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left\{f(x) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \mathcal{L}\{g(x)\}\right\}\right\}$	$\int_0^x (x-t) f(t) dt \int_0^x g(\tau) d\tau$

Literatura cytowana w tekście

- [1] T. IWIŃSKI, *O zastosowaniu transformacji Laplace'a do zagadnień statyki budowli*, Arch. Mech. Stos., 1 (1953).
- [2] T. IWIŃSKI, J. NOWIŃSKI, *O transformatach niektórych równań różniczkowych statyki budowli*, Arch. Mech. Stos., 2 (1954).
- [3] T. IWIŃSKI, J. NOWIŃSKI, *Równania sześciu wielkości statycznych dla belki na podłożu niejednorodnym o współczynniku podatności odcinkami stałym*, Arch. Mech. Stos., 3 (1954).
- [4] T. IWIŃSKI, *O nieciągłych rozwiązaniach równań statyki budowli metodą transformacji Laplace'a na przykładzie belki o sztywności odcinkami zmiennej*, Arch. Mech. Stos., 3 (1955).
- [5] T. IWIŃSKI, *Theory of beams*, Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles 1958.
- [6] Ш. Е. Микеладзе, *Некоторые задачи створительной механики*, Москва 1948.
- [7] T. VAN LANGENDONCK, *A função „ressalto” e sua aplicação a problemas da Estática das Construções*, Revista de Engenharia do Rio Grande do Sul, Set.-Dez. 1954.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ
К ТЕОРИИ БАЛОК ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Применяя теорию ступенчатых функций и преобразование Лапласа, автор предлагает метод решения дифференциального уравнения (1.1), выведенного на основе элементарной теории изгиба в задаче, касающейся балки переменной жесткости. Приводятся две формы решения: первая — операторная с помощью формул (1.4)–(1.6), в которой существуют операторы преобразования Лапласа \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} ; вторая — аналитическая без символов \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} , определенная формулами (1.4) и (1.13)–(1.19). Эта вторая форма совпадает с решением Ш. Е. Микеладзе из работы [6].

Дается пример использования операторной формы в решении конкретной интегральной задачи.

Во второй части дается метод решения краевых задач. С помощью этого метода можно решить конкретную краевую задачу без точного определения нагрузки балки. Благодаря этому достигается большая общность и экономия труда, затраченного при статических расчетах в механике сооружений.

Summary

APPLICATION OF THE LAPLACE TRANSFORMATION AND THE THEORY OF STEP
FUNCTIONS IN THE THEORY OF BEAMS OF VARIABLE RIGIDITY

By applying the theory of step functions and the Laplace transformation the author gives a method for solving the differential equation (1.1) derived on the grounds of the elementary bending theory and concerning the problem of a beam of variable rigidity. Two solution methods are described. The first, operational method, is based on Eqs. (1.4) – (1.6) the operators of Laplace transformation, \mathcal{L} and \mathcal{L}^{-1} , being involved. The other method which is analytic (the symbols \mathcal{L} and \mathcal{L}^{-1} being no more used) is based on Eqs. (1.4) and (1.13)–(1.19). The latter method coincides with the solution of SH. E. MIKELADZE, [6].

An example shows how the operational form of solution can be used to solve a particular engineering problem.

In the second part a method is proposed for solving boundary value problems. This method can be used to solve a boundary value problem without precisising the load on the beam. Owing to this considerable generality and economy of labour is obtained in computations of structural mechanics.

INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1964 r.