

## WYBOCZENIE PRĘTÓW SMUKŁYCH PRZY KRÓTKOTRWAŁYM OBCIĄŻENIU

ZBIGNIEW KORDECKI (KRAKÓW)

### Wstęp

W zagadnieniach stateczności sprężystej w ujęciu klasycznym nie jest uwzględniany czynnik czasu. W ujęciu tym rozpatruje się obciążenia o ustalonej i niezmienniej wielkości w czasie. W rozważaniach pomija się zatem sam rozwój obciążenia w czasie, co na ogół jest praktycznie słuszne. Jeżeli jednak obciążenie przykładane jest do konstrukcji szybko i trwa bardzo krótko, to pomijanie czynnika czasu w zagadnieniu wybooczenia nie jest uzasadnione. Wpływ sił bezwładności może być w tych przypadkach znaczny i korzystny, ponieważ przyczynia się do stabilizacji konstrukcji.

Zagadnieniem krótkotrwałego obciążenia ustrojów podlegających wybooczeniu zajmowało się wielu autorów. Pierwszą publikacją w tej dziedzinie była prawdopodobnie praca C. KONINGA i J. TAUBA z 1933 r., w której badano teoretycznie pręt obustronnie przegubowo podparty, poddany obciążeniu siłą podłużną ściskającą o stałej wielkości, działającą przez pewien krótki czas. Stwierdzono, że jeżeli czas trwania obciążenia jest dostatecznie krótki, to pręt doskonale sprężysty, a zatem praktycznie pręt o dostatecznie dużej smukłości, może przenieść siłę znacznie większą od eulerowskiej siły krytycznej.

W ostatnim dwudziestoleciu zagadnieniem tym zajmowano się dosyć dużo ze względu na jego ważność w konstrukcjach lotniczych. Należy tu wymienić przede wszystkim teoretyczne i doświadczalne prace N. J. HOFFA, których celem było między innymi ustalenie związku między maksymalnymi obciążeniami przenoszonymi przez pręty w różnych warunkach doświadczeń laboratoryjnych a siłami krytycznymi obliczonymi według teorii klasycznej. Badając teoretycznie efekt szybkiego obciążania prętów, HOFF przyjmował jako znane nie obciążenie lecz przemieszczenie górnego końca pręta, co jest bliższe prawdy, jeżeli chodzi o pręty ściskane w maszynach wytrzymałościowych.

W niniejszym opracowaniu, którego celem jest badanie wpływu krótkotrwałych obciążeń na elementy podlegające wybooczeniu w rzeczywistych warunkach ich pracy, postąpiono przeciwnie przyjmując obciążenie jako znane. Ograniczono się przy tym do przypadku, kiedy obciążenie jest liniowo zależne od czasu i znika po osiągnięciu pewnej wielkości. Czas trwania obciążenia jest krótki, jednakże

nie jest to obciążenie czysto udarowe. Założenie to pozwala przyjąć, że w każdej chwili we wszystkich przekrojach pręta istnieje jednakowa siła podłużna.

Zagadnienie rozpatrywano w obszarze odkształceń sprężystych i przy stosowaniu teorii ugięć nieskończenie małych. Słuszność stosowania tej teorii jest tu większa ze względu na to, że siły bezwładności wpływają na zmniejszenie ugięć.

Przykładem konstrukcji, która w dostatecznym przybliżeniu spełnia przyjęte założenia, są wieże wyciągowe stosowane w górnictwie. Obciążenie katastrofalne tych wież wywołuje w prętach ustroju duże siły podłużne ściskające i posiada charakter obciążenia krótkotrwałego, gdyż znika po zerwaniu liny wyciągowej. Jego przebieg w czasie można w pierwszym przybliżeniu uważać za liniowy, [6].

Zazwyczaj przyjmuje się, że przy wyboczeniu pręta pod działaniem ciężaru umieszczonego na jego głowicy spełnione jest wymaganie stałości obciążenia. Jak wykazały doświadczenia przeprowadzone przez HOFFA w Brooklyńskim Instytucie Politechnicznym, stałym jest jedynie kierunek obciążenia, natomiast jego wielkość ulega zmianie na skutek działania sił bezwładności. Kiedy pręt traci stateczność, jego głowica obniża się, a bezwładność ciężaru nie pozwala nadążyć mu za tym ruchem. W konsekwencji obciążenie pręta zmniejsza się.

W przypadku katastrofalnego obciążenia wież wyciągowych zjawisko to praktycznie nie istnieje, ponieważ siły przekazywane są na konstrukcje za pośrednictwem liny wyciągowej. Lina spełnia tu rolę sprężyny, której podatność jest na tyle duża, że ruch głowicy pręta przy jego wyboczeniu praktycznie nie zmienia wielkości siły w linie.

Poniżej podajemy oznaczenia nie objaśnione w tekście.

- $E$  moduł Younga,
- $I$  moment bezwładności przekroju pręta,
- $P$  siła podłużna ściskająca,
- $P_E$  eulerowska siła krytyczna,
- $T$  funkcja czasu określająca przemieszczenie pręta,
- $a$  przyrost obciążenia w jednostce czasu,
- $c_i, c_n$  współczynniki szeregu przedstawiającego  $y_0(x)$ ,
- $l$  długość pręta,
- $m$  masa na jednostkę długości pręta,
- $t$  czas,
- $x$  współrzędna wzdłuż osi pręta,
- $y$  przemieszczenie poprzeczne punktów osi pręta,
- $y_0$  początkowe odchylenia osi pręta od prostej,
- $\delta_{in}, \delta_{ik}$  symbole Kroneckera,
- $\varphi(x)$  funkcja własna zagadnienia drgań poprzecznych,
- $\psi(x)$  funkcja własna zagadnienia stateczności.

## 1. Pręt obustronnie swobodnie podparty

Rozpatruje się pręt sprężysty przyrzątkowy, obustronnie swobodnie podparty, o masie równomiernie rozłożonej na jego długości. Równanie ruchu oraz odpowiednie warunki brzegowe i początkowe są następujące:

$$EIy^{IV} - EIy_0^{IV} + P(t)y'' + m\ddot{y} = 0;$$

$$(1.1) \quad y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad y'(0, t) = 0, \quad y'(l, t) = 0;$$

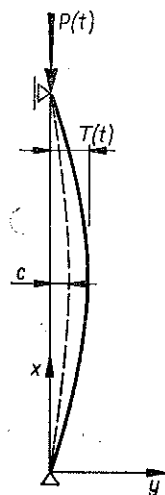
$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \dot{y}(x, 0) = 0.$$

Różniczkowanie względem  $x$  oznaczono tutaj cyframi rzymskimi, a względem  $t$  punktami. Rozwiązanie oraz początkowe ugięcie pręta przedstawiono w postaci szeregów

$$(1.2) \quad y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) T_n(t), \quad y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Po podstawieniu do (1.1) otrzymamy

$$(1.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (EI\varphi_n^{IV} T_n - EIc_n \varphi_n^{IV} + P(t)\varphi_n'' T_n + m\varphi_n \ddot{T}_n) = 0.$$



Rys. 1

W rozpatrywanym przypadku pręta obustronnie swobodnie podpartego funkcja sinus spełnia warunki brzegowe oraz równocześnie równanie zagadnienia małych drgań poprzecznych i równanie zagadnienia stateczności statycznej. Jeżeli zatem przyjąć

$$(1.4) \quad \varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l},$$

to

$$(1.5) \quad \varphi_n^{IV} = \lambda_n^4 \varphi_n, \quad \varphi_n'' = -\lambda_n^2 \varphi_n,$$

gdzie  $\lambda_n = n\pi/l$ .

Podstawiając do (1.3) otrzymujemy

$$(1.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (EI\lambda_n^4 T_n - EI\lambda_n^4 c_n - P(t)\lambda_n^2 T_n + m\ddot{T}_n) \varphi_n = 0.$$

Równanie to będzie spełnione, jeżeli

$$EI\lambda_n^4 T_n - EI\lambda_n^4 c_n - P(t)\lambda_n^2 T_n + m\ddot{T}_n = 0.$$

Po przekształceniach i przy oznaczeniu  $n^2 \pi^2 EI/l^2 = P_{E,n}$  znajdziemy

$$(1.7) \quad \ddot{T}_n + \frac{n^2 \pi^2 P_{E,n}}{m l^2} \left[ \left( 1 - \frac{P(t)}{P_{E,n}} \right) T_n - c_n \right] = 0.$$

W przypadku obciążenia siłą rosnącą, liniowo zależą od czasu

$$(1.8) \quad P(t) = at,$$

można wprowadzić zmienną bezwymiarową

$$(1.9) \quad z = 1 - \frac{P(t)}{P_{E,n}} = 1 - \frac{at}{P_{E,n}}.$$

Wtedy

$$\ddot{T}_n = \frac{d^2 T_n}{dt^2} = \frac{d^2 T}{dz^2} \frac{a^2}{P_{E,n}^2}.$$

Oznaczając ponownie punktami różniczkowanie względem «bezwymiarowego czasu»  $z$ , otrzymujemy

$$(1.10) \quad \ddot{T}_n + \frac{n^2 \pi^2 P_{E,n}^3}{ml^2 a^2} (z T_n - c_n) = 0.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(1.11) \quad \frac{n^2 \pi^2 P_{E,n}^3}{ml^2 a^2} = \Omega_n$$

mamy

$$(1.12) \quad \ddot{T}_n + \Omega_n (z T_n - c_n) = 0.$$

Współczynnik  $\Omega_n$  jest wielkością charakteryzującą zagadnienie pod względem dynamicznym. Ze wzrostem tego współczynnika maleje wpływ sił bezwładności w procesie wyboczenia. Współczynnik ten zależy w pierwszym rzędzie od smukłości pręta i od wielkości  $a$  charakteryzującej szybkość przyrostu obciążenia.

Dla zastrzałów stalowych wież wyciągowych ze stali o granicy plastyczności  $Q_r = 2500 \text{ kG/cm}^2$  współczynnik  $\Omega_1$  waha się w przybliżeniu od 400 do 1500, [6].

Równanie (1.12) jest formalnie identyczne z tym, jakie uzyskał HOFF, [4], po zlinearyzowaniu równania wyprowadzonego dla zagadnienia pręta smukłego obciążanego w prasie, której głowica przemieszcza się szybkim i jednostajnym ruchem.

## 2. Przypadek dowolnych warunków brzegowych

Rozpatrzony poprzednio pręt obustronnie swobodnie podparty stanowi przypadek szczególny. Prostota jego wynika z identyczności funkcji własnych małych drgań poprzecznych i funkcji własnych utraty stateczności. Przy dowolnych warunkach brzegowych spotykanych w ustrojach budowlanych identyczność ta nie istnieje.

Do szeregów (1.2) można wtedy wprowadzić jako funkcje miejsca albo formy drgań własnych, albo też formy utraty stateczności statycznej. W tym drugim przypadku będzie

$$(2.1) \quad y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) \bar{\psi}_i(x), \quad y_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{\psi}_i(x).$$

Wprowadzono tu znormowane funkcje własne zagadnienia stateczności statycznej

$$(2.2) \quad \int_0^l \bar{\psi}'_i \bar{\psi}'_k dx = \delta_{ik}.$$

Po podstawieniu (2.1) do (1.1)<sub>1</sub> otrzymuje się

$$EI \sum_{i=1}^{\infty} T_i \bar{\psi}_i^{IV} - EI \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{\psi}_i^{IV} + P(t) \sum_{i=1}^{\infty} T_i \bar{\psi}_i'' + m \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{T}_i \bar{\psi}_i = 0.$$

Mnożąc całe równanie przez  $\bar{\psi}_n$  i całkując od 0 do  $l$  przy uwzględnieniu, że  $\bar{\psi}_i^{IV} = = -\alpha_i^2 \bar{\psi}_i''$ , gdzie  $\alpha_i$  oznacza pierwiastki równania charakterystycznego zagadnienia stateczności, otrzymujemy

$$(2.3) \quad -EI \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 T_i \int_0^l \bar{\psi}_i'' \bar{\psi}_n dx + EI \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 c_i \int_0^l \bar{\psi}_i'' \bar{\psi}_n dx + \\ + P(t) \sum_{i=1}^{\infty} T_i \int_0^l \bar{\psi}_i'' \bar{\psi}_n dx + m \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{T}_i \int_0^l \bar{\psi}_i \bar{\psi}_n dx = 0.$$

Całkowanie przez części daje

$$(2.4) \quad \int_0^l \bar{\psi}_i'' \bar{\psi}_n dx = \bar{\psi}_i' \bar{\psi}_n \Big|_0^l - \int_0^l \bar{\psi}_i' \bar{\psi}_n' dx = - \int_0^l \bar{\psi}_i' \bar{\psi}_n' dx = -\delta_{in},$$

ponieważ:  $[\bar{\psi}_i' \bar{\psi}_n]_0^l = 0$  przy dowolnych warunkach podparcia końców pręta (również dla swobodnego końca pręta, jak można wykazać).

Po podstawieniu (2.4) do (2.3) mamy

$$(2.5) \quad EI \alpha_n^2 T_n - EI \alpha_n^2 c_n - P(t) T_n + m \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{T}_i \int_0^l \bar{\psi}_n \bar{\psi}_i dx = 0.$$

Jeżeli początkowe wychylenie pręta  $y_0(x)$  jest zgodne z podstawową formą utraty stateczności (odpowiadającą pierwszej sile krytycznej), to wszystkie  $c_n$  z wyjątkiem  $c_1$  są równe zero. Dla celów praktycznych wystarczy wtedy ograniczyć się do pierwszego przybliżenia pomijając wszystkie  $T_i$  z wyjątkiem  $T_1$ . Z układu równań (2.5) otrzymamy wtedy jedno równanie

$$EI \alpha_1^2 T_1 - EI \alpha_1^2 c_1 - P(t) T_1 + m \ddot{T}_1 \int_0^l \bar{\psi}_1^2 dx = 0,$$

które po przekształceniach i po opuszczeniu wskaźników, przyjmuje postać

$$(2.6) \quad \ddot{T} + \frac{\alpha^2 EI}{m \int_0^l \bar{\psi}^2 dx} \left[ \left( 1 - \frac{P(t)}{\alpha^2 EI} \right) T - c \right] = 0.$$

Jeżeli obciążenie  $P(t)$  jest liniowo zależne od czasu zgodnie z (1.8), to jako zmienną niezależną wygodnie jest wprowadzić bezwymiarowy czas według (1.9). Po uwzględnieniu, że  $a^2 EI = P_E$ , otrzymujemy

$$(2.7) \quad \ddot{T} + \Omega [zT - c] = 0,$$

gdzie punktami oznaczono różniczkowanie względem bezwymiarowego czasu  $z$ , a współczynnik

$$(2.8) \quad \Omega = \frac{P_E^3}{a^2 m \int_0^l \bar{\varphi}^2 dx}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla pręta obustronnie swobodnie podpartego wzór (2.8) jest identyczny ze wzorem (1.11).

Jak wynika z powyższych rozważań, w przypadku gdy początkowe wycięcie pręta posiada kształt podstawowej formy utraty stateczności, ruch poprzeczny osi pręta można opisać jedną funkcją czasu określoną za pomocą równania (2.7). Dla pręta obustronnie przegubowego będzie to opis ścisły (w zakresie małych ugięć), a dla prętów z innymi warunkami brzegowymi opis jedynie przybliżony. W przyjęciu kształtu początkowego wygięcia jest naturalnie dużo dowolności, szczególnie jeżeli ugięcie to powstało na skutek niedokładności wykonawstwa. Niemniej jednak założenie wygięcia sinusoidalnego, mające już w literaturze technicznej bogatą tradycję, tłumaczy się nie tylko wynikającymi z niego ułatwieniami rachunkowymi, ale również jest wynikiem ogólniejszych rozważań i obserwacji, [7].

Jak wspomniano wyżej, rozpatrywane zagadnienie przy dowolnych warunkach brzegowych można rozwiązać przyjmując w rozwinięciach (2.1) formy drgań własnych. Zamiast układu (2.5) dostaje się wtedy

$$(2.9) \quad EI \lambda_n^4 T_n - EI \lambda_n^4 c_n - P(t) \sum_{i=1}^{\infty} T_i \int_0^l \bar{\varphi}_n' \bar{\varphi}_i' dx + m \ddot{T}_n = 0,$$

gdzie  $\lambda_n$  są pierwiastkami równania charakterystycznego zagadnienia drgań własnych.

W przybliżeniu

$$(2.10) \quad \ddot{T}_1 + \frac{\lambda_1^4 EI}{m} \left[ \left( 1 - \frac{P(t)}{\lambda_1^4 EI} \right) T_1 - c_1 \right] = 0.$$

W ogólnym przypadku warunków brzegowych współczynniki liczbowe równania (2.10) różnią się nieco od współczynników równania (2.6). Dla praktycznych obliczeń różnica ta jest bez znaczenia i posługiwanie się obu równaniami prowadzi do tych samych wyników.

## 3. Rozwiązanie równania (2.7)

Równanie (2.7) zawierające nieznaną funkcję czasu jest niejednorodnym równaniem Bessela, [5]. Jego ogólne rozwiązanie ma postać

$$(3.1) \quad T = z^{1/2} \left[ C_1 J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) + C_2 J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) + S(z) \right].$$

Funkcja  $S(z)$  jest całką szczególną równania (2.7) i może być znaleziona metodą wariacji stałych. Wyraża się ona przez funkcje Bessela:

$$(3.2) \quad S(z) = \frac{2\pi c \Omega}{3\sqrt{3}} \left[ J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) \int_0^z s^{1/2} J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} \right) ds - \right. \\ \left. - J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) \int_0^z s^{1/2} J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} \right) ds \right]$$

przy warunkach początkowych

$$(3.3) \quad T(1) = c, \quad \dot{T}(1) = 0,$$

stałe  $C_1$  i  $C_2$  wyniosą

$$(3.4) \quad C_1 = c \left[ -\frac{2\pi\Omega}{3\sqrt{3}} \int_0^1 s^{1/2} J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} \right) ds + \frac{2\pi\Omega^{1/2}}{3\sqrt{3}} J_{2/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} \right) \right], \\ C_2 = c \left[ \frac{2\pi\Omega}{3\sqrt{3}} \int_0^1 s^{1/2} J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} \right) ds + \frac{2\pi\Omega^{1/2}}{3\sqrt{3}} J_{-2/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} \right) \right].$$

Oznaczając

$$(3.5) \quad \frac{2}{3} \Omega^{1/2} = M, \quad \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} = \eta$$

oraz uwzględniając, że

$$\Omega^{1/2} \int_0^1 s^{1/2} J_\nu \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} \right) ds = \int_0^M J_\nu(\eta) d\eta, \\ \Omega^{1/2} \int_0^z s^{1/2} J_\nu \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} s^{3/2} \right) ds = \int_0^{Mz^{3/2}} J_\nu(\eta) d\eta,$$

dochodzi się do następującego wzoru:

$$(3.6) \quad T = \frac{2\pi\Omega^{1/2} c}{3\sqrt{3}} z^{1/2} \left\{ \left[ -\int_0^M J_{-1/3}(\eta) d\eta + J_{2/3}(M) + \int_0^{Mz^{3/2}} J_{-1/3}(\eta) d\eta \right] \times \right. \\ \left. \times J_{1/3}(Mz^{3/2}) + \left[ \int_0^M J_{1/3}(\eta) d\eta + J_{-2/3}(M) - \int_0^{Mz^{3/2}} J_{1/3}(\eta) d\eta \right] J_{-1/3}(Mz^{3/2}) \right\}.$$

Różniczkowanie względem zmiennej  $z$  daje

$$(3.7) \quad \dot{T} = \frac{2\pi\Omega c}{3\sqrt{3}} z \left\{ \left[ - \int_0^M J_{-1/3}(\eta) d\eta + J_{2/3}(M) + \int_0^{Mz^{3/2}} J_{-1/3}(\eta) d\eta \right] \times \right. \\ \left. \times J_{-2/3}(Mz^{3/2}) - \left[ \int_0^M J_{1/3}(\eta) d\eta + J_{-2/3}(M) - \int_0^{Mz^{3/2}} J_{1/3}(\eta) d\eta \right] J_{2/3}(Mz^{3/2}) \right\}.$$

Wzory (3.6) i (3.7) pozwalają w zasadzie na wyznaczenie wartości funkcji  $T(z)$  w obszarze podkrytycznym. Korzystanie z tych wzorów jest jednak kłopotliwe, szczególnie ze względu na konieczność obliczania całek oznaczonych. Na rysunku 2 podano wykres  $T(z)$  dla przypadku  $\Omega = 2000$  i dla zmiennej niezależnej przebiegającej wartości od 1,0 do 0,3. Jest to linia stale wznosząca się, lekko falista. To sfalowanie pochodzi od drgań o małej amplitudzie, nakładających się na ruch pręta spowodowany obciążeniem działającym statycznie.

Dla pewnych wartości współczynnika  $\Omega$  i w pewnych obszarach zmienności  $z$  równanie (3.6) można uprościć.

Dla dużych  $M$  (dużych  $\Omega$ ), możemy przyjąć

$$(3.8) \quad - \int_0^M J_{-1/3}(\eta) d\eta + J_{2/3}(M) \approx -1, \\ \int_0^M J_{1/3}(\eta) d\eta + J_{-2/3}(M) \approx 1.$$

Aby to wykazać, należy funkcje Bessela wyrazić przez ich rozwinięcie asymptotyczne. Zachowując jedynie pierwszy wyraz otrzymujemy

$$- \int_0^{M_\infty} J_{-1/3}(\eta) d\eta = - \left[ \int_0^\infty J_{-1/3}(\eta) d\eta - \int_M^\infty J_{-1/3}(\eta) d\eta \right] = -1 + \int_M^\infty J_{-1/3}(\eta) d\eta \approx \\ \approx -1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \cos \frac{\pi}{12} \int_M^\infty \eta^{-1/2} \cos \eta d\eta + \sin \frac{\pi}{12} \int_M^\infty \eta^{-1/2} \sin \eta d\eta \right].$$

Podstawiając  $\eta = u^2$  znajdziemy

$$- \int_0^M J_{-1/3}(\eta) d\eta = -1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \cos \frac{\pi}{12} \int_{M^{1/2}}^\infty 2 \cos(u^2) du + \sin \frac{\pi}{12} \int_{M^{1/2}}^\infty 2 \sin(u^2) du \right],$$



a uwzględniając, [2], że

$$2 \int_{M^{1/2}}^{\infty} \cos(u^2) du \approx -\frac{\sin M}{M^{1/2}}, \quad 2 \int_{M^{1/2}}^{\infty} \sin(u^2) du \approx \frac{\cos M}{M^{1/2}},$$

znajdziemy

$$(3.9) \quad - \int_0^M J_{-1/3}(\eta) d\eta \approx -1 + \sqrt{\frac{2}{\pi M}} \left[ -\cos \frac{\pi}{12} \sin M + \sin \frac{\pi}{12} \cos M \right].$$

Podobnie rozwinięcie asymptotyczne z zachowaniem tylko pierwszego wyrazu daje

$$(3.10) \quad J_{2/3}(M) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi M}} \left[ \cos \frac{7\pi}{12} \cos M + \sin \frac{7\pi}{12} \sin M \right].$$

Dodając (3.9) do (3.10) otrzymamy

$$- \int_0^M J_{-1/3}(\eta) d\eta + J_{2/3}(M) \approx -1.$$

Podobnie można dowieść słuszności drugiego ze wzorów (3.8).

Jeżeli uwzględni się dwa wyrazy rozwinięć asymptotycznych, to znajdziemy

$$\int_0^M J_{1/3}(\eta) d\eta + J_{-2/3}(M) \approx 1 - \frac{23}{36} \sqrt{\frac{2}{\pi}} M^{-3/2} \left( \sin \frac{5\pi}{12} \sin M + \cos \frac{5\pi}{12} \cos M \right).$$

I tak np. dla  $\Omega = 100$ , zamiast jedności otrzymamy

$$1 - \frac{23}{36} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 6,66^{-3/2} [0,965 \cdot 0,373 + 0,263 \cdot 0,928] = 1 - 0,018.$$

Dla  $\Omega = 10$

$$1 - \frac{23}{36} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2,11^{-3/2} [0,965 \cdot 0,858 + 0,263 \cdot (-0,513)] = 1 - 0,116.$$

Widać, że błąd założenia (3.8) nie jest wielki nawet w przypadku niezbyt wielkich  $\Omega$ .

Zamiast wzorów (3.6) i (3.7) otrzymuje się zatem prostsze wyrażenia, praktycznie słuszne, o ile tylko współczynnik  $\Omega$  nie jest zbyt mały:

$$(3.11) \quad T = \frac{2\pi\Omega^{1/2}c}{3\sqrt{3}} z^{1/2} \left\{ \left[ -1 + \int_0^{Mz^{3/2}} J_{-1/3}(\eta) d\eta \right] J_{1/3}(Mz^{3/2}) + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \int_0^{Mz^{3/2}} J_{1/3}(\eta) d\eta \right] J_{-1/3}(Mz^{3/2}) \right\},$$

$$(3.11) \quad \dot{T} = \frac{2\pi\Omega c}{3\sqrt{3}} z \left\{ \left[ -1 + \int_0^{Mz^{3/2}} J_{-1/3}(\eta) d\eta \right] J_{-2/3}(Mz^{3/2}) + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \int_0^{Mz^{3/2}} J_{1/3}(\eta) d\eta \right] J_{2/3}(Mz^{2/3}) \right\}.$$

Jeżeli ponadto wartości  $Mz^{3/2}$  są duże, to i do pozostałych wyrazów wzoru (3.11), można stosować rozłożenia asymptotyczne. Ograniczając dokładność do pierwszego wyrazu otrzymujemy

$$\int_0^{Mz^{3/2}} J_{-1/3}(\eta) d\eta \approx 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi Mz^{3/2}}} [A \cos(Mz^{3/2}) - B \sin(Mz^{3/2})],$$

$$\int_0^{Mz^{3/2}} J_{1/3}(\eta) d\eta \approx 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi Mz^{3/2}}} [B \cos(Mz^{3/2}) - A \sin(Mz^{3/2})],$$

$$J_{1/3}(Mz^{3/2}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Mz^{3/2}}} [A \cos(Mz^{3/2}) + B \sin(Mz^{3/2})],$$

$$J_{-1/3}(Mz^{3/2}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Mz^{3/2}}} [B \cos(Mz^{3/2}) + A \sin(Mz^{3/2})],$$

gdzie

$$A = \sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{12}, \quad B = \cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Podstawienie do wzoru (3.11) daje po prostych przekształceniach

$$T \approx (B^2 - A^2) \frac{2}{\sqrt{3}} z^{-1} c,$$

ponieważ

$$B^2 - A^2 = \sin^2 \frac{5\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(3.12) \quad T \approx \frac{c}{z}.$$

Wzór (3.12) można uzyskać wprost z równania (2.7), jeżeli pominąć w nim wpływ sił bezwładności i przyjąć  $\ddot{T} = 0$ .

Z rozważań powyższych wynika, że dla dużych  $Mz^{3/2}$ , czyli w pierwszej fazie obciążenia pręta, kiedy siła nie jest jeszcze bliska wartości eulerowskiej, wykres funkcji  $T(z)$  mało się różni od wykresu przy obciążeniu działającym statycznie. Inaczej mówiąc, w początkowej fazie dynamicznego obciążenia pręta wpływ sił bezwładności na przemieszczenia jest mały.

Szczególne uproszczenie wzorów (3.11) można uzyskać w punkcie  $z = 0$ , tj. w chwili, gdy obciążenie osiąga wartość siły eulerowskiej. Ponieważ

$$J_{1/3}(0) = J_{2/3}(0) = 0,$$

zatem w nawiasie wzoru (3.11)<sub>1</sub> pozostanie jedynie funkcja Bessela z indeksem  $-1/3$ , a w nawiasie wzoru (3.11)<sub>2</sub> także funkcja z indeksem  $-2/3$ . Po rozwinięciu tych funkcji w szeregi według wzrastających potęg argumentu i po pomnożeniu tych szeregów przez czynniki zewnętrzne:  $z^{1/2}$  lub  $z$ , okazuje się, że w obu szeregach wszystkie wyrazy z wyjątkiem pierwszych przyjmują wartość zera. Otrzymuje się wtedy bardzo proste wzory

$$(3.13) \quad T(0) = T_0 = \frac{2\pi \sqrt[3]{3}}{3 \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \Omega^{1/3} c = 1,288 \Omega^{1/3} c,$$

$$\dot{T}(0) = \dot{T}_0 = -\frac{2\pi \sqrt[3]{9}}{3 \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \Omega^{2/3} c = -0,936 \Omega^{2/3} c.$$

Dokładność tych wzorów rośnie ze wzrostem współczynnika  $\Omega$ . Z porównania wyników podanych przez HOFFA in. w pracy [4] wynika, że wzór (3.13)<sub>1</sub> daje wyniki z błędem przez nadmiar. Dla  $\Omega = 10$  błąd wynosi około 15% wartości dokładnej. Dla  $\Omega = 100$  błąd maleje do około 1%, a dla większych  $\Omega$  jest znikomo mały.

Jeżeli siła przekroczy wartość eulerowską, to zmienna  $z$  przyjmuje wartości ujemne. Aby tego uniknąć należy dla obszaru nadkrytycznego zamiast wzoru (1.9) przyjąć

$$(3.14) \quad -z = 1 - \frac{at}{P_E}.$$

Wtedy równanie (2.7) przechodzi w równanie

$$(3.15) \quad \ddot{T} - \Omega(zT + c) = 0,$$

którego rozwiązanie wyraża się w zmodyfikowanych funkcjach Bessela

$$(3.16) \quad T = z^{1/2} \left[ \bar{C}_1 J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) + \bar{C}_2 J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \Omega^{1/2} z^{3/2} \right) + \bar{S}(z) \right].$$

Całka szczególna  $\bar{S}(z)$  określona jest za pomocą wzoru (3.2), w którym zwyczajne funkcje Bessela należy zastąpić przez zmodyfikowane z tymi samymi indeksami. Z warunków początkowych

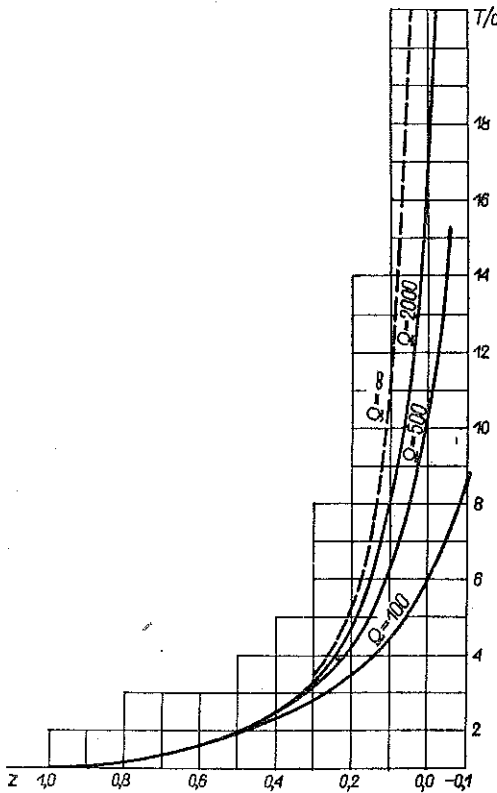
$$(3.17) \quad T(0) = T_0, \quad \dot{T}(0) = -\dot{T}_0$$

wyznacza się stałe całkowania:

$$(3.18) \quad \bar{C}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \dot{T}_0}{\Omega^{1/6} \sqrt[3]{9}}, \quad \bar{C}_2 = \frac{\Omega^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) T_0}{\sqrt[3]{3}}.$$

Po uwzględnieniu wzorów (3.13) otrzymuje się dla obszaru nadkrytycznego

$$(3.19) \quad T = \frac{2\pi\Omega^{1/2}c}{3\sqrt{3}} z^{1/2} \left\{ \left[ 1 + \int_0^{Mz^{3/2}} J_{-1/3}(\eta) d\eta \right] J_{1/3}(Mz^{3/2}) + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \int_0^{Mz^{3/2}} J_{1/3}(\eta) d\eta \right] J_{-1/3}(Mz^{3/2}) \right\}.$$



Rys. 3

W rozpatrywanym zagadnieniu dużą rolę gra wielkość początkowej krzywizny pręta. Od niej zależą nie tylko końcowe wartości sił wewnętrznych, ale również zakres stosowalności podanej teorii liniowej. Właściwe przyjęcie początkowego wygięcia pręta jest niezbędnym warunkiem prawidłowego wymiarowania, a pomiar tego wygięcia może stanowić podstawę przy ocenie rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa istniejących konstrukcji.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Москва 1956.
- [2] И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сум, рядов и производений*, Москва 1962.
- [3] N. J. HOFF, *Buckling and stability*, J. Royal Aero. Soc., 1954.
- [4] N. HOFF, S. NARDO, B. ERICKSON, *The maximum load supported by an elastic column in a rapid compression test*, Proc. First U.S. Nation. Congr. Appl. Mech., 1952.

Należy pamiętać, że zmienna z określona jest tutaj za pomocą wzoru (3.14).

Rysunek 3 przedstawia wykres funkcji  $T(z)$  dla  $\Omega = 100, 500$  i  $2000$  oraz dla porównania wykres tej funkcji przy pominięciu wpływu sił bezwładności.

#### 4. Zakończenie

W zbadanym obszarze zmienności współczynnika  $\Omega$  od 100 do 2000 wpływ sił bezwładności jest mały i praktycznie może być pominięty, jeżeli maksymalna wielkość obciążenia nie przekracza 70% siły eulerowskiej. Przy większej wartości maksymalnego obciążenia wpływ sił bezwładności gwałtownie rośnie. Utwierdzenie końców pręta zmniejsza wpływ sił bezwładności, ponieważ powoduje wzrost współczynnika  $\Omega$ . Jest to widoczne ze wzoru (2.8).

- [5] E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1959.  
[6] Z. KORDECKI, *O obciążeniu wież wyciągowych przy zerwaniu liny*, *Czasopismo Techniczne*, 5 (1962).  
[7] J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1953.  
[8] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1944.

## Резюме

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

В работе исследовались влияние кратковременной продольной сжимающей силы на стержень с предварительным изгибом. Учитываются влияния сил инерции, возникающих вследствие ускорений, направленных перпендикулярно оси стержня. Принимается линейная зависимость силы от времени, что с большим приближением соответствует условиям работы надшахтных копров при катастрофических нагрузках.

Из основного уравнения задачи (1.1), путем разделения переменных, получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (2.7) определяющее функцию времени. Это уравнение является точным (в области малых прогибов) для двусторонне шарнирно опертого стержня, с предварительным изгибом в форме полуволны синусоиды. Для других случаев опирания концов стержня она является приближенной зависимостью.

Решение уравнения (2.7) выражается в подкритической области бесселевыми функциями, а для нагрузок превышающих критическую эйлерову силу — модифицированными бесселевыми функциями с теми же индексами. Однако для значения функций времени в момент, когда нагрузка достигает значения эйлеровой силы, можно привести простые приближение формулы (3.13). Эти формулы выводятся путем замены бесселевых функций их асимптотическими расположениями. В области важной для катастрофических нагрузок надшахтных копров, точность этих формул является довольно большой.

В работе констатируется, что в отнесении к элементам надшахтных копров учет влияния сил инерции, в случае когда максимальная продольная сила превышает 70% эйлеровой критической силы, является существенным. Кроме того подтверждается, что закрепление концов стержня уменьшает влияние сил инерции.

В заключение отмечается большую роль, которую в этом случае играет величина предварительного изгиба.

## Summary

## BUCKLING OF SLENDER BARS BY SHORT-DURATION LOADS

The object of the present considerations is the effect of rapidly growing short-duration longitudinal-compression force on a bar having an initial curvature. The influence of the inertia forces due to the accelerations normal to the axis of the beam is taken into account. The relation between the force and the time is assumed to be linear, which reflects to a considerable degree the conditions of catastrophic loads head frame structures.

From the fundamental equation of the problem (1.1) a second order ordinary differential Eq. (2.7) is obtained by separating variables from which a function of time is obtained. This equation is accurate (within the range of small deflections) for a bar on hinged supports at both ends and having a small curvature in the form of a sinusoidal half-wave. For other types of support it constitutes an approximate relation.

In the sub-critical range, the solution of (2.7) is expressed by ordinary Bessel functions. For loads exceeding the Eulerian force it is expressed in modified Bessel functions with the same labels. However, for the value of the function of time at the instant where the load attains the value of the Eulerian force simpler-approximate Eqs. (3.13), may be obtained. These equations have been derived by replacing Bessel functions with their asymptotic expansions. In the range important for catastrophic loads on head frame structures, the accuracy of these equations is very high.

It is found that for elements of head frame structures, the influence of inertia forces is essential, if the maximum longitudinal force is greater than 70 percent of the Eulerian force. It is found, in addition, that if the ends are clamped the influence of the inertia forces is reduced.

In conclusion stress is laid on the importance of the initial curvature for the problem under consideration.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1963 r.*

---