

WPLYW KSZTAŁTU NA WSPÓŁCZYNNIK OPORU PRZY RUCHU BRYŁ  
IZOMETRYCZNYCH W NIERUCHOMYM LEPKIM PŁYNIU

ANDRZEJ GÓRALSKI (WARSZAWA)

W wielu zagadnieniach inżynierskich rozpatruje się ustalony lub nieustalony ruch ciał w nieruchomym lepkim płynie. Do zagadnień tego rodzaju zaliczyć można problemy procesów sedimentacji, klasyfikacji hydraulicznej, techniki pyłowej itp. Przy rozwiązywaniu ich zakłada się częstokroć, upraszczając w sposób istotny dany problem, że poruszające się cząstki mają kształt kulisty. Założenie to może prowadzić, i czasem prowadzi, do dużych błędów wynikających z pominięcia wpływu kształtu danej cząstki na wartość współczynnika oporu i tym samym na prędkość ruchu w płynie.

W roku 1851 Pernolet, [1], badał doświadczalnie (w ograniczonym zakresie zmienności liczby Reynoldsa) wpływ kształtu na wartość współczynnika oporu przy swobodnym opadaniu sześciątów, płytek i graniastopupów. Wadell w roku 1934 [1] opracował wyniki Pernoleta w zakresie ruchu burzliwego i wykazał, że istnieje korelacja pomiędzy tzw. sferycznością  $s$  (przez sferyczność  $s$  rozumie się stosunek pola powierzchni kuli zastępczej, tj. kuli o tej samej objętości co dana cząstka, do pola powierzchni cząstki) a współczynnikiem oporu  $c$ :

$$c = \frac{4(\rho - \rho_p)gd_z}{3\rho_p u^2},$$

gdzie  $d_z$  oznacza średnicę kuli zastępczej,  $\rho$  gęstość poruszającego się ciała,  $u$  prędkość ruchu,  $\rho_p$  gęstość płynu oraz  $g$  stałe przyspieszenie ziemskie.

W roku 1938 Heywood, [1], badając w zakresie  $Re$  od  $10^{-2}$  do  $10^3$  ruch niekulistych brył izometrycznych (brył wypukłych o współmiernych rozmiarach względem trzech głównych osi) przyjął za wymiar charakterystyczny średnicę koła  $d_n$  o tym samym polu powierzchni co pole powierzchni rzutu bryły izometrycznej. Należy podkreślić, że ustalenie położenia bryły względem rzutni nie zostało jednoznacznie zdefiniowane. Wprowadziwszy za miarę pola powierzchni rzutu  $d_n$  wyraża Heywood objętość  $V$  danej bryły za pomocą wzoru  $V = kd_n^3$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem kształtu. Po opracowaniu danych doświadczeń okazało się, że jeśli  $Re$  przyjmuje wartości z przedziału  $(10^{-2}, 10^2)$ , to istnieje zadowalająca korelacja między  $k$  a współczynnikiem oporu  $c$ :

$$c = \frac{8k(\rho - \rho_p)gd_n}{\pi\rho_p u^2}.$$

Również E. PETTYJOHN i E. CHRISTIANSEN w roku 1948, [1], poświęcili swą pracę badaniom nad wpływem kształtu na wartość współczynnika oporu przy swobodnym opadaniu brył izometrycznych w nieruchomym płynie. Opracowując uzyskane przez siebie dane doświadczeń o opadaniu tetraedru, heksaedru, oktaedru, heksa-oktaedru (równobocznego czternastościanu quasi-foremne) i kuli dla wartości  $Re$  z przedziału  $(10^{-3}, 2 \cdot 10^4)$ , autorzy zastosowali do opisu zjawiska omówione uprzednio pojęcia sferyczności  $s$  i średnicy zastępczej  $d_z$ . W wyniku opracowania danych znaleźli, że w zakresie ruchu laminarnego  $Re < 5 \cdot 10^{-2}$  i  $0,67 \leq s \leq 1$  współczynnik oporu  $c$  daje się określić za pomocą wzoru  $c = 24/K Re$ , gdzie  $Re = ud_z/\nu$ ,  $\nu$  oznacza współczynnik lepkości kinematycznej oraz gdzie

$$K = 0,843 \lg \frac{s}{0,065}$$

z błędem 2%.

Okazało się także, iż w obszarze ruchu burzliwego  $2 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^4$  i  $0,67 \leq s \leq 1$  dane doświadczeń można przedstawić za pomocą wzoru

$$c = 5,31 - 4,88 s$$

z błędem 4%.

PETTYJOHN i CHRISTIANSEN wykazali, że w zakresie ruchu burzliwego zastosowanie wprowadzonego przez HEYWOODA współczynnika kształtu  $k$  nie daje wyniku zadowalającego.

W odniesieniu do rezultatów Pettyjohna i Christiansena można stwierdzić co następuje:

1) Przyjęcie sferyczności  $s$  jako miary wpływu kształtu na wielkość współczynnika oporu bez uzasadnienia teoretycznego stanowi pewną dowolność; to samo można powiedzieć o współczynniku kształtu Heywooda.

2) Uzyskany wzór na wartość współczynnika oporu ma charakter empiryczny i wyraźnie ograniczony zasięg: dla małych sferyczności  $s$  i ruchu burzliwego  $c$  dąży do wartości 5,31, gdy w rzeczywistości powinno rosnać nieograniczenie; dla małych zaś sferyczności i ruchu laminarnego uzyskujemy ujemne wartości  $c$ .

Stwierdzamy więc, że wyniki cytowanych autorów nie są w pełni zadowalające, a zagadnienie wpływu kształtu na wartość współczynnika oporu przy ruchu brył izometrycznych w nieruchomym lepkim płynie wymaga dalszego badania.

### 1. Wpływ kształtu bryły izometrycznej na wielkość współczynnika oporu

Ustalony ruch laminarny w nieruchomym lepkim płynie. Osobliwością ruchu laminarnego ciał w nieruchomym i lepkim płynie jest tworzenie się z lepkiego płynu otoczki obejmującej ciało ze wszystkich stron i wędrującej wraz z nim, przy czym prędkości płynu w otoczce maleją w sposób ciągły w miarę oddalania się od ciała, [2].

W proponowanym poniżej modelu laminarnego ruchu bryły izometrycznej przyjmujemy następujące założenia:

1) Można wyznaczyć objętość płynnej otoczki ciała, przy czym żąda się, aby ilość ruchu nadana przez ciało płynowi zawartemu w umownej bryle była równa ilości ruchu rzeczywiście nadanej płynowi.

2) Otoczka ma kształt kuli, której środek położony jest w środku ciężkości danego ciała.

3) Wymiarem charakterystycznym poruszającego się ciała jest średnica otoczki płynu.

Rozważymy przy tym ustalony laminarny ruch w stałym polu sił ciężkości i w nieruchomym płynie o gęstości  $\rho_p$  i lepkości dynamicznej  $\mu$  następujących ciał:

1) kuli o średnicy  $d$  i gęstości  $\rho$  poruszającej się z prędkością  $u_k$ ,

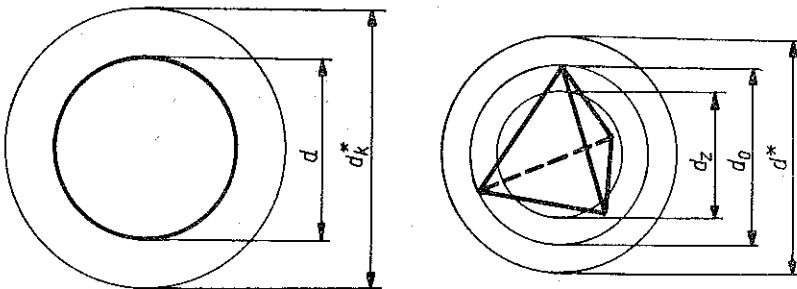
2) bryły izometrycznej o tej samej co kula gęstości  $\rho$  i o tak dobranej wielkości, aby średnica  $d_0$  kuli opisanej na rozważanej bryle izometrycznej była równa średnicy kuli  $d$ ; bryła izometryczna porusza się z prędkością  $u$ .

Zgodnie z przyjętymi założeniami wymiarem charakterystycznym dla kuli będzie pewna średnica  $d_k^*$  bryły płynu poruszającej się z kulą; odpowiednio dla bryły izometrycznej określimy średnicę  $d^*$ .

Rozważaną bryłę izometryczną scharakteryzujemy ponadto średnicą zastępczą  $d_z$ , określoną ze wzoru

$$(1.1) \quad V_b = \frac{\pi}{6} d_z^3,$$

gdzie  $V_b$  jest objętością bryły izometrycznej. Na rysunku 1 pokazano omówione wyżej średnice.



Rys. 1. Zestawienie średnic opisujących kulę i bryłę izometryczną w modelu ruchu laminarnego

Średnice otoczki  $d_k^*$  i  $d^*$  można wyrazić poprzez  $d$  i  $d_0$  w sposób następujący:

$$(1.2) \quad d_k^* = nd, \quad d^* = md_0.$$

Przyjmując, że  $\rho > \rho_p$  (co odpowiada swobodnemu opadaniu) i uwzględniając, że  $d_z < d$  otrzymujemy  $u_k > u$ .

Ponieważ otoczka kuli jest większa od otoczki rozpatrywanej bryły izometrycznej, to

$$(1.3) \quad n > m.$$

Ruch ustalony jest wynikiem równowagi sił działających na ciało: siła ciężkości  $P$  jest równoważona przez siłę oporu  $R$ :  $P - R = 0$ .

Uwzględniając ostatni wzór znajdujemy

$$(1.4) \quad V(\varrho - \varrho_p) g = cF \frac{u^2 \varrho_p}{2},$$

gdzie  $V$  oznacza objętość ciała, a  $F$  pole rzutu powierzchni ciała na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu.

Ponieważ przyjęliśmy, że opis ruchu ciała sprowadzony zostanie do opisu ruchu kulistej otoczki wędrującej wraz z ciałem, przeto  $V$  w równaniu (1.4) równa będzie objętości otoczki i zawartego w niej ciała, a  $F$  polu rzutu powierzchni otoczki. Przy takim podejściu jest celowe wprowadzenie pojęcia gęstości  $\varrho^*$  bryły złożonej, utworzonej z otoczki i zawartego w niej ciała (krótko mówiąc bryły złożonej). Przez gęstość bryły złożonej rozumiemy będziemy stosunek masy zawartej w tej bryle do jej objętości.

Uwzględniając powyższe i równanie (1.4) mamy dla kuli

$$(1.5) \quad \frac{\pi}{6} d_k^{*3} (\varrho_k^* - \varrho_p) g = c_k^* \frac{\pi d_k^{*2}}{4} \frac{u_k^2 \varrho_p}{2}$$

oraz dla bryły izometrycznej

$$\frac{\pi}{6} d^{*3} (\varrho^* - \varrho_p) g = c^* \frac{\pi d^{*2}}{4} \frac{u^2 \varrho_p}{2},$$

gdzie  $c_k^*$  i  $c^*$  oznaczają odpowiednio współczynniki oporu odpowiadające ruchowi kuli i bryły izometrycznej, określone względem średnic  $d_k^*$  i  $d^*$ , a  $\varrho_k^*$ ,  $\varrho^*$  gęstości brył złożonych dla kuli i bryły izometrycznej.

Dzieląc równania (1.5) stronami i przekształcając je znajdujemy

$$(1.6) \quad \frac{d_k^* \varrho_k^* - \varrho_p}{d^* \varrho^* - \varrho_p} = \frac{c_k^*}{c^*} \left( \frac{u_k}{u} \right)^2,$$

a przy uwzględnieniu (1.2) i warunku  $d = d_0$

$$(1.7) \quad \frac{c_k^*}{c^*} = \frac{n}{m} \frac{\varrho_k^* - \varrho_p}{\varrho^* - \varrho_p} \left( \frac{u}{u_k} \right)^2.$$

Zgodnie z prawem Stokesa siła oporu laminarnego ruchu kuli określona jest zależnością

$$R = 3\pi\mu u.$$

Stąd dla rozważanej kuli mamy

$$(1.8) \quad R_k^* = 3\pi\mu d_k^* u_k = \frac{\pi}{6} d_k^{*3} (\varrho_k^* - \varrho_p) g$$

oraz dla bryły izometrycznej

$$R^* = 3\pi\mu d^* u = \frac{\pi}{6} d^{*3} (\varrho^* - \varrho_p) g.$$

Dzieląc równania (1.8) stronami i przekształcając je znajdujemy

$$(1.9) \quad \left(\frac{u}{u_k}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^4 \left(\frac{\varrho^* - \varrho_p}{\varrho_k^* - \varrho_p}\right)^2.$$

Wykorzystując (1.7) i (1.9) otrzymamy

$$(1.10) \quad \frac{c_k^*}{c^*} = \left(\frac{m}{n}\right)^3 \frac{\varrho^* - \varrho_p}{\varrho_k^* - \varrho_p}.$$

Określimy teraz gęstości brył złożonych:

$$(1.11) \quad \varrho^* = \frac{d_z^3 \varrho + (d^{*3} - d_z^3) \varrho_p}{d^{*3}} = \frac{d_z^3 (\varrho - \varrho_p)}{m^3 d_0^3} + \varrho_p,$$

$$\varrho_k^* = \frac{d^3 \varrho + (d_k^{*3} - d^3) \varrho_p}{d_k^{*3}} = \frac{\varrho - \varrho_p}{n^3} + \varrho_p.$$

Równanie (1.10) przy uwzględnieniu (1.11) przekształca się do postaci

$$(1.12) \quad \frac{c_k^*}{c^*} = \left(\frac{d_z}{d_0}\right)^3.$$

Ponieważ dogodniej jest określać współczynniki oporu względem wymiaru charakterystycznego poruszającego się ciała, przeto wyrazimy stosunek  $c_k^*/c^*$  przez stosunek  $c_k/c_0$ , gdzie  $c_k$  jest współczynnikiem oporu określonym względem średnicy kuli  $d$ , a  $c_0$  współczynnikiem oporu określonym względem średnicy  $d_0$  kuli opisanej na bryle izometrycznej.

Napiszemy równania równowagi dla rozważanej kuli,

$$c_k \frac{\pi d^2}{4} \frac{u_k^2}{2} \varrho_p = \frac{\pi}{6} d^3 (\varrho - \varrho_p) g,$$

i dla kuli opisanej na bryle izometrycznej,

$$c_0 \frac{\pi d_0^2}{4} \frac{u^2}{2} \varrho_p = \frac{\pi}{6} d_z^3 (\varrho - \varrho_p) g.$$

Dzieląc stronami podane powyżej równania równowagi i pamiętając o warunku  $d = d_0$  znajdujemy

$$(1.13) \quad \frac{c_k}{c_0} = \left(\frac{u}{u_k}\right)^2 \left(\frac{d_0}{d_z}\right)^3.$$

Przekształcając równanie (1.13) przy uwzględnieniu równań (1.9) i (1.11), otrzymujemy ostatecznie

$$(1.14) \quad \frac{c_k}{c_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{d_z}{d_0}\right)^3.$$

Uwzględniając nierówność (1.3) przyjmiemy za miarę stosunku  $(n/m)^2$  wartość modułu  $d_0/d_z$ .

Można to uzasadnić następująco: objętość bryły złożonej z bryły właściwej i otoczki płynnej jest zależna od prędkości ruchu ciała, zaś prędkość ta zależy od kształtu i masy ciała. Ponieważ średnica zastępcza  $d_z$  zależy od masy jak i od kształtu ciała, można przeto, w ramach proponowanego modelu, napisać

$$(1.15) \quad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \varphi\left(\frac{d_z}{d_0}\right).$$

Stosunek  $d_z/d_0$  nazwiemy laminarnym współczynnikiem wypełnienia bryły izometrycznej i oznaczymy go

$$(1.16) \quad \delta_1 = \frac{d_z}{d_0}.$$

W wyniku przeprowadzonej analizy otrzymaliśmy, że stosunek współczynników oporu ruchu laminarnego kuli  $c_k$  i bryły izometrycznej  $c_0$  o równych wymiarach charakterystycznych  $d$  i  $d_0$ , jest funkcją laminarnego współczynnika wypełnienia

$$(1.17) \quad \frac{c_k}{c_0} = \frac{\delta_1^3}{\varphi(\delta_1)}.$$

Funkcją  $\varphi(\delta_1)$  należy wyznaczyć w oparciu o dane doświadczeń.

Ustalony ruch burzliwy w nieruchomym lepkim płynie. Liczne badania doświadczalne (por. np. [2]) dla wyznaczenia wartości współczynnika oporu ciał o różnorodnych kształtach potwierdziły hipotezę Newtona, że siła oporu  $R = cfu^2\varrho_p/2$ , jaka działa na ciało poruszające się w nieruchomej cieczy, jest proporcjonalna do ciśnienia dynamicznego. Otrzymuje się więc dla burzliwego ruchu ciała izometrycznego  $c = \text{const}$ .

Wzór powyższy został dla brył izometrycznych dobrze potwierdzony wynikami doświadczeń, [1], dla przedziału  $2 \cdot 10^4 > \text{Re} > 2 \cdot 10^3$ . Można spodziewać się, iż dla pewnej, dostatecznie dużej wartości  $\text{Re}$  stwierdzono by ten sam efekt, co przy burzliwym ruchu kuli, tzn. zaburzenie laminarnej warstwy przyściennej i spadek wartości współczynnika oporu. Jak wiadomo, dla kuli efekt ten występuje przy  $\text{Re} \approx 2 \cdot 10^5$ . Ponieważ jednak nie stwierdzono efektu tego rodzaju dla płytki kołowej ustawionej prostopadle do kierunku ruchu, [2], wydaje się, że współczynniki oporu ruchu burzliwego ciał izometrycznych są stałe co najmniej do  $\text{Re} = 2 \cdot 10^5$ .

Jak to wynika z równania podanego przez NEWTONA wartość, siły oporu zależy między innymi od wielkości pola rzutu  $f$  powierzchni ciała na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu. Należy rozstrzygnąć jak określić  $f$ .

PETTYJOHN i CHRISTIANSEN stwierdzili, że opadająca bryła izometryczna porusza się na ogół nie po linii prostej lecz po pewnej spirali wykonując przy tym obroty około wszystkich osi bezwładności. Pomijając dla uproszczenia składowe prędkości oprócz prędkości opadania, można przyjąć, że bryła izometryczna wykonuje w czasie ruchu chaotyczne obroty około osi symetrii. Skoro tak jest, to o wielkości pola rzutu  $f$  będzie decydowała średnia chwilowych wielkości pól rzutów przy omówionych uprzednio obrotach bryły.

Innymi słowy, dla burzliwego ruchu brył izometrycznych za powierzchnię rzutu bryły należy przyjąć pewną średnią powierzchnię rzutu. Ta średnia powierzchnia rzutu powinna określić wartość przeciętną pola powierzchni rzutu przy wszystkich możliwych położeniach bryły względem rzutni.

Zagadnienie określenia wartości średniej rzutu dla wielościanów wypukłych zostało rozwiązane. Jak to dowiódł E. OTTO, [3], istnieje prosty wzór

$$(1.18) \quad f = \frac{F}{4},$$

gdzie  $f$  jest średnim polem rzutu oraz  $F$  polem powierzchni bocznej wielościanu wypukłego. Wynik powyższy dotyczy oczywiście także kuli. Dla wielościanów wklęsłych określenie średniej powierzchni rzutu jest trudniejsze. Szczegółowe omówienie powyższego zagadnienia znaleźć można w cytowanej pracy E. OTTO.

Tak więc jeśli wprowadzimy pojęcie kuli zastępczej o średnicy  $d_f$  i tej samej powierzchni, co dana bryła izometryczna

$$(1.19) \quad F = \pi d_f^2,$$

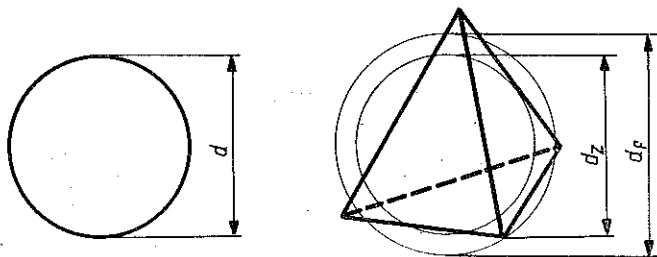
to średnie pole rzutu wyrazi się zgodnie z (1.18) i (1.19) w sposób następujący

$$(1.20) \quad f = \frac{\pi}{4} d_f^2.$$

Rozważmy teraz ustalony burzliwy ruch w stałym polu sił ciężkości i w nieruchomym lepkim płynie o gęstości  $\rho_p$  następujących ciał:

- 1) kuli o średnicy  $d$  i gęstości  $\rho$  poruszającej się z prędkością  $u_k$ ,
- 2) bryły izometrycznej o tej samej gęstości  $\rho$  co kula i o takiej wielkości, aby średnica zastępcza  $d_z$  bryły była równa średnicy kuli  $d$ ; bryła izometryczna porusza się z prędkością  $u$ , przy czym

$$(1.21) \quad u_k > u.$$



Rys. 2. Zestawienie średnic opisujących kulę i bryłę izometryczną w modelu ruchu burzliwego

Wymiarem charakterystycznym kuli będzie oczywiście jej średnica  $d$  (grubość laminarnej warstwy przyściennej jest pomijalnie mała), wymiarem zaś charakterystycznym pod względem oporu bryły izometrycznej średnica  $d_f$ . Na rysunku 2 pokazano omówione średnice.

Porównując siły oporu i siły ciężkości znajdziemy dla kuli

$$(1.22) \quad \frac{\pi}{6} d^3 (\rho - \rho_p) g = c_k \frac{\pi d^2}{4} \frac{u_k^2 \rho_p}{2},$$

dla bryły izometrycznej

$$\frac{\pi}{6} d_z^3 (\rho - \rho_p) g = c_f \frac{\pi d_f^2}{4} \frac{u^2 \rho_p}{2},$$

gdzie  $c_k$  i  $c_f$  oznaczają odpowiednio współczynniki oporu burzliwego ruchu kuli i bryły izometrycznej określone względem średnic  $d$  i  $d_f$ .

Dzieląc stronami równania (1.22) i uwzględniając warunek  $d = d_z$  znajdujemy

$$(1.23) \quad \frac{c_k}{c_f} = \left( \frac{u}{u_k} \right)^2 \left( \frac{d_f}{d_z} \right)^2.$$

Wydaje się słuszne przyjąć przy uwzględnieniu nierówności (1.21), że miarą stosunku  $u/u_k$  jest wartość modułu  $d_z/d_f$ , ponieważ prędkość ruchu bryły izometrycznej o średnicy zastępczej  $d_z$  równej średnicy kuli  $d$  (w porównaniu do prędkości kuli) będzie tym mniejsza, im bardziej kształt bryły będzie odbiegał od kształtu kuli. Odstępstwo to opisuje właśnie stosunek  $d_z/d_f$ . Można więc w ramach proponowanego modelu zapisać

$$(1.24) \quad \left( \frac{u}{u_k} \right)^2 = \psi \left( \frac{d_z}{d_f} \right)^2.$$

Stosunek  $(d_z/d_f)^2$  nazwiemy burzliwym współczynnikiem wypełnienia bryły izometrycznej i oznaczymy

$$(1.25) \quad \delta_2 = \left( \frac{d_z}{d_f} \right)^2.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie, że stosunek współczynników oporu burzliwego ruchu kuli i bryły izometrycznej o tej samej masie i gęstości co kula jest funkcją burzliwego współczynnika wypełnienia:

$$(1.26) \quad \frac{c_k}{c_f} = \frac{\psi(\delta_2)}{\delta_2}.$$

Jeśli przyjmiemy, że wymiarem charakterystycznym bryły izometrycznej jest średnica  $d_z$ , to otrzymamy (porównując siły oporu i siły ciężkości) dla kuli

$$(1.27) \quad \frac{\pi}{6} d^3 (\rho - \rho_p) g = c_k \frac{\pi d^2}{4} \frac{u_k^2 \rho_p}{2},$$

dla bryły izometrycznej

$$\frac{\pi}{6} d_z^3 (\rho - \rho_p) g = c_z \frac{\pi d_z^2}{4} \frac{u^2 \rho_p}{2},$$

gdzie  $c_z$  oznacza współczynnik oporu burzliwego ruchu bryły izometrycznej określony względem średnicy  $d_z$ .



Z warunku  $d = d_z$  oraz z równań (1.27) wynika

$$(1.28) \quad \frac{c_k}{c_z} = \left( \frac{u}{u_k} \right)^2 = \psi(\delta_2).$$

Porównując (1.26) i (1.28) znajdujemy

$$(1.29) \quad \frac{c_k}{c_f} = \frac{1}{\delta_2} \frac{c_k}{c_z}.$$

W oparciu o dane doświadczalnych należy teraz wyznaczyć funkcję (1.28).

## 2. Porównanie uzyskanych wyników z danymi doświadczalnymi

**Ruch laminarny.** Wykorzystane zostały wyniki doświadczeń Pettyjohna i Christiansena [1] nad swobodnym laminarnym opadaniem brył izometrycznych w nieruchomym lepkim płynie.

Ze względu na to, że wymienieni autorzy opracowali swe wyniki przyjmując za wymiar charakterystyczny bryły izometrycznej średnicę zastępczą  $d_z$ , należało dokonać koniecznych obliczeń.

Obliczono przede wszystkim wymiary parametrów charakterystycznych dla ruchu laminarnego brył izometrycznych, tzn. średnice opisane  $d_0$  i średnice zastępcze  $d_z$ , wyrażając je w zależności od długości boku  $a$ , a także laminarne współczynniki wypełnienia  $d_z/d_0 = \delta_1$ .

Tablica 1 podaje odpowiednie zestawienie.

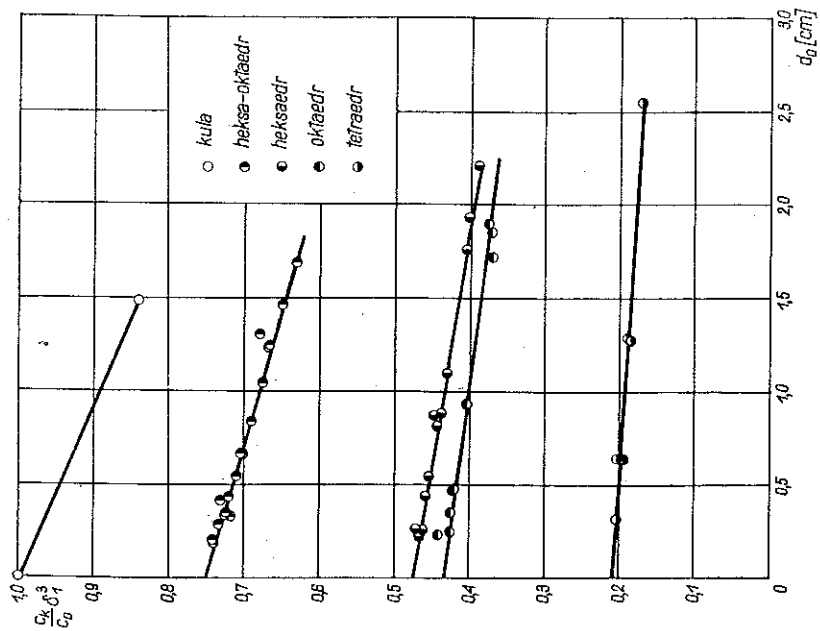
Tablica 1

	Tetraedr	Oktaedr	Heksaedr	Heksa-oktaedr	Kula
$d_0$	1,225 $a$	1,414 $a$	1,732 $a$	3,162 $a$	—
$d_z$	0,608 $a$	0,965 $a$	1,240 $a$	2,783 $a$	—
$\delta_1 = d_z/d_0$	0,496	0,681	0,715	0,880	1

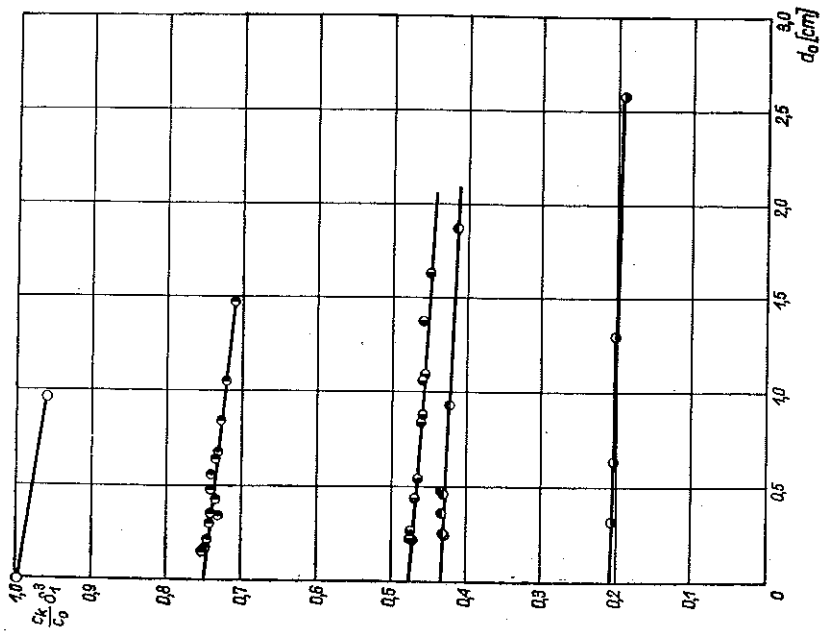
Następnie obliczono z danych pomiarów wartości wyrażenia  $c_k \delta_1^3/c_0$  i na rys. 3 i 4 przedstawiono zmienność modułu  $c_k \delta_1^3/c_0$  w zależności od  $d_0$  dla poszczególnych brył. Rysunek 3 obejmuje wyniki doświadczeń na pierwszym stanowisku pomiarowym, rys. 4 zaś na stanowisku drugim. Aby wyeliminować efekt ścianki należało znaleźć odpowiednie wartości  $c_k \delta_1^3/c_0$ , gdy  $d_0 \rightarrow 0$ . Przejście to zostało dokonane graficznie na rys. 3 i 4. W wyniku otrzymano następującą tablicę 2:

Tablica 2

	Tetraedr	Oktaedr	Heksaedr	Heksa-oktaedr
Pierwsze stanowisko	0,208	0,432	0,475	0,750
Drugie stanowisko	0,208	0,430	0,475	0,750
Średnio	0,208	0,431	0,475	0,750
$c_0/c_k$	0,587	0,736	0,775	0,908



Rys. 3. Wartości modułu  $c_k \delta_1^3 / c_0$  na podstawie danych doświadczalnych, [4]; pierwsze stanowisko pomiarowe



Rys. 4. Wartości modułu  $c_k \delta_1^3 / c_0$  na podstawie danych doświadczalnych, [1]; drugie stanowisko pomiarowe

Z kolei zbadano korelację pomiędzy  $c_0/c_k$  i  $\delta_1$ . Okazało się, że pomiędzy tymi wielkościami istnieje ścisła odpowiedniość wyrażająca się maksymalnym błędem  $\approx 1,5\%$  formułą

$$(2.1) \quad \frac{c_0}{c_k} = \delta_1^3.$$

Rysunek 5 pozwala ocenić zgodność powyższego wzoru z danymi doświadczeń dla laminarnego ruchu brył izometrycznych w nieruchomym i lepkiem płynie.

**Ruch burzliwy.** I tu również wykorzystano wyniki doświadczeń Pettyjohna i Christiansena nad swobodnym burzliwym opadaniem brył izometrycznych w lepkiem i nieruchomym płynie.

W pierwszej kolejności należało obliczyć średnice  $d_f$  uzależniając je od długości boku  $a$  oraz burzliwe współczynniki wypełnienia  $\delta_2$ ; w wyniku otrzymano tablicę 3.

Tablica 3

	Tetraedr	Heksaedr	Oktaedr	Heksa-oktaedr	Kula
$d_f$	0,742 $a$	1,381 $a$	1,050 $a$	2,925 $a$	—
$d_z$	0,608 $a$	1,240 $a$	0,965 $a$	2,782 $a$	—
$\delta_2 = (d_z/d_f)^2$	0,670	0,806	0,846	0,906	1

Wartości współczynników oporu  $c_z$  określono jako średnią arytmetyczną odpowiednich wartości doświadczalnych dla  $Re > 2 \cdot 10^3$ ; jednocześnie obliczono odchylenia przeciętne:

$$\eta = \pm \frac{\sum_i^n |x_s - x_t|}{\sqrt{n(n-1)}},$$

gdzie  $x_s$  jest średnią arytmetyczną,  $x_t$  wartością  $c_z$  z danego pomiaru oraz  $n$  liczbą pomiarów.

W tablicy 4 zestawiono uzyskane wyniki.

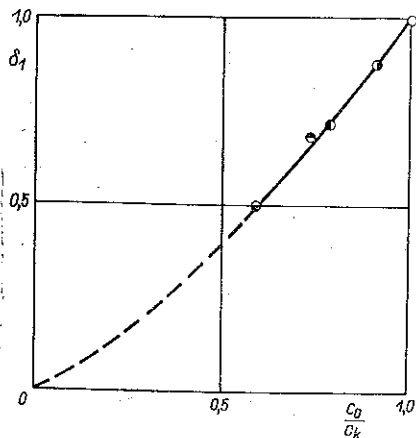
Tablica 4

	Tetraedr	Heksaedr	Oktaedr	Heksa-oktaedr	Kula
$c_z$	2,06	1,35	1,15	0,86	0,44
$\eta$	0,07	0,03	0,03	0,02	0,02

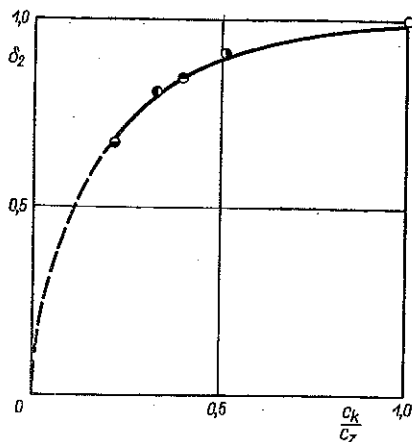
Okazało się w dalszym ciągu, iż pomiędzy  $c_z$  i  $\delta_2$  istnieje ścisła zależność wyrażająca się (z błędem maksymalnym  $\approx 3\%$ ) formułą

$$(2.2) \quad c_z = (1,01 \delta_2 + 0,48 \delta_2^{10})^{-2}.$$

Ocenę zgodności powyższego wzoru z danymi doświadczeń w obszarze burzliwego ruchu brył izometrycznych w nieruchomym i lepkim płynie umożliwia rys. 6. Na rysunku tym przedstawiono wykres stosunku  $c_k/c_z$  jako funkcji  $\delta_2$  (przy założeniu  $c_k = 0,44$ ).



Rys. 5. Wykres modułu  $c_0/c_k$  jako funkcji laminarnego współczynnika wypełnienia  $\delta_1$



Rys. 6. Wykres modułu  $c_k/c_z$  jako funkcji burzliwego współczynnika wypełnienia  $\delta_2$

Należy w tym miejscu podkreślić, że różnice pomiędzy danymi doświadczeń i wartościami z (2.2) są zawarte w granicach odchyień przeciętnych.

### 3. Omówienie wyników

Opierając się na przeprowadzonej analizie znaleziono dla laminarnego ruchu bryły izometrycznej

$$\frac{c_0}{c_k} = \frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^3}$$

Następnie wykorzystując dane doświadczeń stwierdzono, że

$$\frac{c_0}{c_k} = \delta_1^{\frac{3}{4}}$$

Można więc ustalić, iż uzyskano zadowalającą zgodność pomiędzy teorią i doświadczeniem i co za tym idzie, że zaproponowany model laminarnego ruchu bryły izometrycznej w nieruchomym, lepkim płynie w sposób prawidłowy opisuje rozważane zjawisko.

Podobnie analizując ruch burzliwy znaleziono

$$\frac{c_k}{c_f} = \frac{\psi(\delta_2)}{\delta_2}$$

a z danych doświadczalnych

$$\frac{c_k}{c_f} = 0,44 \delta_2 (1,01 + 0,48 \delta_2^2)^2.$$

Również tu zgodność przewidywań i wyników pomiarowych jest w pełni zadowalająca.

Prowadząc nasze rozważania wykazaliśmy, że jest rzeczą naturalną przyjęcie za wymiar charakterystyczny laminarnego ruchu bryły średnicę opisaną  $d_0$  oraz w ruchu burzliwym średnicę  $d_f$ . Jednakże ujęcie takie jest w pewnej mierze niejednolite. Dlatego też przy zachowaniu wszystkich przyjętych uprzednio warunków określimy obecnie wpływ kształtu bryły izometrycznej na wartość współczynnika oporu przyjmując, iż wymiarem charakterystycznym bryły jest średnica zastępcza  $d_z$ .

Dla ruchu burzliwego przy uwzględnieniu wzorów (1.29) łatwo znajdujemy

$$(3.1) \quad \frac{c_k}{c_z} = 0,44 (1,01 \delta_2 + 0,48 \delta_2^{10})^2.$$

Zauważymy dalej, że współczynnik oporu ruchu kuli  $c_k$ , określony względem średnicy  $d$ , jest równy

$$c_k = \frac{4d(\rho - \rho_p)g}{3u_k^2 \rho_p},$$

współczynnik zaś oporu ruchu bryły izometrycznej  $c_z$ , określony względem średnicy  $d_z$ , jest równy

$$c_z = \frac{4d_z(\rho - \rho_p)g}{3u^2 \rho_p}.$$

Z powyższych zależności znajdujemy

$$\frac{c_k}{c_z} = \frac{d_0}{d_z} \left( \frac{u}{u_k} \right)^2.$$

Zgodnie z (1.13) mamy

$$\left( \frac{u}{u_k} \right)^2 = \frac{c_k}{c_0} \left( \frac{d_z}{d_0} \right)^3.$$

Wiemy już (2.1), że w ruchu laminarnym  $c_0/c_k = \delta_1^{\frac{3}{4}}$ , możemy więc po odpowiednich przekształceniach znaleźć

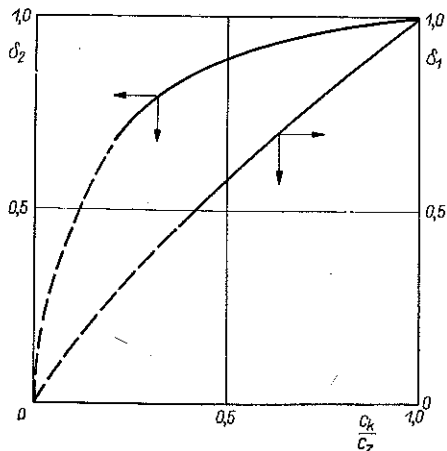
$$\left( \frac{u}{u_k} \right)^2 = \delta_1^{\frac{9}{4}}$$

i ostatecznie

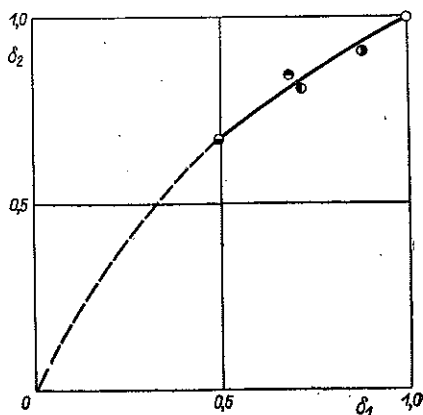
$$(3.2) \quad \frac{c_k}{c_z} = \delta_1^{\frac{5}{4}}.$$

Wzór (3.2) wyraża wpływ kształtu na wartość współczynnika oporu  $c_z$  określonego względem średnicy  $d_z$  w ruchu laminarnym, a wzór (3.1) w ruchu burzliwym bryły izometrycznej.

Rysunek 7 pozwala na porównanie wykresów stosunków  $c_k/c_z$  jako funkcji współczynników wypełnienia  $\delta_1$  i  $\delta_2$ . Odmienny charakter zmian tłumaczy się jasno innym mechanizmem powstawania siły oporu w ruchu laminarnym, innym w ruchu burzliwym i daje się interpretować w ramach modeli przyjętych w niniejszej pracy.



Rys. 7. Porównanie wykresów modułu  $c_k/c_z$  w ruchu laminarnym i w ruchu burzliwym odpowiednio jako funkcji współczynników wypełnienia  $\delta_1$  i  $\delta_2$



Rys. 8. Korelacja pomiędzy współczynnikami wypełnienia

W zastosowaniach praktycznych o wiele łatwiej o określenie burzliwego współczynnika wypełnienia  $\delta_2$  niż o określenie współczynnika  $\delta_1$ . Stąd na rys. 8 pokazano stwierdzoną pomiędzy nimi zależność.

Zauważymy jeszcze, że wprowadzony w niniejszej pracy burzliwy współczynnik wypełnienia  $\delta_2 = (d_z/d_f)^2$  przyjmuje dla brył wypukłych te same wartości co sferyczność  $s$ . Dla brył wklęsłych zbieżności tej nie stwierdzimy.

Wreszcie zwrócimy uwagę na inne uporządkowanie rozpatrywanych brył ze względu na wartość współczynnika  $\delta_1$ , inne ze względu na wartość współczynnika  $\delta_2$ . Świadczy to o innym wpływie kształtu na wartość współczynnika oporu w ruchu laminarnym i o innym wpływie w ruchu burzliwym bryły izometrycznej w nieruchomym lepkiem płynie.

#### 4. Wnioski

1. Okazało się rzeczą możliwą w oparciu o zaproponowane w niniejszej pracy modele laminarnego i burzliwego ruchu brył izometrycznych w płynie nieruchomym i lepkiem określenie jakościowego wpływu kształtu brył izometrycznych na wartość współczynnika oporu oraz w oparciu o dane doświadczalne znalezienie odpowiednich związków ilościowych.

2. Wpływ kształtu na wartość współczynnika oporu daje się jednoznacznie określić wprowadzonymi przez autora współczynnikami wypełnienia  $\delta_1$  i  $\delta_2$ .

3. Otrzymane związki ilościowe są jednorodne w tym sensie, że znajomość wartości  $\delta_1$  bądź  $\delta_2$  pozwala obliczyć, odpowiednio w ruchu laminarnym i w ruchu burzliwym, wartość współczynnika oporu  $c_z$  określonego przy uznaniu za wymiar charakterystyczny bryły izometrycznej średnicy zastępczej  $d_z$ .

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] E. PETTYJOHN, E. CHRISTIANSEN, *Effect of particle shape on free-settling rates of isometric particles*, Chem. Eng. Progress, 2, 44 (1948), 157-173.  
 [2] L. PRANDTL, *Dynamika przepływów*, PWN, Warszawa 1956.  
 [3] E. ОТТО, *O wartości średniej rzutu prostokątnego powierzchni*, Zeszyty Naukowe P. W.: Geometria Wykreślna, tom 3, 1963.

#### Резюме

### ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ НА ЗНАЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ В НЕПОДВИЖНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается влияние формы на значение коэффициента сопротивления при ламинарном и турбулентном движении изометрических тел в неподвижной и вязкой жидкости.

Приводится теоретический анализ задачи и доказывається, что влияние формы на коэффициент сопротивления в ламинарном движении можно учесть с помощью ламинарного коэффициента наполнения  $\delta_1 = d_z/d_0$ , где  $d_z$  — эквивалентный диаметр изометрического тела,  $d_0$  — диаметр шара, описанного на изометрическом теле; доказывається также, что влияние формы на коэффициент сопротивления в турбулентном движении можно учесть с помощью турбулентного коэффициента наполнения  $\delta_2 = (d_z/d_f)^2$ , где  $d_f$  — диаметр круга с поверхностью эквивалентной средней поверхности проекции изометрического тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения.

В дальнейшей части работы, основываясь при этом на результатах Петиджона и Христиансена, определяются соответствующие количественные зависимости, которые дают возможность вычислить коэффициент сопротивления, если известна форма изометрического тела, принимая при этом в данном случае, что характеристическим размером изометрического тела является эквивалентный диаметр  $d_z$ .

Анализ результатов позволяет констатировать, что принятые в настоящей работе модели ламинарного и турбулентного движения изометрических тел в неподвижной и вязкой жидкости дают правильно представление рассматриваемого явления.

#### S u m m a r y

### THE INFLUENCE OF THE SHAPE OF AN ISOMETRIC BODY MOVING IN A VISCOUS FLUID ON THE VALUE OF THE DRAG COEFFICIENT

The problem is analysed theoretically, it being shown that the influence of the shape of the body on the drag coefficient in laminar motion may be taken account of by means of the laminar coefficient of completion  $\delta_1 = d_z/d_0$ , where  $d_z$  is the representative diameter of the body and  $d_0$  — the diameter of a sphere circumscribed on it. It is also shown that the influence of the shape of the body on the drag coefficient in turbulent motion may be taken into account by means of the turbulent

coefficient of completion  $\delta_2 = (d_z/d_f)^2$ , where  $d_f$  is the diameter of the circle of which the area is equivalent to the mean area of a normal projection of the body on a plane normal to the direction of motion.

On the basis of the experiments of Pettyjohn and Christiansen is determined the corresponding quantitative relation enabling us to compute the drag coefficient for a known shape of the body. It is assumed that the characteristic dimension of the body is the representative diameter  $d_z$ .

An analysis of these results justifies the opinion that the laminar and turbulent scheme of motion of an isometric body in a viscous fluid describe in a correct manner the phenomena considered.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lipca 1963 r.*