

O POTĘGOWEJ POSTACI MECHANICZNEGO RÓWNIANIA STANU
Z UWZGLĘDNIENIEM TEMPERATURY

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Koncepcja mechanicznego równania stanu dla metali istnieje już od 55 lat, została bowiem zaproponowana w roku 1909 przez Ludwika [1]. Przyjęcie tej koncepcji pociąga za sobą założenie, że naprężenie plastycznego płynięcia jest jednoznaczna funkcją odkształcenia, prędkości odkształcenia i temperatury, a więc nie zależy od przebiegu odkształcania w tych zmiennych,

$$\sigma = F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T).$$

To założenie jest bardzo ogólne i wymaga dyskusji oraz dokładnego sprawdzenia doświadczalnego.

Obecnie istnieje już szereg prac na temat mechanicznego równania stanu. Szczególnie duża ich liczba dotyczy mechanicznego równania stanu, wyprowadzonego na podstawie prób na pełzanie; znacznie mniejsza liczba dotyczy równania stanu, wyprowadzonego na podstawie prób na ściskanie lub rozciąganie z różnymi stałymi prędkościami odkształcenia. Najmniej prac ogłoszono na temat doświadczalnej weryfikacji istnienia równania stanu.

Na podstawie prac [2-9] można stwierdzić, że założenie Ludwika jest za bardzo ogólne i w przypadku zmian prędkości odkształcenia i temperatury w zbyt szerokich granicach może ono prowadzić do dużych błędów w opisie krzywej umocnienia.

Aby mechaniczne równania stanu prowadziły do opisu zgodnego z rzeczywistym zachowaniem się metali, muszą być spełnione następujące warunki (są one zestawione na podstawie analizy prac [2-11]):

1. Równanie stanu jest spełnione w takich warunkach, w jakich zostało otrzymane na drodze doświadczalnej (np. dla różnych prędkości odkształcania przy ustalonych temperaturach, próby na pełzanie itp.).

2. Równanie stanu jest spełnione, gdy zmiany prędkości odkształcania są dostatecznie małe w stosunku do prędkości, dla jakich równanie zostało sformułowane (np. zmiany prędkości w trakcie próby rozciągania, zmiany prędkości przy pełzaniu).

3. Równanie stanu jest spełnione dla dostatecznie małych zmian temperatury w stosunku do temperatur, dla jakich równanie stanu zostało sformułowane (np. zmiany temperatury w trakcie próby rozciągania, zmiany temperatury podczas pełzania, zmiany temperatury podczas relaksacji itp.).

4. Równanie stanu jest spełnione, o ile materiał jest metalurgicznie stabilny, tzn. nie występuje zjawisko starzenia odkształceniowego; jak wiadomo, może ono zachodzić w pewnym przedziale temperatur i prędkości odkształcenia [9, 10 i 11].

Jak wynika z ostatniej uwagi, warunek 4 może być więc spełniony poza wymienionymi obszarami. Niespełnienie warunku 4 pociąga za sobą zależność

$$\sigma = F_1(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, t),$$

gdzie t oznacza czas. Wszystkie inne przypadki niż poprzednio wymienione wymagają oddzielnego sprawdzenia doświadczalnego. Sprawdzenia doświadczalnego wymaga również ustalenie przedziałów zmienności wielkości wymienionych w warunkach 2 i 3.

Pomimo takich ograniczeń koncepcja mechanicznego równania stanu ma bardzo duże znaczenie praktyczne, gdyż dane otrzymane z jednego typu doświadczeń mogą być wykorzystane przy innych sposobach obciążania.

Różniczka zupełna równania stanu przedstawi się w postaci:

$$(1.1) \quad d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial\sigma}{\partial\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon} + \frac{\partial\sigma}{\partial T} dT + \frac{\partial\sigma}{\partial t} dt.$$

We wzorze (1.1) zamiast $\partial\sigma/\partial\varepsilon$, $\partial\sigma/\partial\dot{\varepsilon}$, $\partial\sigma/\partial T$, $\partial\sigma/\partial t$ można podstawiać rozmaite funkcje, które przybliżają rzeczywiste zachowanie się badanego metalu i stąd po scałkowaniu można otrzymać określoną postać równania stanu. Występowanie ostatniego wyrazu $\partial\sigma/\partial t$ wskazuje, że w wyniku starzenia naprężenie zależy również bezpośrednio od czasu; w dalszej części pracy wyraz ten będzie pominięty, $\partial\sigma/\partial t = 0$.

Obecnie zajmiemy się wpływem odkształcenia i prędkości odkształcenia w przypadku stałej temperatury.

2. Uwzględnienie umocnienia

Dla wielu metali w stanie wyżarzonym wpływ umocnienia można przedstawić w formie prawa wykładniczego [5 i 12]

$$(2.1) \quad \sigma = D\varepsilon^m, \quad \dot{\varepsilon} = \text{const}, \quad T = \text{const},$$

gdzie m jest wykładnikiem umocnienia, a D stałą.

Wykładnik umocnienia m definiuje się w sposób bardziej ogólny:

$$(2.2) \quad m = \left[\frac{\partial \log \sigma}{\partial \log \varepsilon} \right]_{\substack{\dot{\varepsilon} = \text{const} \\ T = \text{const}}} \quad \text{lub} \quad m = \frac{\log \sigma_2 / \sigma_1}{\log \varepsilon_2 / \varepsilon_1}.$$

Gdy ze wzrostem odkształcenia m zachowuje stałą wartość, krzywa umocnienia jest dokładnie parabolą. W przeciwnym przypadku równanie (2.1) jest tylko pewnym przybliżeniem rzeczywistej krzywej umocnienia.

Różniczkując równanie (2.1) otrzymujemy

$$(2.3) \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = Dm\varepsilon^{m-1} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = m \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Równanie (2.1) wykazuje pewną niedogodność, mianowicie jest słuszne dla odkształceń większych niż początkowe odkształcenia sprężyste i z tego powodu nie nadaje się do opisu krzywej umocnienia w zakresie małych odkształceń, rzędu mniejszych niż 1%. Ponieważ jednak dla takich metali w stanie wyżarzonym, jak np. dla aluminium, miedzi, ołowiu, niklu, obszar odkształceń sprężystych jest niewielki i brak fizycznej granicy plastyczności, przeto prawo o postaci (2.1) jest słuszne w bardzo dużym zakresie odkształceń plastycznych.

3. Wpływ prędkości odkształcenia

Dotychczas zaproponowano kilka praw, które opisują wpływ prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia metali. Prawem, które w dużej liczbie przypadków bardzo dobrze opisuje to zjawisko i jest najczęściej spotykane, jest prawo wykładnicze ([5, 13 i 14] oraz szereg innych prac):

$$(3.1) \quad \sigma = F\dot{\varepsilon}^n, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad T = \text{const},$$

gdzie n jest czułością na prędkość, a F stałą.

Czułość na prędkość n definiuje się w sposób bardziej ogólny [15, 16 i 17]:

$$(3.2) \quad n_1 = \left[\frac{\partial \log \sigma}{\partial \log \dot{\varepsilon}} \right]_{\substack{\sigma = \text{const} \\ T = \text{const}}} \quad \text{lub} \quad n = \frac{\log \sigma_2 / \sigma_1}{\log \dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_1}.$$

Gdy ze wzrostem prędkości odkształcenia n zachowuje stałą wartość, prawo wpływu prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia jest ściśle paraboliczne. W przypadku przeciwnym równanie (3.1) jest tylko pewnym przybliżeniem rzeczywistego wpływu prędkości na krzywą umocnienia.

Po zróżniczkowaniu równania (3.1) otrzymujemy

$$(3.3) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} = Fn\dot{\varepsilon}^{n-1} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} = n \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}.$$

4. Równoczesny wpływ umocnienia i prędkości odkształcenia

Po podstawieniu funkcji (2.3) i (3.3) do równania (1.1) z równoczesnym uwzględnieniem $\partial \sigma / \partial T = 0$ i $\partial \sigma / \partial t = 0$ otrzymujemy

$$(4.1) \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = m \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + n \frac{d\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}}$$

lub po scałkowaniu

$$(4.2) \quad \sigma = B\varepsilon^m \dot{\varepsilon}^n.$$

Równanie typu (4.2) może posiadać szereg odmian, z których szczególnie interesujące jest

$$(4.3) \quad \sigma - \sigma_p = K_1 \varepsilon_p^a \dot{\varepsilon}_p^b.$$

Równanie (4.3) może się odnosić do metali, które wykazują stosunkowo wysoką granicę proporcjonalności oraz nie posiadają fizycznej granicy plastyczności, np. do mosiądzu. Równanie (4.3) może być również stosowane w obszarze małych odkształceń sprężysto-plastycznych.

Drugą interesującą postacią jest równanie

$$(4.4) \quad \sigma = K \dot{\epsilon}_p^\alpha \dot{\epsilon}_p^\beta.$$

Równania (4.2) i (4.4) zostały zaproponowane przez E. A. DAVIS, a doświadczenia przeprowadzone na miedzi przez tego autora wykazały, że w przypadku pełzania równania te wykazują dobrą zgodność z doświadczeniem [18 i 20]. Dostyc obszerna dyskusja równania (4.4) została przeprowadzona przez A. NÁDAIA w pracy [19] oraz przez E. A. DAVIS w pracy [18].

Jednym z możliwych sposobów określenia wpływu umocnienia i prędkości odkształcenia na krzywą płynięcia metali są próby rozciągania lub ściskania przy zachowaniu prędkości stałych, zwiększanych w kolejnych próbach. W wyniku przeprowadzenia takich doświadczeń otrzymuje się związek o postaci (4.2) oczywiście przy założeniu, że badany metal posiada charakterystykę dającą się opisać tym związkiem.

Ponieważ związek (4.4) umożliwia obliczenie krzywej relaksacji, jest szczególnie interesujące przedyskutowanie prawa transformacji stałych występujących w (4.2) na stałe występujące w związku (4.4). Zmienne niezależne ϵ i $\dot{\epsilon}$ oraz ϵ_p i $\dot{\epsilon}_p$ zależą nawzajem od siebie w następujący sposób:

$$(4.5) \quad \epsilon_p = \epsilon - \frac{\sigma}{E},$$

gdzie $\epsilon_e = \sigma/E$,

$$(4.6) \quad \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} \left(1 - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right).$$

Po uwzględnieniu wzoru (2.3) otrzymujemy

$$(4.7) \quad \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} \left(1 - \frac{m}{E} \frac{\sigma}{\epsilon} \right) \quad \text{lub} \quad \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} \left(1 - m \frac{\epsilon_e}{\epsilon} \right).$$

Na podstawie zależności (4.6) i (4.7) można stwierdzić, że próba $\dot{\epsilon} = \text{const}$ nie jest równoważna próbie $\dot{\epsilon}_p = \text{const}$. Podczas próby $\dot{\epsilon} = \text{const}$ prędkość odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_p$ zmienia się zniżając (począwszy od zera na początku próby) asymptotycznie do $\dot{\epsilon}$, gdyż wówczas $\partial \sigma / \partial \epsilon$ zmienia się od E do wartości bliskich zera. Ponieważ równanie (4.2) jest słuszne dla odkształceń w przybliżeniu $\epsilon > 0,01$, a w zakresie takich odkształceń $\partial \sigma / \partial \epsilon \approx 0,02 E$, przeto wyraz $(1/E)(\partial \sigma / \partial \epsilon)$ jest mały w stosunku do jedności i stąd $\dot{\epsilon}_p \approx \dot{\epsilon}$.

Dla większych odkształceń rzędu 0,30 $\partial \sigma / \partial \epsilon \approx 0,002E$ i wyraz $(1/E)(\partial \sigma / \partial \epsilon)$ ma jeszcze mniejszą wartość. Z drugiej strony, zmniejszenie lub zwiększenie prędkości odkształcania rzędu 2% nie wpływa w istotny sposób na zmianę krzywej

umocnienia. Korzystając z definicji czułości na prędkość β w równaniu (4.4) otrzymujemy

$$(4.8) \quad \beta = \frac{\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{\log \frac{\dot{\varepsilon}_{p2}}{\dot{\varepsilon}_{p1}}},$$

a po uwzględnieniu zależności (4.7) oraz związku $\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = n \log \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}$ otrzymujemy

$$(4.9) \quad \beta = n \frac{\log \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}}{\frac{\dot{\varepsilon}_2 \left[1 - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_2 \right]}{\log \frac{\dot{\varepsilon}_1 \left[1 - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_1 \right]}}},$$

ponieważ

$$\frac{\log \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}}{\log \frac{\dot{\varepsilon}_2 \left[1 - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_2 \right]}{\dot{\varepsilon}_1 \left[1 - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_1 \right]}} \approx 1,$$

więc $\beta \approx n$.

Analogiczne wnioski można wyciągnąć w stosunku do wykładników umocnienia a i m oraz modułów plastyczności B i K , $a \approx m$ i $B \approx K$. Tak więc stałe materiałowe B , m i n określone na podstawie prób rozciągania lub ściskania z prędkościami różniącymi się w każdej próbie można stosować również w prawie (4.4) dla odkształceń w przybliżeniu większych od 1%. Oczywiście równanie (4.4) będzie wówczas posiadało charakter przybliżony.

5. Dyskusja warunku różniczki zupełnej

Wszystkie trzy wymienione poprzednio prawa (4.2), (4.3) i (4.4) są sformułowane przy założeniu, że charakter wpływu odkształcenia i prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia ma postać iloczynową

$$(5.1) \quad \sigma = f_1(\varepsilon) f_2(\dot{\varepsilon}).$$

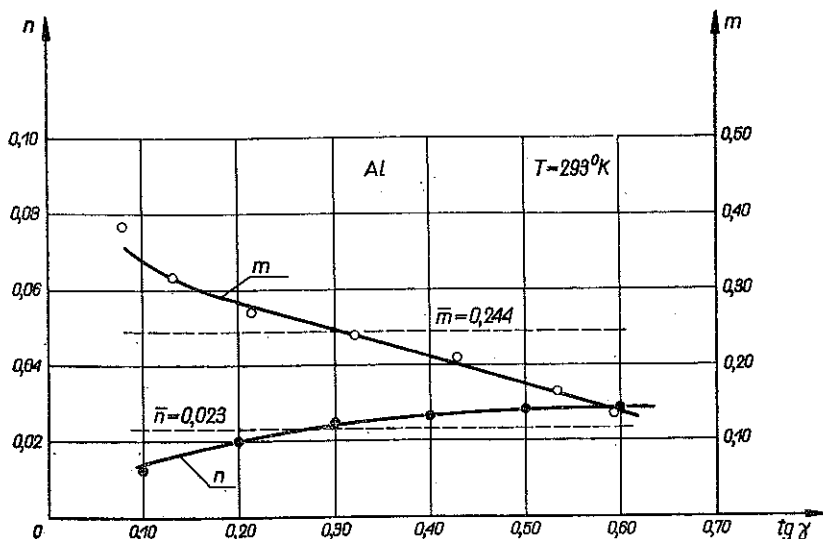
Ta postać wymaga kilku słów wyjaśnienia. Otóż w równaniu stanu zakłada się, że spełnia ono warunek różniczki zupełnej, ponieważ naprężenie nie zależy od drogi we współrzędnych ε i $\dot{\varepsilon}$. W przypadku równania typu (5.1) warunek różniczki zupeł-

nej jest spełniony tożsamościowo, o ile czułość na prędkość n nie zależy od odkształcenia oraz wykładnik umocnienia m nie zależy od prędkości odkształcenia,

$$\frac{\partial f_1(\varepsilon)}{\partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\partial f_2(\dot{\varepsilon})}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial f_1(\varepsilon)}{\partial \dot{\varepsilon}} = 0, \quad \frac{\partial f_2(\dot{\varepsilon})}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Dla równania (4.2) warunek różniczkowy zupełnej ma postać:

$$\frac{\partial \left(n \frac{\sigma}{\varepsilon} \right)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \left(m \frac{\sigma}{\varepsilon} \right)}{\partial \dot{\varepsilon}}.$$



Rys. 1. Zależność wykładnika umocnienia m i czułości na prędkość n od odkształcenia dla aluminium. Wyniki własne, uzyskane przy skręcaniu próbek rurkowych

Przy założeniu słuszności związków (2.3) i (3.3) oraz założeniu zmian n z odkształceniem, a m z prędkością warunek istnienia różniczkowy zupełnej przybiera postać:

$$\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \varepsilon = \frac{\partial m}{\partial \dot{\varepsilon}} \dot{\varepsilon}.$$

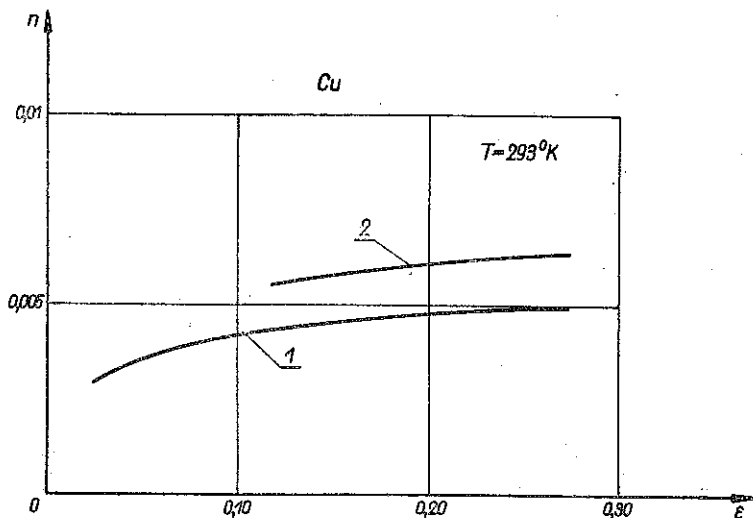
Dane doświadczalne dotyczące zależności n od odkształcenia dla aluminium wg pracy [10] (uzyskane przy skręcaniu próbek rurkowych) zostały przedstawione na rys. 1. Z danych tych wynika, że n wykazuje pewien wzrost ze wzrostem odkształcenia, przy większych odkształceniach n zachowuje prawie stałą wartość. Podobny wynik dla miedzi otrzymano w pracy [15] (rys. 2). Niestety, obecnie brak danych o ewentualnej zmianie wykładnika umocnienia m przy różnych prędkościach odkształcenia dla $\varepsilon = \text{const}$.

Obecnie zajmiemy się równoczesnym wpływem odkształcenia, prędkości odkształcenia i temperatury na naprężenie plastycznego płynięcia.

6. Uwagi wstępne

Rozpatrując wpływ temperatury na własności plastyczne i reologiczne metali należy stwierdzić, że jest on powiązany z szeregiem procesów wewnątrzkrystalicznych, a także z procesami zachodzącymi na granicach ziaren w przypadku metali polikrystalicznych. Z tego powodu matematyczny opis zjawiska następuje duże trudności.

Ogólnie uważa się, iż doniosłą rolę w opisie wpływu temperatury na niektóre własności wytrzymałościowe odgrywa tzw. wyrażenie Boltzmann'a $\exp(-Q/kT)$, gdzie Q oznacza energię aktywacji, k stałą Boltzmann'a, a T temperaturę w skali absolutnej. W myśl tego założenia naprężenie plastycznego płynięcia przy stałym



Rys. 2. Zależność współczynnika czułości na prędkość n od odkształcenia dla miedzi według pracy [15]. Wyniki uzyskane z prób skokowych, krzywa 1 zwiększenie prędkości odkształcenia, krzywa 2 zmniejszenie prędkości odkształcenia

odkształceniu i stałej prędkości odkształcenia będzie się zmieniać wraz z temperaturą zgodnie z prawem

$$(6.1) \quad \sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right), \quad \varepsilon = \text{const}, \quad \dot{\varepsilon} = \text{const}.$$

Z założenia energia aktywacji Q jest stałą materiałową, jak wynika jednak z dość licznych danych, np. [21 i 22; 23, 24 i 25], energia aktywacji Q obliczona z zależności typu (6.1) nie jest stała i zależy od naprężenia, odkształcenia i prędkości odkształcenia. Jest to szczególnie widoczne na podstawie danych z pracy [24]. W niektórych przypadkach energia aktywacji może w przybliżeniu wykazywać stałą wartość, np. w przypadku pełzania w wysokiej temperaturze i przy małych jej zmianach; wówczas ma w przybliżeniu wartość energii aktywacji samodyfuzji. Z przedstawionych faktów wynika, że energia aktywacji Q nie jest stałą materiałową w całym zakresie temperatur od 0°K do temperatury topnienia, może być jednak taką stałą w węższych przedziałach temperatur.

7. Niektóre z istniejących równań, uwzględniające wpływ temperatury

Dotychczas zaproponowano kilka równań wiążących naprężenie płynięcia plastycznego z odkształceniem, prędkością odkształcenia i temperaturą. W obecnie omawianym przypadku równania te odnoszą się do takich metali, jak czyste aluminium, miedź, ołów i inne. Jednym z tych równań jest równanie Lubahna [26]:

$$\sigma = CG^T \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{DT} \epsilon \left(E - FT \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right),$$

gdzie C, D, E, F, G i $\dot{\epsilon}_0$ oznaczają stałe materiałowe.

Innym równaniem jest podane np. w pracach [25, 27 i 28] i wielu innych:

$$\dot{\epsilon} = A\sigma^n \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right), \quad \epsilon = \text{const.}$$

Należy stwierdzić, że ostatnia postać została gruntownie zbadana również w warunkach ustalonego pełzania przy małych zmianach temperatury; wykazuje ona dobrą zgodność z doświadczeniem i ma szerokie zastosowanie praktyczne.

Zależność pomiędzy prędkością i temperaturą opisuje się często za pomocą parametru Zenera-Hollomona Z ;

$$Z = \dot{\epsilon} \exp\left(\frac{Q}{kT}\right), \quad \sigma = \text{const}, \quad \epsilon = \text{const.}$$

Parametr Z został szeroko omówiony i zbadany dla pełzania w wysokich temperaturach w pracach Dorna i współpracowników [21 i 22].

MACGREGOR i FISHER zaproponowali parametr o nazwie «temperatura zmodyfikowana przez prędkość» [29 i 30]. Jeżeli parametr ten oznaczmy przez T_* , to

$$T_* = T \left(1 - k \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right), \quad \epsilon = \text{const.}$$

Następnie autorzy prac [29 i 30] sugerują związek $\sigma = f(\epsilon, T_*)$. Przedstawione równanie MacGregora i Fishera można napisać w innej formie:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 e^{1/k} e^{-T_*/kT}.$$

Przedstawiona forma różni się jedynie o stałe w stosunku do parametru Z .

A więc wszystkie postacie, oprócz równania zaproponowanego przez Lubahna, zawierają wyrażenie Boltzmana, za pośrednictwem którego uwzględniono wpływ temperatury.

8. Uwzględnienie temperatury

Jak zostanie niżej wykazane, wszystkie stałe w równaniu (4.2) są zależne od temperatury, równanie można więc napisać w postaci

$$(8.1) \quad \sigma = B(T) \epsilon^{m(T)} \dot{\epsilon}^{n(T)}.$$

Ponieważ w danej temperaturze stałe w równaniu (4.2) są w przybliżeniu równe stałym w równaniu (4.4), przeto przyjmujemy równoważność parami funkcji $B(T)$, $n(T)$, $m(T)$ i funkcji $K(T)$, $\alpha(T)$, $\beta(T)$.

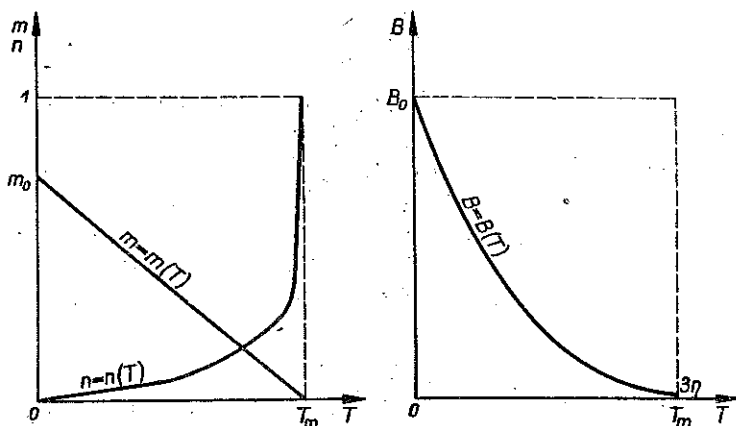
W przypadku $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$ otrzymujemy następujące granice wymienionych funkcji:

$$\lim_{T \rightarrow 0^\circ\text{K}} B(T) = B_0, \quad \lim_{T \rightarrow 0^\circ\text{K}} m(T) = m_0, \quad \lim_{T \rightarrow 0^\circ\text{K}} n(T) = 0.$$

Gdy $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$, równanie (8.1) przyjmie postać

$$(8.2) \quad \sigma = B_0 \varepsilon^{m_0}, \quad T = 0^\circ\text{K},$$

gdzie m_0 oznacza atermiczny wykładnik umocnienia, a B_0 atermiczny moduł plastyczności.



Rys. 3. Schematyczne przedstawienie funkcji $m(T)$, $n(T)$ i $B(T)$

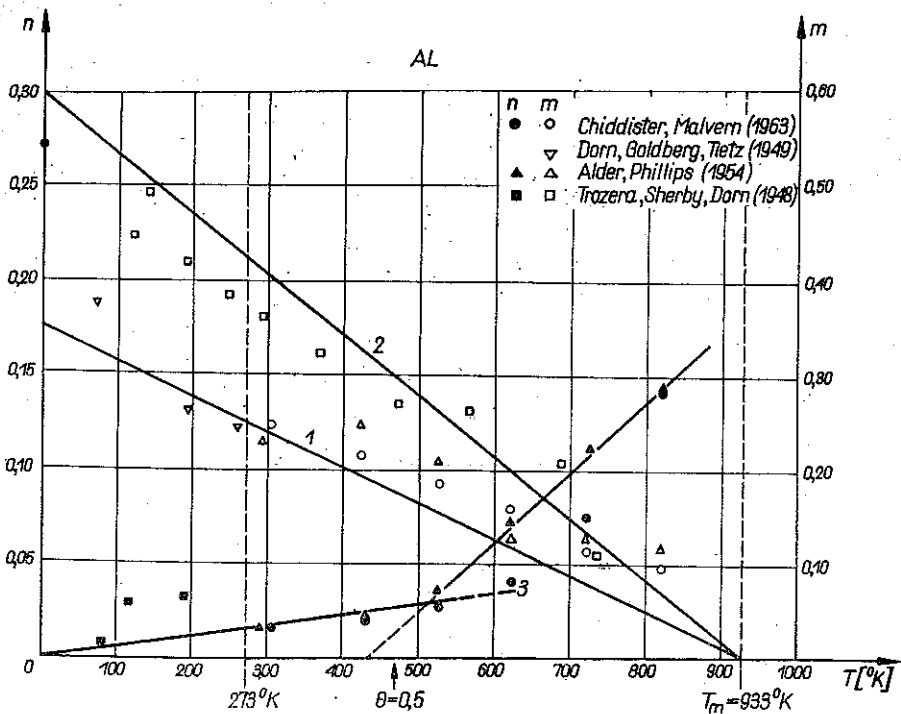
Gdy $T \rightarrow T_m$ (T_m oznacza tutaj temperaturę topienia) lub w skali homologicznej, gdy $\theta \rightarrow 1$ ($\theta = T/T_m$), to mamy

$$\lim_{T \rightarrow T_m} B(T) = 3\eta, \quad \lim_{T \rightarrow T_m} m(T) = 0, \quad \lim_{T \rightarrow T_m} n(T) = 1.$$

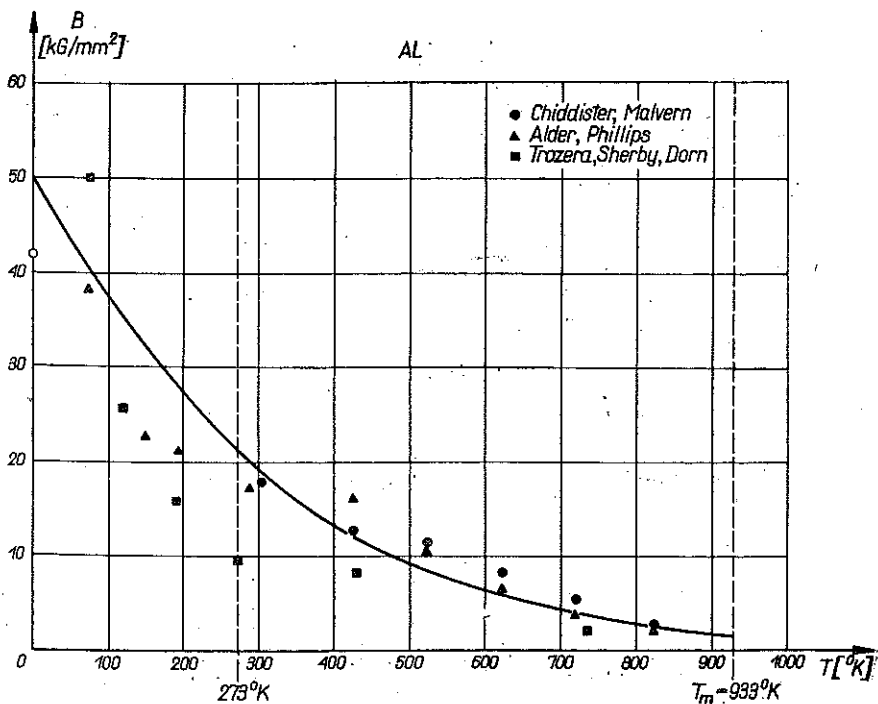
Wówczas równanie (8.1) przyjmuje postać $\tau = \eta \dot{\gamma}$; równanie to odnosi się do cieczy Newtona.

Z porównania przypadków $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$ i $T \rightarrow T_m$ widać, że B maleje wraz ze wzrostem temperatury, gdyż $\eta \ll B$; wykładnik umocnienia m również maleje, natomiast czułość na prędkość n rośnie od zera do jedności. Charakter tych zmian został schematycznie podany na rys. 3.

Aby zbadać funkcje $B(T)$, $m(T)$ i $n(T)$ przeprowadzono szczegółową analizę dostępnych danych doświadczalnych i tak w przypadku aluminium skorzystano z prac [2, 13, 14 i 31], a w przypadku analizy danych dla miedzi z prac [13, 24, 32 i 33]. Wszystkie cytowane prace omawiają wyniki doświadczeń przeprowadzonych w różnych określonych temperaturach i dla kilku różnych prędkości w każdej temperaturze przy zastosowaniu prób na ściskanie lub rozciąganie. Otrzymane

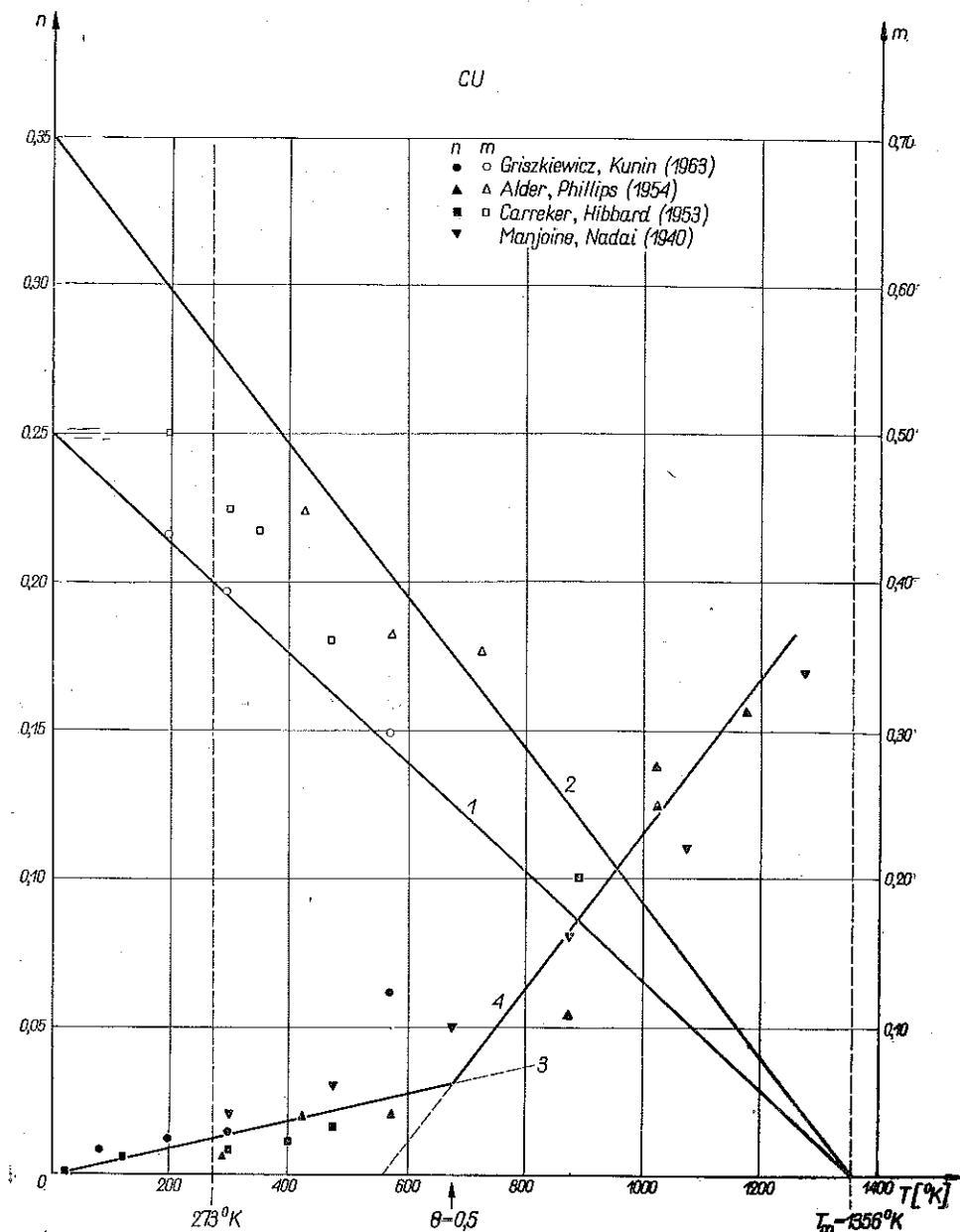


Rys. 4. Zestawienie wyników dla aluminium. Funkcje $m(T)$ i $n(T)$. Linie ciągłe przedstawiają zaproponowane aproksymacje; ● — m_0 według pracy [24]



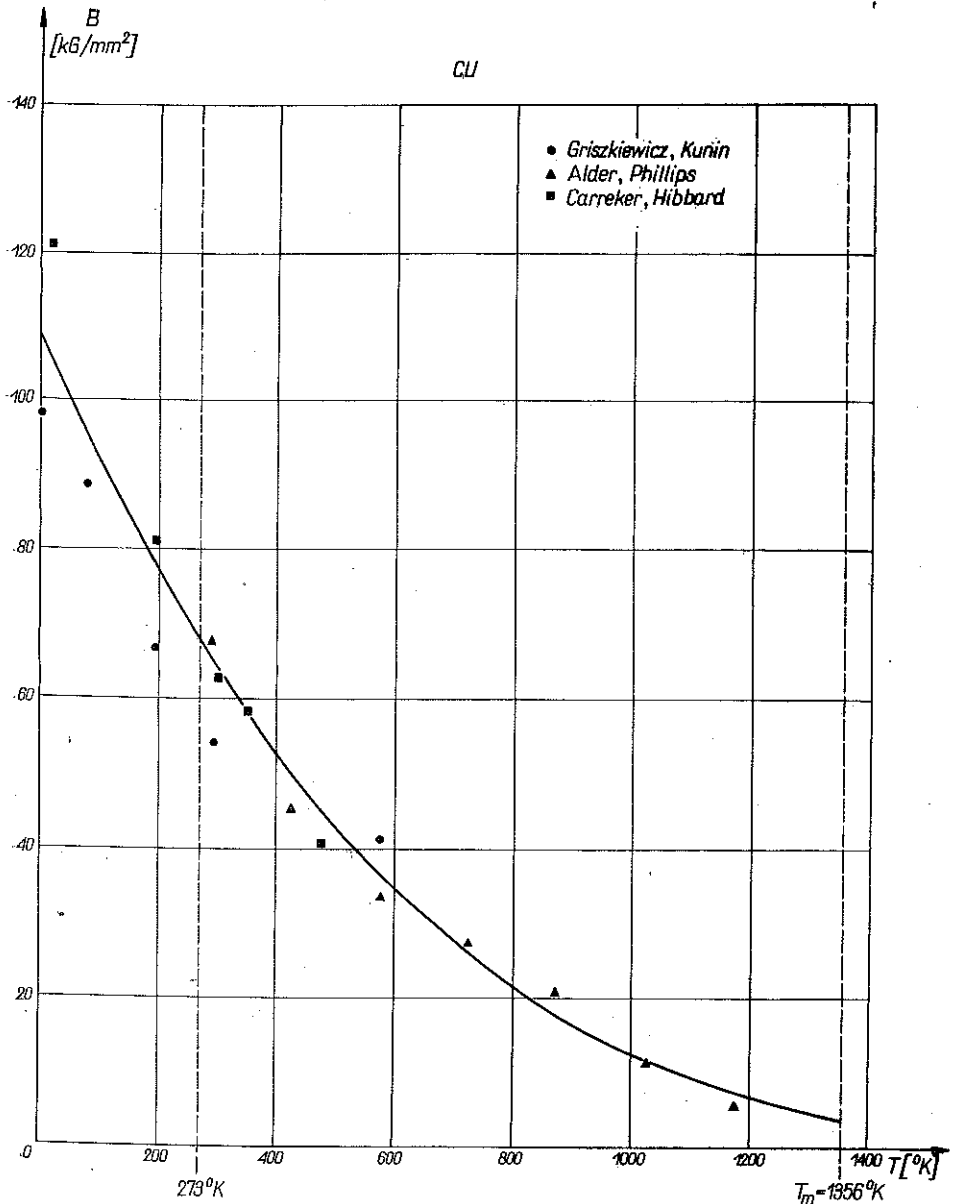
Rys. 5. Zestawienie wyników dla aluminium, funkcja $B(T)$. Linia ciągła przedstawia zaproponowaną aproksymację; ○ — B_0 według pracy [24]

wyniki dla aluminium podano na rysunkach 4 i 5, a dla miedzi na rysunkach 6 i 7. Na rysunkach 4 i 6 przedstawiono zmianę czułości na prędkość n i wykładnika umocnienia m wraz ze wzrostem temperatury. Na rysunkach tych przeprowadzono linie proste, które mogą stosunkowo najlepiej przybliżyć wykres średniej wartości n w zależności od temperatury. Zarówno dla aluminium jak i dla miedzi n wzrasta



Rys. 6. Zestawienie wyników dla miedzi, funkcje $m(T)$ i $n(T)$. Linie ciągłe przedstawiają zaproponowane aproksymacje; ◦ — m_0 według pracy [24]

wraz z temperaturą. Wzrost ten jest powolny w przybliżeniu do $\theta = 0,5$, następnie dla wyższych temperatur znacznie szybszy, jednak nawet dla wysokich temperatur wartość n jest mała w stosunku do jedności. Np. dla miedzi $n \approx 0,17$ w temperaturze około 1250°K ($T_m = 1356^\circ\text{K}$). Należy przypuszczać, że n gwałtownie wzrasta w obszarze kilkunastu stopni poniżej temperatury topnienia dążąc do wartości bliskich jedności; jednak w obszarze tym brak danych doświadczalnych.



Rys. 7. Zestawienie wyników dla miedzi, funkcja $B(T)$. Linia ciągła przedstawia zaproponowaną aproksymację; • — B_0 według pracy [24]

Jako aproksymację funkcji $n(T)$ przyjęto wykres złożony z dwóch linii prostych; wykresy uzyskiwane doświadczalnie przedstawiają na ogół funkcje $n(T)$ ciągłe i monotonicznie rosnące, co jest szczególnie widoczne z danych w pracy [14]. Wykres złożony z dwóch prostych jest zgodny z propozycją podaną w pracy [13 i 33]. W myśl tego trzeba rozróżnić dwa obszary: niskich temperatur (w przybliżeniu $\theta \leq 0,5$) i wysokich temperatur (w przybliżeniu $0,5 \leq \theta \leq 0,92$). Stąd otrzymujemy aproksymację dla niskich temperatur

$$(8.2') \quad n = \alpha T,$$

gdzie α jest stałą materiałową, lub inną postać tej aproksymacji, podaną w pracy [34]:

$$(8.3) \quad n = \alpha_1 \frac{T}{T_m} \quad \text{lub} \quad n = \alpha_1 \theta.$$

W przypadku aluminium otrzymano $\alpha_{Al} = 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{K}$ dla $\theta \leq 0,55$, a w przypadku miedzi $\alpha_{Cu} = 4,45 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{K}$ dla $\theta \leq 0,50$.

Aproksymację dla obszaru wysokich temperatur można przedstawić w postaci

$$(8.4) \quad n = \beta (T - T_*),$$

gdzie β i T_* oznaczają stałe. W przypadku aluminium otrzymano

$$n_{Al} = 3,60 \cdot 10^{-4} (T - 425^\circ\text{K}) \quad \text{dla} \quad 0,92 \geq \theta \geq 0,55;$$

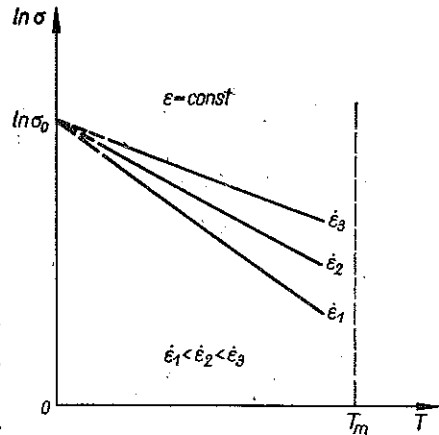
dla miedzi

$$n_{Cu} = 2,61 \cdot 10^{-4} (T - 560^\circ\text{K}) \quad \text{dla} \quad 0,92 \geq \theta \geq 0,50.$$

Trzeba dodać, że funkcji $n(T)$ w całym zakresie temperatur nie daje się przybliżyć żadną prostą funkcją. Najlepszą okazuje się aproksymacja odcinkowo-liniowa.

Zgodnie z otrzymanymi wynikami dla aluminium i miedzi przedstawionymi na rys. 4 i 6 wykładnik umocnienia m maleje w przybliżeniu liniowo wraz ze wzrostem temperatury. Zmniejszanie m rozpoczyna się od wartości granicznej m_0 (atermiczny wykładnik umocnienia). Jak stwierdzono, wartości atermicznego wykładnika umocnienia wahają się w przybliżeniu w granicach $0,50 \leq m_0 \leq 0,70$. Na rysunkach zaznaczono prostymi skrajne aproksymacje funkcji $m(T)$ dla podanych granicznych wartości m_0 . W każdym poszczególnym przypadku użytego gatunku miedzi lub aluminium m_0 ma określoną stałą wartość. Jak wynika z istniejących danych, zwłaszcza podanych w pracy [33], wartość m_0 jest funkcją wielkości ziarna; zagadnienie to zostanie omówione w dalszej części pracy.

Wartość m_0 można wyznaczać dwiema metodami. Pierwsza z nich, zaproponowana w pracy [24], została szkicowo przedstawiona na rys. 8. Polega ona na wyznaczeniu rodziny punktów σ_0 w sposób podany na rys. 8 dla poszczególnych



Rys. 8. Schematyczne przedstawienie metody z pracy [24], mającej na celu wyznaczenie atermicznej krzywej umocnienia $\sigma = B_0 \varepsilon^{m_0}$. Postępowanie należy powtarzać dla kilku wartości ε

wartości odkształceń na podstawie prób z różnymi prędkościami w poszczególnych temperaturach i znalezieniu zależności $\sigma_0 = B_0 \varepsilon^{m_0}$ dla $T = 0^\circ\text{K}$.

W drugiej metodzie przedłuża się wykres $m(T)$ do przecięcia z osią $T = 0^\circ\text{K}$; punkt przecięcia wyznacza wartość m_0 . Tę metodę zastosowano w obecnej pracy.

Zgodnie z poprzednimi uwagami funkcję $m(T)$ można napisać w postaci

$$(8.5) \quad m = m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) \quad \text{lub} \quad m = m_0 (1 - \theta);$$

w przypadku $m_0 = 0,5$, $m = (1 - \theta)/2$.

W podanej liniowej postaci funkcji $m(T)$ zakłada się, że pozostaje ona liniowa powyżej temperatury rekrytalizacji. Dane doświadczalne uzyskane w obszarze nieco powyżej temperatury rekrytalizacji wskazywałyby, że założenie to jest słuszne, jednak dla bardzo wysokich temperatur brak jest danych doświadczalnych.

Wykresy funkcji $B(T)$ dla aluminium i miedzi zostały podane na rys. 5 i 7. Jak wynika z przedstawionych wykresów, $B(T)$ jest funkcją monotonicznie malejącą wraz ze wzrostem temperatury. Najlepszą aproksymacją funkcji $B(T)$ okazuje się funkcja

$$(8.6) \quad B = C \exp\left(\frac{q'}{T + T_0}\right),$$

gdzie q , T_0 i C oznaczają stałe materiałowe.

Aproksymacja z wyrażeniem Boltzmanna $B = C \exp(q'/T)$ może w omawianym przypadku służyć jako aproksymacja lokalna w podwyższonych temperaturach. Postać (8.6) usprawiedliwiona jest tym, że funkcja $B(T)$ osiąga skończoną wartość dla $T = 0^\circ\text{K}$ i w tym przypadku $B_0 = \exp(q'/T_0)$. Stała T_0 wyznacza położenie asymptoty funkcji dla równania (8.6). Asymptota przecina oś temperatury na lewo od zera bezwzględnego. Mając dane dwa punkty na wykresie $B(T)$ oraz wartość B_0 , stałą T_0 znajduje się ze wzoru

$$(8.7) \quad T_0 = \frac{T_1(A - 1)}{\frac{T_1}{T_2} - A}, \quad T_1 > T_2,$$

gdzie

$$A = \frac{\log \frac{B_0}{B_1}}{\log \frac{B_0}{B_2}}, \quad B_1 < B_2.$$

Stałą q znajdujemy ze wzoru

$$(8.8) \quad q = \frac{\log \frac{B_0}{B_1}}{M \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1 + T_0} \right)},$$

gdzie $M = \log e$.

W przypadku gdy funkcja $B(T)$ nie jest znana nawet przy trzech wartościach temperatury, można skorzystać z poniższego oszacowania. Oszacowanie jest możliwe, gdy są znane dwa punkty z dwóch wykresów rozciągania dla jednakowych prędkości odkształcenia w dwóch różnych temperaturach:

$$(8.9) \quad q = \frac{\log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \log \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{n(T_2)-n(T_1)}}{\varepsilon^{m(T_1)-m(T_2)}} \right)}{M \left(\frac{1}{T_2+T_0} - \frac{1}{T_1+T_0} \right)}$$

Po rozdzieleniu ułamka na dwa składniki mamy

$$q = q(T) + q_1(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}),$$

gdzie

$$q(T) = \frac{\log \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{M \left(\frac{1}{T_2+T_0} - \frac{1}{T_1+T_0} \right)}$$

Gdy wyrażenie $q_1(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$ jest równe zero, otrzymujemy ścisłą wartość q ; taki przypadek jest możliwy dla

$$\dot{\varepsilon}^{n(T_2)-n(T_1)} = \varepsilon^{m(T_1)-m(T_2)}$$

Wartość wyrażenia $q_1(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$ zmniejsza się również, gdy $T_1 \rightarrow T_2$ i stąd aproksymacja jest słuszna dla małego skoku temperatury nawet w przypadku, gdy $q_1(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) \neq 0$. Wówczas błąd takiego oszacowania q wynosi

$$(8.10) \quad \delta = \left| \frac{q_1(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{q(T)} \right|, \quad \delta = \left| \frac{\log \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{n(T_2)-n(T_1)}}{\varepsilon^{m(T_1)-m(T_2)}} \right)}{\log \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right|$$

O ile żądamy nieprzekroczenia pewnego ustalonego błędu δ w oszacowaniu q , to

$$(8.11) \quad \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^\delta \geq \frac{\dot{\varepsilon}^{n(T_2)-n(T_1)}}{\varepsilon^{m(T_1)-m(T_2)}}$$

Znalezienie stałej C nie przedstawia większych trudności, można ją np. znaleźć ze związku $C = B_0 \exp(-q/T_0)$.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano następujące wartości stałych:

dla aluminium	dla miedzi
$B_0 = 50 \text{ kG/mm}^2$,	$B_0 = 108 \text{ kG/mm}^2$,
$q = 2,483 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$,	$q = 2,854 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$,
$T_0 = -2980 \text{ }^\circ\text{K}$,	$T_0 = -4160 \text{ }^\circ\text{K}$,
$C = 2,080 \cdot 10^5 \text{ kG/mm}^2$;	$C = 1,013 \cdot 10^5 \text{ kG/mm}^2$.

Na rysunkach 5 i 7 naniesiono linią ciągłą funkcje $B(T)$, które odpowiadają przyjętej formie równania (8.6) i otrzymanych stałych. Autorzy pracy [24] otrzymali następujące wartości: $B_{0Al} = 43 \text{ kG/mm}^2$ (według danych z pracy [31]) oraz $B_{0Cu} = 98 \text{ kG/mm}^2$. Dane te są w przybliżeniu zgodne z obecnie otrzymanymi.

Zamiast stałej T_0 można wprowadzić jej odpowiednik w skali temperatury homologicznej θ_0 , gdzie $\theta_0 = T_0/T_m$. Dla aluminium i miedzi otrzymujemy odpowiednio

$$\theta_{0Al} = -3,19, \quad \theta_{0Cu} = -3,06.$$

Należy więc stwierdzić, że asymptota dla równania (8.6) jest w przybliżeniu oddalona od zera bezwzględnego o trzy wartości temperatury topnienia, stąd $T_0 \approx -3T_m$.

Stałą q można traktować jako wielkość proporcjonalną do absolutnej energii aktywacji Q ; w tym przypadku Q nie zależy od żadnej ze zmiennych i stąd użyty termin «absolutna», $Q = qR$, gdzie R oznacza stałą gazową. Tak uzyskana absolutna energia aktywacji wynosi odpowiednio dla aluminium i miedzi $Q_{Al} = 49350 \text{ cal/mol}$, $Q_{Cu} = 56500 \text{ cal/mol}$. W myśl tych wniosków funkcję aproksymacyjną funkcji $B(T)$ napiszemy w postaci

$$(8.12) \quad B = C \exp\left[\frac{Q}{R(T-3T_m)}\right], \quad \frac{Q}{R} = q.$$

Po wykorzystaniu otrzymanych zależności (8.2), (8.4), (8.5) i (8.6) prawo (8.1) będzie posiadać następujące formy zależne od temperatury:

a. Dla niskich temperatur $T \leq 0,5 T_m$ mamy

$$(8.13) \quad d\sigma = m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon} d\varepsilon + \alpha T \frac{\sigma}{\varepsilon} d\varepsilon + \sigma \ln \left[\varepsilon^{-\frac{m_0}{T_m}} \varepsilon^{\alpha} \exp\left(-\frac{q}{(T+T_0)^2}\right) \right] dT.$$

Stąd

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \alpha T \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \sigma \ln \left[\varepsilon^{-\frac{m_0}{T_m}} \varepsilon^{\alpha} \exp\left(-\frac{q}{(T+T_0)^2}\right) \right].$$

Na podkreślenie zasługuje fakt, że $\partial \sigma / \partial T$ jest nie tylko funkcją $\exp[q/(T+T_0)]$, lecz również zależy od odkształcenia i prędkości odkształcenia. Prawo w postaci scałkowanej przedstawia się następująco:

$$(8.14) \quad \sigma = C \varepsilon^{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)} \varepsilon^{\alpha T} \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right), \quad T \leq 0,5 T_m.$$

Dla pełnego opisu zachowania się krzywej umocnienia przy $T \leq 0,5 T_m$ w zależności od temperatury, odkształcenia i prędkości odkształcenia takich metali, jak aluminium i miedź, jest potrzebna znajomość następujących pięciu stałych materia-

łowych: m_0 , a , C , T_m i q ($T_0 \approx -3 T_m$). W myśl koncepcji mechanicznego równania stanu równania (8.13) i (8.14) muszą spełniać następujące warunki istnienia różniczki zupełnej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}} \left[m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m} \right) \frac{\sigma}{\varepsilon} \right] &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{dT}{\dot{\varepsilon}} \sigma \right], \\ \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{dT}{\dot{\varepsilon}} \sigma \right] &= \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}} \left\{ \sigma \ln \left[\varepsilon^{-\frac{m_0}{T_m}} \dot{\varepsilon}^a \exp \left(-\frac{q}{(T+T_0)^2} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial T} \left[m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m} \right) \frac{\sigma}{\varepsilon} \right] &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \sigma \ln \left[\varepsilon^{-\frac{m_0}{T_m}} \dot{\varepsilon}^a \exp \left(-\frac{q}{(T+T_0)^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Warunki te można by sprawdzić doświadczalnie.

W przypadku $T_0 = 0$, $q = q'$, $C = C_1$ otrzymujemy aproksymację lokalną w omawianym obszarze temperatury; wówczas

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{\frac{m_0}{T_m} \left(1 - \frac{T}{T_m} \right)} \dot{\varepsilon}^{aT} \exp \left(\frac{q'}{T} \right), \quad T \leq 0,5 T_m.$$

Po uwzględnieniu parametru Zenera-Hollomona otrzymamy

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{\frac{m_0}{T_m} \left(1 - \frac{T}{T_m} \right)} Z^{\frac{1}{aT}},$$

o ile

$$Z = \dot{\varepsilon} \exp \left(\frac{Q'}{RT} \right), \quad Q' = \frac{Rq'}{aT}.$$

b. Dla wysokich temperatur $T \geq 0,5 T_m$ mamy (wariant pierwszy)

$$(8.15) \quad d\sigma = m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m} \right) \frac{\sigma}{\varepsilon} d\varepsilon + \beta (T - T_*) \frac{\sigma}{\varepsilon} d\dot{\varepsilon} + \\ + \sigma \ln \left[\varepsilon^{\frac{m_0}{T_m}} \dot{\varepsilon}^\beta \exp \left(-\frac{q}{(T+T_0)^2} \right) \right] dT.$$

W tym przypadku zamiast funkcji (8.2) wprowadza się oczywiście funkcję (8.4), która jest przyjętą aproksymacją funkcji $n(T)$ w obszarze wysokich temperatur. Pochodne $\partial\sigma/\partial\dot{\varepsilon}$ i $\partial\sigma/\partial T$ zmieniają się nieznacznie w porównaniu z przypadkiem poprzednim; pochodna $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ pozostaje bez zmiany:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} = \beta (T - T_*) \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial T} = \sigma \ln \left[\varepsilon^{-\frac{m_0}{T_m}} \dot{\varepsilon}^\beta \exp \left(-\frac{q}{(T+T_0)^2} \right) \right].$$

Dla całkowitego określenia krzywej umocnienia w obszarze wysokich temperatur potrzebna jest znajomość następujących sześciu stałych materiałowych: m_0 , β , C , T_m , T_* i q ($T_0 \approx -3 T_m$). Natomiast warunki dla istnienia różniczki zupełnej

będą posiadać podobną formę jak w przypadku poprzednim. Po scałkowaniu równanie (8.15) przyjmie następującą postać

$$(8.16) \quad \sigma = C \varepsilon^{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)} \dot{\varepsilon}^{\beta(T-T_*)} \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right), \quad T \geq 0,5 T_m.$$

c. Drugi wariant dla wysokich temperatur $T \geq 0,5 T_m$. Przypadek ten jest szczególnym przypadkiem poprzedniego i uwzględnia wyrażenia Boltzmann'a $B = C_1 \exp(q'/T)$ a więc $T_0 = 0$:

$$(8.17) \quad \sigma = C_1 \varepsilon^{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)} \dot{\varepsilon}^{\beta(T-T_*)} \exp\left(\frac{q'}{T}\right),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \sigma \ln \left[\varepsilon^{-\frac{m_0}{T_m}} \dot{\varepsilon}^{-\beta} \exp\left(-\frac{q'}{T^2}\right) \right].$$

Aby wprowadzić parametr Zenera-Hollomona, równanie (8.17) można przedstawić w postaci

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)} \left[\dot{\varepsilon} \exp\left(\frac{q'}{\beta T(T-T_*)}\right) \right]^{\frac{1}{\beta(T-T_*)}},$$

o ile

$$Z = \dot{\varepsilon} \exp\left(\frac{Q'}{RT}\right) \quad \text{oraz} \quad Q' = \frac{q'R}{\beta(T-T_*)}.$$

Wówczas

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)} Z^{\frac{1}{\beta(T-T_*)}}, \quad T \geq 0,5 T_m.$$

Omawiany przypadek może być wyzyskany dla dobrej aproksymacji lokalnej (charakter lokalny aproksymacji wynika z zależności Q' od temperatury).

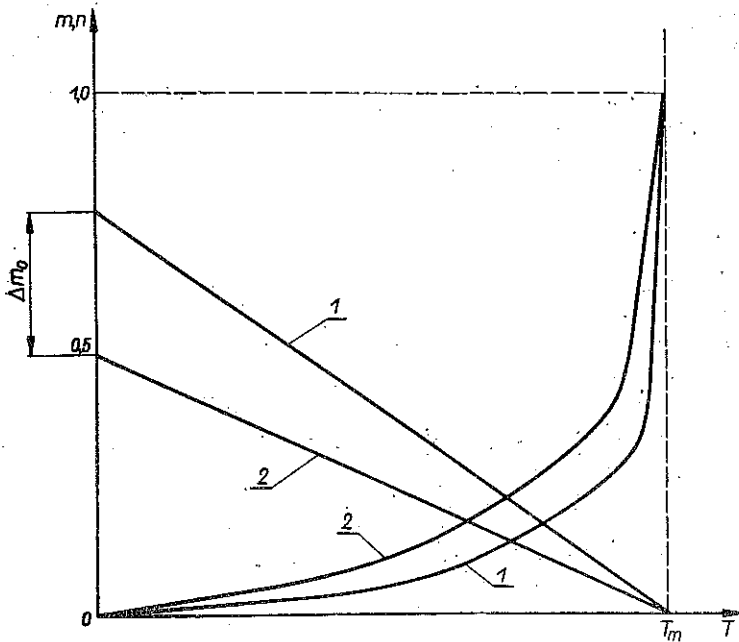
Wszystkie przedstawione przypadki obejmują po dwie kombinacje aproksymacji funkcji $n(T)$ i $B(T)$, stanowiące cztery podstawowe zależności, opisujące krzywe umocnienia aluminium i miedzi. Pomimo że dwa z tych przypadków uchodzą za aproksymację lokalną, praktycznie i dwa pozostałe są słuszne tylko w pewnych ograniczonych przedziałach $\dot{\varepsilon}$ i T . Fakt ten wiąże się z efektami «historii prędkości» i «historii temperatury».

9. Wpływ wielkości ziarna

Dotychczas brak większej liczby danych, które mogłyby być użyteczne dla przedyskutowania tego zagadnienia pod względem ilościowym. Jedyną pracą, która podaje pewne rezultaty badań przeprowadzonych na miedzi jest praca [33]. Wspomniana praca jak i obserwacje autora nad zachowaniem się omawianych metali mogłyby prowadzić do następujących wniosków:

Metal umacnia się bardziej intensywnie, wykazując większe wartości wykładnika umocnienia m , gdy posiada większe ziarno. Metal jest bardziej wrażliwy na prędkość odkształcenia i wykazuje większą czułość na prędkość n , gdy posiada mniejsze ziarno.

Podane wnioski ilustruje rys. 9, na którym schematycznie przedstawiono funkcje $m(T)$ i $n(T)$ w przypadkach małego i dużego ziarna. Obecnie nie można również podać wpływu wielkości ziarna na kształt funkcji $B(T)$.



Rys. 9. Schematyczne przedstawienie wpływu wielkości ziarna na funkcje $m(T)$ i $n(T)$. Krzywe 1 odnoszą się do dużego ziarna, krzywe 2 do małego

Tak więc od wielkości ziarna zależą m_0 , α , T_* oraz β , a także prawdopodobnie C . Stała m_0 będzie się zmieniać w przedziale oznaczonym Δm_0 (rys. 9) i dla małego ziarna jej wartość może się zmniejszyć do 1/2. Natomiast α , β , i T_* będą większe dla małego ziarna w porównaniu z dużym.

10. Krzywa pełzania zależna od temperatury

Przyjęcie jakiegokolwiek związku pomiędzy σ , ε , $\dot{\varepsilon}$ i T pociąga za sobą konsekwencje w opisie schematów odkształcania, w których ingerują własności reologiczne danego metalu. Oczywiście jednym z takich schematów jest proces pełzania.

Na wstępie należy stwierdzić, że założenie o istnieniu mechanicznego równania stanu pozwala na określenie rodziny krzywych pełzania w sposób przedstawiony poniżej. Naturalnie muszą być wówczas spełnione warunki 2, 3 i 4. Prowadzi to do wniosku, że zgodność z doświadczeniem określonej teoretycznie krzywej pełzania będzie dobra tylko w ograniczonym obszarze prędkości pełzania i temperatury.

W celu obliczenia krzywej pełzania skorzystamy z zależności (10.1)

$$(10.1) \quad t = \int [\dot{\varepsilon}(\varepsilon)]^{-1} d\varepsilon + C,$$

gdzie $\dot{\varepsilon}$ jest funkcją ε .

Wobec istnienia dwóch odrębnych aproksymacji funkcji $n(T)$ w obszarach niskich i wysokich temperatur będą również istnieć dwa wzory określające krzywe pełzania w tych zakresach temperatur. Jeśli temperatura zostanie potraktowana jako parametr, równania krzywych pełzania można napisać w postaci różniczkowej lub scałkowanej po wykorzystaniu związku (10.1) i związków (8.14) dla $T \leq 0,5 T_m$ oraz (8.16) dla $T \geq 0,5 T_m$:

$$(10.2) \quad \dot{\varepsilon}^{-1} = \left(\frac{C}{\sigma_*} \right)^{\frac{1}{\alpha T}} \frac{m_0}{\varepsilon} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right) \exp \left(\frac{q}{\alpha T (T+T_0)} \right), \quad T \leq 0,5 T_m.$$

Po scałkowaniu wzoru (10.1) (T traktujemy jako parametr) i wykorzystaniu warunków początkowych $t = 0$, $\varepsilon = 0$ mamy

$$(10.3) \quad \varepsilon = \left\{ \frac{\sigma_*}{C} \exp \left(- \frac{q}{T+T_0} \right) \left[\frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right) + 1 \right] t \right\}^{\alpha T} \frac{1}{m_0 + T \left(\alpha - \frac{m_0}{T_m} \right)},$$

$$T \leq 0,5 T_m,$$

Przez σ_* oznaczono naprężenie w próbie pełzania. Dla przypadku warunków początkowych $t = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_*$ mamy

$$(10.4) \quad \varepsilon = \varepsilon_* \left\{ \left[\frac{\sigma_*}{C \varepsilon_*^{m_0 + T \left(\alpha - \frac{m_0}{T_m} \right)}} \exp \left(- \frac{q}{T+T_0} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha T}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right) + 1 \right] t + 1 \right\}^{\frac{\alpha T}{m_0 + T \left(\alpha - \frac{m_0}{T_m} \right)}}.$$

Dla obszaru wysokich temperatur otrzymujemy w sposób analogiczny

$$(10.5) \quad \dot{\varepsilon}^{-1} = \left(\frac{C}{\sigma_*} \right)^{\frac{1}{\beta(T-T_*)}} \frac{m_0}{\varepsilon} \frac{(T_m - T)}{\beta T_m (T - T_*)} \exp \left[\frac{q}{\beta (T - T_*) (T + T_0)} \right], \quad T \geq 0,5 T_m$$

lub po scałkowaniu i po uwzględnieniu warunków początkowych $t = 0$, $\varepsilon = 0$

$$(10.6) \quad \varepsilon = \left\{ \frac{\sigma_*}{C} \exp \left(- \frac{q}{T+T_0} \right) \left[\frac{T \left(\beta - \frac{m_0}{T_m} \right) + m_0 - \beta T_*}{\beta (T - T_*)} t \right]^{\beta (T - T_*)} \right\}^{\frac{1}{T \left(\beta - \frac{m_0}{T_m} \right) + m_0 - \beta T_*}},$$

$$T \geq 0,5 T_m.$$

W przypadku warunków początkowych $t = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_*$ otrzymujemy

$$(10.7) \quad \varepsilon = \varepsilon_* \left\{ \left[\frac{\sigma_* \exp \left(- \frac{q}{T+T_0} \right)}{C \varepsilon_*^{T \left(\beta - \frac{m_0}{T_m} \right) + m_0 - \beta T_*}} \right] \left[\frac{T \left(\beta - \frac{m_0}{T_m} \right) + m_0 - \beta T_*}{\beta (T - T_*)} t + 1 \right] \right\}^{\frac{m_0 (T_m - T)}{\beta T_m (T - T_*)} + 1}$$

Przedstawione równania pełzania są słuszne, gdy T traktuje się jako parametr. W przypadku zmieniającej się temperatury w trakcie pełzania temperatura jest

funkcją czasu, $T = T(t)$; wówczas nie jest możliwe scałkowanie równań (10.2) i (10.5) w postaci zamkniętej. Jednak dla określonej funkcji $T = T(t)$, gdzie t oznacza czas, można otrzymać krzywą pełzania na drodze numerycznej.

Należy także przypuszczać, że równania (10.2) i (10.5) nie będą ściśle określać rzeczywistych krzywych pełzania przy zbyt dużych skokach temperatury ze względu na istniejące efekty związane z odpowiednio dużymi zmianami temperatury. Z drugiej strony, w miarę wzrostu temperatury czas pełzania, dla którego podane równania będą słuszne, zmniejsza się ze względu na szybsze pojawianie się drugiego stadium pełzania (pełzanie ustalone).

Krzywa pełzania w przypadku zależności temperatury od czasu może być napisana w postaci różniczkowej dla obszaru niskich temperatur po wprowadzeniu oznaczeń

$$(10.8) \quad \psi(t) = \left(\frac{C}{\sigma_*} \right)^{\frac{1}{\alpha T(t)}} \exp \left[\frac{q}{\alpha T(t) [T(t) + T_0]} \right],$$

$$\xi(t) = \frac{m_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T(t)} - \frac{1}{T_m} \right), \quad T \leq 0,5 T_m,$$

$$\frac{1}{\psi(t)} = \varepsilon^{\xi(t)} \dot{\varepsilon}.$$

Dla wysokich temperatur otrzymuje się równanie takiego samego typu jak (10.8) o nieco innych funkcjach $\psi(t)$ i $\xi(t)$.

11. Krzywa relaksacji zależna od temperatury

W procesie relaksacji muszą być także spełnione warunki 2, 3 i 4 z tym jednak zastrzeżeniem, że warunek 2 dotyczy prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\varepsilon}_p$. Opis relaksacji komplikuje się również z tego względu, że przy odpowiednio dużym zmniejszeniu naprężenia pojawia się zjawisko odwrotnego pełzania. Ponadto poniżej pewnego naprężenia droga obciążania na wykresie $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ nie jest linią prostą i prawo odciążania nie jest wówczas prawem Hooke'a. Z tych względów podane niżej prawa są jedynie pewnym przybliżeniem. Jak wynika jednak z doświadczeń przeprowadzonych na miedzi przez DAVIS [18] takie przybliżenie można uważać za dobre.

W celu obliczenia krzywej relaksacji skorzystamy z zależności

$$(11.1) \quad t = \frac{1}{E} \int [\dot{\varepsilon}_p(\sigma)]^{-1} (-d\sigma) + C.$$

Funkcję $\dot{\varepsilon}_p(\sigma)$, która opisuje zmianę prędkości odkształcenia plastycznego w procesie relaksacji, znajduje się z zależności (8.16) dla obszaru wysokich temperatur lub (8.14) dla obszaru niskich temperatur.

Dla obszaru niskich temperatur funkcja $\varepsilon_p(\sigma)$ przedstawi się w postaci

$$(11.2) \quad \dot{\varepsilon}_p^{-1} = \left[\frac{C \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right)}{\sigma_* [E(T)]^{m_0 \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)}} \right]^{\frac{1}{aT}} (\sigma_* - \sigma)^{\frac{m_0(T_m - T)}{aTmT}} \left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^{\frac{1}{aT}}, \quad T \leq 0,5 T_m,$$

gdzie przez $E(T)$ oznaczono moduł Younga jako funkcję temperatury, a przez σ_* początkowe naprężenie w procesie relaksacji.

Po podstawieniu funkcji $\dot{\varepsilon}_p(\sigma)$ do równania (11.1) rozwiązanie tego równania nie daje się obliczyć w prosty sposób, gdy wykładniki nie są liczbami całkowitymi. Otrzymaną całkę można sprowadzić do niekompletnej funkcji Beta (niekompletna całka Eulera pierwszego rodzaju). Przybliżoną wartość otrzymanej całki można znaleźć ze wzoru podanego przez SOPERA [35] lub przez rozłożenie funkcji podcałkowej w szereg, a także przez zamianę wykładników na liczby całkowite.

Aby znaleźć krzywą relaksacji należy znać również funkcję $E = E(T)$. Dla aluminium funkcję $E = E(T)$ najlepiej przybliżyć wielomianem o postaci

$$E = E_0 - \xi\theta^2,$$

gdzie

$$\theta = T/T_m.$$

Ponieważ $E_0 = 6,79 \cdot 10^3$ kG/mm² i $\xi = 5,5 \cdot 10^3$ kG/mm², więc dla aluminium mamy $E = 5,5 \cdot 10^3 (1,234 - \theta^2)$ [kG/mm²] dla $0 < \theta \leq 0,95$. Dla miedzi okazuje się wystarczająca aproksymacja liniowa, słuszna w obszarze $0,1 \leq \theta \leq 0,9$:

$$E = E_0 - \xi\theta, \quad \theta = \frac{T}{T_m}.$$

Ponieważ $E_0 = 1,5 \cdot 10^4$ kG/mm² i $\xi = 1,138 \cdot 10^4$ kG/mm², więc

$$E = 1,138 \cdot 10^4 (1,318 - \theta) \text{ [kG/mm}^2\text{]} \quad \text{dla} \quad 0,1 \leq \theta \leq 0,9.$$

Korzystając z wzoru Sopera otrzymujemy przybliżone równanie relaksacji z temperaturą jako parametrem, słuszne w obszarze niskich temperatur:

$$(11.3) \quad t = \frac{\left[C \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right) \right]^{\frac{1}{aT}} \sigma_*^{\zeta(T) - \frac{1}{aT}} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{\zeta(T)}}{\zeta(T) [E(T)]^{\zeta(T)} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{\frac{1}{aT} - 1}}, \quad T \leq 0,5 T_m,$$

gdzie

$$\zeta(T) = \frac{T \left(\alpha - \frac{m_0}{T_m} \right) + m_0}{aT}, \quad E(T) = E_0 \left[1 - \frac{\xi}{T_m^2} T^2 \right].$$

Błąd procentowy w wyniku całkowania wynosi

$$\delta_{\%} < \frac{50}{aT} \left[T \left(2\alpha - \frac{m_0}{T_m} \right) + m_0 - 1 \right] \left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1 \right).$$

Dla obszaru wysokich temperatur postać przybliżonego równania relaksacji będzie podobna:

$$(11.4) \quad t = \frac{\left[C \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right) \right]^{\frac{1}{\beta(T-T_*)}} \sigma_*^{\eta(T) - \frac{1}{\beta(T-T_*)}} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{\eta(T)}}{\eta(T) [E(T)]^{\eta(T)}} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{\frac{1}{\beta(T-T_*)} - 1}, \quad T \geq 0,5 T_m,$$

gdzie

$$\eta(T) = \frac{T\left(\beta - \frac{m_0}{T_m}\right) + m_0 - \beta T_*}{\beta(T - T_*)}.$$

Błąd procentowy w tym przypadku wynosi

$$\delta_{\%} < \frac{50}{\beta(T - T_*)} \left[T\left(2\beta - \frac{m_0}{T_m}\right) + m_0 - 2\beta T_* - 1 \right] \left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1\right).$$

Gdy temperatura zmienia się w czasie procesu relaksacji, jest możliwe podanie jedynie równań relaksacji dla obydwóch przypadków temperatury w postaci różniczkowej, przy czym zakłada się istnienie pewnej zależności temperatury od czasu, $T = T(t)$:

$$(11.5) \quad -\dot{\sigma}^{-1} = \left[\frac{C \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right)}{\sigma_* [E(T)]^{T\left(\beta - \frac{m_0}{T_m}\right) + m_0}} \right]^{\frac{1}{\alpha T}} (\sigma_* - \sigma)^{\frac{T_0}{\alpha} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m}\right)} \left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha T}}, \quad T \leq 0,5 T_m, \\ T = T(t)$$

lub w przypadku wysokich temperatur

$$(11.6) \quad -\dot{\sigma}^{-1} = \left[\frac{C \exp\left(\frac{q}{T+T_0}\right)}{\sigma_* [E(T)]^{T\left(\beta - \frac{m_0}{T_m}\right) + m_0 - \beta T_*}} \right]^{\frac{1}{\beta(T-T_*)}} (\sigma_* - \sigma)^{\frac{m_0}{\beta T_m} \left(\frac{T_m - T}{T - T_*}\right)} \left(\frac{\sigma_*}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\beta(T-T_*)}}, \\ T \geq 0,5 T_m, \quad T = T(t).$$

12. Uwagi końcowe

Otrzymane równania wpływu odkształcenia, prędkości odkształcenia i temperatury na krzywą umocnienia są w stanie opisać zachowanie się takich metali jak aluminium, miedź, ołów, o ile są spełnione wymienione poprzednio cztery warunki.

Równania podstawowe zostały uzyskane za pomocą analizy wyników doświadczalnych, otrzymanych w próbach rozciągania lub ściskania przy zachowaniu stałych prędkości w różnych temperaturach. Równania te dobrze przedstawiają pierwsze stadium pełzania oraz zjawisko relaksacji przy traktowaniu temperatury jako parametru. W przypadku zależności od czasu otrzymano równania różniczkowe opisujące obydwa zjawiska. W konkretnym przypadku, kiedy znana jest zależność tem-

peratury od czasu, można otrzymać odpowiednie wyniki na drodze numerycznej. Należy jednak ograniczyć zmiany temperatury ze względu na dodatkowe efekty pojawiające się przy dużych jej zmianach.

Literatura cytowana w tekście

1. P. LUDWIK, *Elemente der technologischen Mechanik*, Springer, Berlin 1909.
2. J. E. DORN, A. GOLDBERG, T. E. TIETZ, *The effect of thermal mechanical history on the strain hardening of metals*, Trans. AIME, **180** (1949), 205.
3. T. E. TIETZ, J. E. DORN, *The effect of strain histories on the work hardening of metals*, Trans. ASM, **41A** (1949), 163.
4. O. D. SHERBY, A. GOLDBERG, J. E. DORN, *Effect of prestrain histories on the creep and tensile properties of aluminium*, Trans. ASM, **46** (1954), 681.
5. J. D. LUBAHN, R. P. FELGAR, *Plasticity and Creep of Metals*, J. Wiley 1961.
6. J. H. HOLLOWOM, *The mechanical equation of state*, Trans. AIME, **171** (1947), 535.
7. Л. И. ВАСИЛЬЕВ, Л. И. ЭРМИНА, *О некоторых особенностях пластического растяжения с переменной скоростью*, ДАН, **93** (1953), 1019.
8. Л. И. ВАСИЛЬЕВ, А. С. БЫЛИНА, М. Т. ЗАГРЕБЕННИКОВА, *О влиянии переменной скорости деформирования на пластическое растяжение*, ДАН, **90**, (1953), 767.
9. H. A. LEQUEAR, J. D. LUBAHN, *Some transient effects during creep and tensile of an aluminium alloy*, Trans. AIME, **206** (1956), 497.
10. J. KLEPACZKO, *Zjawisko starzenia podczas deformacji plastycznej i wpływ prędkości odkształcenia dla aluminium*, Rozpr. Inżyn., **3**, **12** (1964).
11. J. D. LUBAHN, *Strain aging effects*, Trans. ASM, **44** (1952), 643.
12. B. CHALMERS, *Physical Metallurgy*, J. Wiley 1959.
13. J. F. ALDER, V. A. PHILLIPS, *The effects of strain rate and temperature on the resistance of aluminium, copper and steel to compression*, J. Inst. Metals, **83** (1954-55), 80.
14. J. L. CHIDDISTER, L. E. MALVERN, *Compression-impact testing of aluminium at elevated temperatures*, Experimental Mechanics, **4**, **3** (1963), 81.
15. H. A. LEQUEAR, *Certain departures from plastic ideality at large strains*, Proc. ASTM, **55** (1955), 824.
16. J. D. LUBAHN, H. A. LEQUEAR, *Certain departures from plastic ideality at small strains*, Trans. ASME, **79** (1957), 97.
17. J. D. LUBAHN, *Creep-tension relations at low temperatures*, Proc. ASTM, **52** (1952), 905.
18. E. A. DAVIS, *Creep and relaxation of oxygen-free copper*, J. Appl. Mech., **10** (June 1943), A101.
19. A. NÁDAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol II, McGraw-Hill 1963.
20. E. A. DAVIS, *Creep of metals at high temperature in bending*, J. Appl. Mech., **5** (1938), A29.
21. J. E. DORN, *Some fundamental experiments on high temperature creep*, J. Mech. Phys. of Solids; **2**, **3** (1954), 85.
22. T. E. TIETZ, J. E. DORN, *Creep of copper at intermediate temperatures*, Trans. AIME, **206** (1956), 156.
23. R. W. GUARD, W. R. HIBBARD, *Tensile creep of high purity aluminium*, Trans. AIME, **206** (1956), 195.
24. А. Е. ГРИШКЕВИЧ, Н. Ф. КУНИН, *Пластическое растяжение меди при различных скоростях и температурах*, Физ. Мет. Металловед, **3**, **16** (Сент. 1963), 427.
25. D. MCLEAN, *Mechanical Properties of Metals*, J. Wiley 1962.
26. J. D. LUBAHN, *Derivation of stress, strain temperature, strain-rate relation for plastic deformation*, J. Appl. Mech., **14** (1947), A229.
27. J. WEERTMAN, *Creep of polycrystalline aluminium as determined from strain rate tests*, J. Mech. Phys. of Solids, **4** (1955-56), 230.
28. H. I. LIEN HUANG, O. D. SHERBY, J. E. DORN, *Activation energy for high temperature creep of high purity aluminium*, Trans. AIME, **206** (1956), 1385.

29. C. W. MACGREGOR, J. C. FISHER, *Tension tests at constant true strain rates*, J. Appl. Mech., **12** (1945), A217.
30. C. W. MACGREGOR, J. C. FISHER, *A velocity-modified temperature for the plastic flow of metals*, J. Appl. Mech., **13** (1946), A11.
31. T. A. TROZERA, O. D. SHERBY, J. E. DORN, *Effect of strain rate and temperature on the plastic deformation of high purity aluminium*, Trans. ASM, **49** (1957), 173.
32. M. MANJOINE, A. NÁDÁI, *High speed tension tests at elevated temperatures*, Proc. ASTM, **40** (1940), 822.
33. R. P. CARREKER, W. R. HIBBARD, *Tensile deformation of high purity copper as a function of temperature, strain rate, and grain size*, Acta Met., **1** (1953), 654.
34. Л. Д. СОКОЛОВ, *К вопросу о вычислении сопротивления металлов пластическому деформированию в зависимости от скорости деформации и температуры*, ДАН, **68** (1949), 459.
35. H. E. SOPER, *The Numerical Evaluation of the Incomplete Beta-Function*, Tracts for Computers, No 7, Cambridge University Press 1921.

Резюме

О СТЕПЕННОЙ ФОРМЕ МЕХАНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ
С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

В настоящей работе проводится дискуссия концепции механического уравнения состояния, касающегося деформации, скорости деформирования и температуры, вводятся четыре условия ограничивающие эту концепцию.

Затем дискутируется экспоненциальный закон, предложенный для случая постоянной температуры Е. А. Девисом. Анализ существующих экспериментальных данных показал, что все постоянные материала зависят от температуры и обсуждаемые уравнения можно написать в форме:

$$\sigma = B(T) \varepsilon_p^{m(T)} \dot{\varepsilon}_p^{n(T)},$$

где $m(T)$ обозначает показатель упрочения, $n(T)$ — чувствительность к скорости деформации, $B(T)$ — модуль пластичности, при чем все эти величины зависят от температуры.

Основные уравнения были получены на основании анализа экспериментальных результатов, полученных во время испытаний на растяжение и сжатие с учетом температуры как параметра; эти уравнения хорошо определяют первую стадию ползучести и явление релаксации. В случае, когда температура зависит от времени, получено дифференциальное уравнение, описывающее оба явления. В конкретном случае, когда даны измерения температуры, результаты можно получить численным путем. Приведенные уравнения, определяющие влияние деформации, скорости деформирования и температуры на кривую упрочения, описывают поведение таких металлов как алюминий, медь, свинец и другие.

Summary

A POWER FORM OF THE MECHANICAL EQUATION OF STATE WITH THE
TEMPERATURE

The conception of mechanical equation of state is analysed, involving strain, strain rate and temperature. Four conditions limiting this conception are introduced.

Next, is discussed the exponential law, proposed for constant temperature by E. A. DAVIS. The analysis of existing experimental data shows that each material constant depends on the temperature, therefore the equation in question can be written thus

$$\sigma = B(T) \varepsilon_p^{m(T)} \dot{\varepsilon}_p^{n(T)},$$

where $m(T)$ denotes the strain-hardening exponent $n(T)$ —the rate sensitivity and $B(T)$ —the plastic modulus, all the three quantities being dependent on the temperature.

The fundamental equations are obtained from an analysis of experimental results of tension or compression tests at constant strain rates and various temperatures. If the temperature is treated as a parameter, these equations describe in a satisfactory manner the first stage of creep and the phenomenon of relaxation. If the temperature depends on time, differential equations are obtained describing both phenomena. If the variability of temperature is prescribed, results can be obtained numerically.

The obtained equations determine the influence of strain, strain rate and temperature on the strain-hardening curve and describe the behaviour of metals such as aluminium, copper, lead etc.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1964 r.
